

**Розділ: ФУНКЦІОНАЛЬНІ ТА МЕХАТРОННІ ЕЛЕМЕНТИ
ТЕХНОЛОГІЧНИХ КОМПЛЕКСІВ**

УДК 519.61:532.51:62-91

Дмитрів В.Т., д.т.н., професор

Стоцько З.А., д.т.н., професор

**Національний Університет
«Львівська Політехніка»/ Україна**

Дмитрів І.В., к.т.н., доцент

**МОДЕЛЮВАННЯ ПОГРАНИЧНОГО ШАРУ
ЗА ЛАМІНАРНОГО Й ТУРБУЛЕНТНОГО РЕЖИМІВ РУХУ
НЬЮТОНІВСЬКОЇ РІДИНИ У ГНУЧКОМУ ТРУБОПРОВОДІ**

***Анотація:** розглянуто моделювання параметрів пограничного шару для Ньютонівських рідин за ламінарного і турбулентного режимів руху. Виходячи із рівнянь Прандтля, методу Гальоркіна, сформовано тридіагональну систему рівнянь, що зв'язує значення функцій у точці сітки $n+1$ поперек пограничного шару. Числовим методом за алгоритмом Томаса розраховані значення U^{n+1} . Значення швидкостей V^{n+1} визначено з рівняння нерозривності інтегруванням поперек пограничного шару. Моделювання турбулентного пограничного шару проведено на основі рівняння Нав'є-Стокса в безрозмірній формі числовим методом Дородниціна. Наведено результати моделювання розподілу швидкостей і товщини пограничного шару на ділянці трубопроводу 0.8-1.5 м від початку трубопроводу за витрат до 0.1 кг/с.*

***Ключові слова:** пограничний шар, турбулентний режим, швидкість, рівняння Прандтля.*

ВСТУП

В задачах автоматизації технологічних процесів, забезпечення адаптації систем різного походження, виникає проблема аналітичної ідентифікації параметрів процесу. Такі систем характеризуються процесами, на параметри яких одночасно впливають декілька факторів, які характеризують технологічний процес. Зокрема у роботі розглянуто вплив параметрів транспортування ньютонівських рідин і їх характеристик на товщину пограничного шару, за різних режимів руху, від ламінарного до турбулентного. Турбулентність зумовлена пульсуючим потоком, що створюється режимом роботи обладнання – це імпульсна зміна втрат тиску у технологічних і технічних трубопроводах систем автоматики, імпульсного транспортування робочої рідини і ряд інших технічних систем що працюють на критичних режимах із високою частотою їх зміни. Пульсуючий режим руху створює “вимушену” турбулентність. Для кількісної характеристики (подачі) і якісних параметрів процесу (передачі енергії, теплопровідності і ін.) необхідно знати

характеристику розподілу швидкостей у пограничному шарі, його товщину, що уможливить розрахунок напружень і інших динамічних параметрів. Трубопровід є жорстким, а більш складний процес – трубопровід гнучкий.

Дослідження характеристик пограничного шару транспортуючих середовищ, зокрема газу або рідини, які підпорядковуються законам Ньютона (Ньютонівські рідини) є актуальним завданням для різних сфер приладобудування та задач прикладної механіки. Критерієм оцінки є товщина і розподіл швидкості в пограничному шарі, що безпосередньо впливає на втрати енергії (втрати тиску) при русі Ньютонівських рідин у трубопроводі.

АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ

Швидкість у пограничному шарі і його товщина впливають на дотичні напруження, які виникають у процесі потоку середовища, та коефіцієнт тертя, який характеризує втрати тиску. Квазістаціонарне напруження зсуву у пограничному шарі біля стінки визначають шляхом обчислення коефіцієнта тертя при миттєвому числі Рейнольдса [1]. Дотичні напруження зсуву залежать від товщини пограничного шару, а також від характеру руху, що не є однозначним за турбулентного і пульсуючого (вимушена турбулентність) режимів руху [2].

Часто досліджуючи втрати тиску використовують для розрахунків емпіричні залежності коефіцієнтів тертя, що не завжди відповідають фізиці процесу транспортування середовища і не характеризують пограничний шар та напруження, які безпосередньо впливають на втрати тиску [3].

Ряд дослідників уточнюють емпіричні рівняння, отримані експериментально для конкретних інтервалів чисел Рейнольдса [4 - 7], або існуючі залежності коефіцієнтів тертя для рідин - використовують для газів і для двофазних потоків [8], що спотворює точність розрахункових даних. В цих рівняннях відсутні параметри пограничного шару і дотичні напруження, які виникають між шарами.

За результатами експериментів розраховують емпіричні рівняння для визначення коефіцієнтів тертя на інтервалі всього ряду числа Рейнольдса [9], або проводять апроксимацію експериментальних даних для отримання емпіричного рівняння визначення коефіцієнтів тертя, особливо для двофазних потоків (рідина і газ) [10; 11]. Апроксимовані емпіричні залежності коефіцієнту тертя при використанні для чисел Рейнольдса, відмінних від експерименту, дають значну похибку у розрахунках, яка досягає до 10 %. А при переході з рідинних потоків на газові, використання таких емпіричних залежностей неприпустимо із-за зміни фізики процесу. Тоді оцінка параметрів пограничного шару за мінімальної похибки їх значень не відповідає реальному процесу.

Моделювання параметрів пограничного шару.

Ламінарний пограничний шар. Виникнення пограничного шару обумовлено в'язкістю рідини. При виводі рівняння пограничного шару скористаємося системою рівнянь Прандтля при ламінарному русі [12]:

$$U \frac{dU}{dX} + v \frac{dU}{dY} - \nu \frac{d^2U}{dY^2} = U_c \frac{dU_c}{dX}, \quad (1)$$

$$dU/dX + dV/dY = 0, \quad (2)$$

де відомо розподілення швидкості U_c на зовнішній границі пограничного шару. Для рівнянь (1) і (2) задаємо початкові умови:

$$U(x, \delta) = U_0(\delta) \quad (3)$$

і граничні умови

$$U(x, 0) = 0, V(x, 0) = 0, U(x, \delta) = U_c(x), \quad (4)$$

де δ – товщина пограничного шару.

Будемо вважати, що розподілення швидкості U_c на зовнішній границі пограничного шару відоме за $r_0 - r_1 = \delta$ і відповідає значенням розподілення динамічної швидкості V поблизу стінки гнучкого трубопроводу, де r_0 – внутрішній радіус трубопроводу, r_1 – радіус до межі пограничного шару. Характер розподілення швидкості на зовнішній границі пограничного шару наведено на рис. 1.

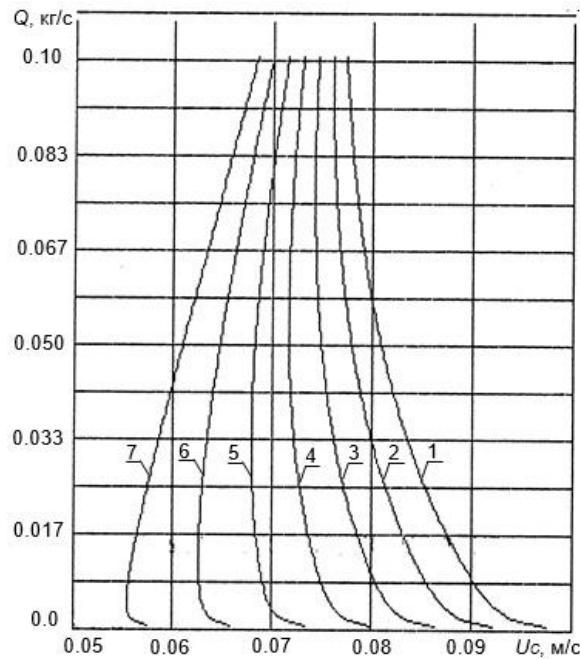


Рис.1. Розподіл швидкості U_c на зовнішній межі пограничного шару за зміни витрати Q рідини і віддалі X (м) від початку входження у гнучкий трубопровід діаметром 14 мм: 1 – 0.8; 2 – 0.9; 3 – 1.0; 4 – 1.1; 5 – 1.2; 6 – 1.3; 7 – 1.4

Введемо наступні безрозмірні змінні рівнянь (1) і (2):

$$X = \frac{X}{L}; Y = \frac{Y}{L} \cdot \text{Re}^{0.5}; U = \frac{U}{V_r}; V = \frac{V}{V_r} \cdot \text{Re}^{0.5}, \quad (5)$$

де: $\text{Re} = V_r \cdot L / \nu$ – число Рейнольда;

L, V_r – характеристичні довжина і швидкість ($X = L, V_r = U$).

Тоді рівняння (1) і (2) з врахуванням (5) запишуться:

ТЕХНОЛОГІЧНІ КОМПЛЕКСИ №1 (16), 2019

$$U \frac{dU}{dX} + V \frac{dU}{dY} - \frac{d^2U}{dY^2} = U_c \frac{dU_c}{dX}, \quad (6)$$

$$dU/dX + dV/dY = 0. \quad (7)$$

Початкові і граничні умови задаються виразами (3) і (4), які розглядаємо як рівняння для безрозмірних величин. Граничні умови $U = U_c(x)$ приймаємо за $Y = Y_{max}$, де $Y_{ax} > \delta$, де Y – радіальна віддаль від стінки трубопроводу.

Розв'язок рівнянь (6) і (7) проведемо числовим методом. Для використання змінної в напрямку радіуса R сітки різні похідні в (6) дискретизуємо за аналогією методу Гальоркіна [13] в:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dr} &= \frac{(U_j^{n+1} - U_{j-1}^{n+1})/k_r + (U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1})/k_r}{(1+k_r)\Delta r} + o(\Delta r^2), \\ \frac{d^2U}{dr^2} &= \frac{2(U_{j-1}^{n+1} - (1+1/k_r)U_j^{n+1} + U_{j+1}^{n+1}/k_r)}{(1+k_r)\Delta r^2} + o(\Delta r), \\ \frac{dU}{dX} &= \frac{(1,5U_j^{n+1} - 2U_j^n + 0,5U_j^{n-1})}{\Delta X} + o(\Delta X^2), \end{aligned} \quad (8)$$

де: відношення двох сусідніх кроків сітки рівне:

$$k_r = (R_{j+1} - R_j)/(R_j - R_{j-1}). \quad (9)$$

Щоб отримати лінійну відносно U^{n+1} систему рівнянь недиференційовані компоненти швидкості U і V , що входять в ліву частину (6) екстраполюємо:

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} &= 2U_j^n - U_j^{n-1} + o(\Delta X^2), \\ V_j^{n+1} &= 2V_j^n - V_j^{n-1} + o(\Delta X^2) \end{aligned} \quad (10)$$

Підставивши (8) і (10) в (6) одержимо тридіагональну систему рівнянь, що зв'яже значення функцій у точці сітки $n+1$ поперек пограничного шару:

$$a_j U_{j-1}^{n+1} + b_j U_j^{n+1} + c_j U_{j+1}^{n+1} = d_j, \quad (11)$$

$$\text{де } p = \frac{(2V_j^n - V_j^{n-1})\Delta X}{(1+k_r)\Delta r}; \quad a_j = -k_r p - q;$$

$$b_j = 1,5(2U_j^n - U_j^{n-1}) + \left(k_r - \frac{1}{k_r}\right)p + \left(1 + \frac{1}{k_r}\right)q,$$

$$c_j = \frac{p}{k_r} - \frac{q}{k_r}, \quad d_j = \Delta X \cdot U \frac{dU}{dX} + (2U_j^n - 0,5U_j^{n-1}) \cdot (2U_j^n - U_j^{n-1}).$$

На стінці $U = 0$ за $Y = \delta$ і $U_{jmax} = U_c$. Рівняння (11) утворює тридіагональну (за $j_{max} = 2$) систему рівнянь, значення U_j^{n+1} знаходимо за алгоритмом Томаса. Рівняння (11) у відношенні до кожного вузла записуємо у вигляді матриць:

$$\begin{bmatrix} b_1 & C_1 \\ a_2 & b_2 & C_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_j & b_j & C_j \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & b_{n-1} & C_{n-1} \\ a_n & b_n & C_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_j \\ \dots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_j \\ \dots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} \text{про} - \\ \text{гон} - \\ \text{ка} \\ \text{впе} - \\ \text{ред} \end{bmatrix} > \quad (12)$$

$$> \begin{bmatrix} 1C'_1 \\ 1C'_2 \\ \dots \\ 1C'_j \\ \dots \\ 1C'_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_j \\ \dots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d'_1 \\ d'_2 \\ \dots \\ d'_j \\ \dots \\ d'_{n-1} \\ d'_n \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} \text{про} - \\ \text{гон} - \\ \text{ка} \\ \text{на} - \\ \text{зад} \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_j \\ \dots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Виключаючи коефіцієнти a_j у рівнянні (12) й нормалізуємо до одиничних значень коефіцієнти b_j , буде рівняння (13), при цьому для першого рядку: $C'_1 = C_1/b_1$, $d'_1 = d_1/b_1$, для довільно розміщених рядків у рівнянні

$$C'_j = \frac{C_j}{b_j - a_j \cdot C_{j-1}}, \quad d'_j = \frac{d_j - a_j \cdot d_{j-1}}{b_j - a_j \cdot C_{j-1}}.$$

Другий етап алгоритму зводиться до оберненої підстановки: $U_n = d_n$, $U_j = d_j - U_{j+1} \cdot C_j$. При цьому виконуємо умову $|b_j| > |a_j| + |C_j|$.

Для знаходження V_j^{n+1} рівняння нерозривності (7) інтегруємо поперек пограничного шару з використанням [13]:

$$V_j^{n+1} = V_{j-1}^{n+1} - 0,5 \frac{\Delta r}{\Delta X} \left[(1,5U_j^{n+1} - 2U_j^n + 0,5U_j^{n-1}) + (1,5V_{j-1}^{n+1} - 2V_{j-1}^n + 0,5V_{j-1}^{n-1}) \right]. \quad (14)$$

Розподіл швидкості в пограничному шарі знаходимо послідовним розв'язуванням рівнянь (11) і (14) для всіх X^{n+1} , розміщених вниз за потоком.

Результати моделювання для віддалі від початку трубопроводу 1.2 м. ототожені і приведені у вигляді характеристичного графіка на рис. 2.

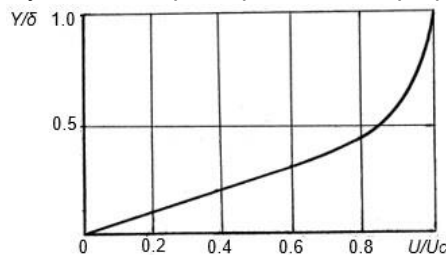


Рис. 2. Розподіл швидкості в ламінарному пограничному шарі

За ламінарного режиму руху в пограничному шарі присутній параболический розподіл швидкості. Для пульсуючого режиму ламінарний режим руху рідини є тільки на стадії формування корка і присутній менше сотих секунд.

Турбулентний пограничний шар. Для моделювання турбулентного пограничного шару використаємо рівняння Нав'є-Стокса в безрозмірній формі, прийнявши U незалежною змінною [14]:

$$dU/dX + dV/dr = 0, \quad (15)$$

$$U \frac{dU}{dX} + V \frac{dU}{dr} = U_c \frac{dU_c}{dX} + \frac{1}{Re} \frac{d}{dr} \left[\left(1 + \frac{\nu}{\nu_T} \right) \frac{dU}{dr} \right]. \quad (16)$$

з початковими умова (3, 4). При розв'язуванні цих рівнянь використовуємо метод Дородниціна [15]. Введемо наступні змінні:

$$\xi = x; \eta = Re^{0.5} \cdot U_c \cdot r; U' = \frac{U}{U_c}; V' = Re^{0.5} \cdot \frac{V}{U_c}; U'_r = U_c \cdot V' + \frac{\eta U'}{d\xi} \cdot \frac{dU_c}{d\xi}, \quad (17)$$

де: U', V', U'_r – складові вектору швидкості.

Рівняння (15) і (16) можна записати в наступному вигляді (опустивши штрих):

$$dU/d\xi + dU_r/d\eta = 0, \quad (18)$$

$$U \frac{dU}{d\xi} + U_r \frac{dU}{d\eta} = \frac{U\xi}{U_c} + \frac{d}{d\eta} \left[\left(1 + \frac{\nu_T}{\nu} \right) \frac{dU}{d\eta} \right]. \quad (19)$$

де: ν_T – турбулентна в'язкість [15]; $U\xi = dU/d\xi$.

Граничні умови наступні: $U = U_r = 0$ за $\eta = 0$ і $U = 1$ за $\eta = \infty$.

Зважена сума рівнянь (15) і (16) формується наступним чином:

$$f_k(U) \times (16) + \left(\frac{df_k(U)}{dU} \right) \times (19) = 0,$$

де: $f_k(U)$ – пробна функція, яку необхідно визначати.

В результаті отримуємо:

$$\frac{d(Uf_k)}{d\xi} + \frac{d(Uf_k)}{d\eta} = \frac{U\xi}{U_c} (1 - U^2) \frac{df_k}{d\eta} + U_c \frac{df_k}{dU} \frac{d}{d\eta} \left[\left(1 + \frac{\nu_T}{\nu} \right) \frac{dU}{d\eta} \right]. \quad (20)$$

Інтегрування проводимо від $\eta = 0$ до $\eta = \infty$, а f_k обмежена так, що $f_k(\infty) = 0$. Замінивши змінну інтегрування η на U , одержимо наступне рівняння:

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^1 U \cdot f_k \cdot \theta \cdot dU = \frac{U\xi}{U_c} \int_0^1 \frac{df_k}{dU} (1 - U^2) \cdot \theta \cdot dU + U_c \int \frac{df_k}{dU} \frac{d}{dU} \left(1 + \frac{\nu_T}{\nu} \right) \cdot T \cdot dU, \quad (21)$$

де: $T = 1/\Theta = dU/d\eta$.

Рівняння (21) відповідає рівнянню Дородниціна турбулентного граничного шару. Тут T і θ є залежні змінні, а X і U – незалежні. Розв'язування рівняння проводимо методом кінцевих елементів. Ввівши однорідну сітку в напрямку U , більшість точок автоматично розміщується біля стінки, де результати розв'язку змінюються дуже швидко. Алгоритм розв'язку приведено на рис. 3.

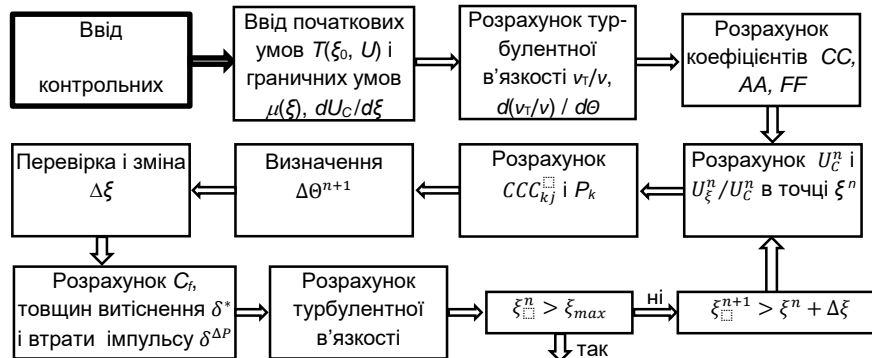


Рис. 3. Блок-схема моделювання турбулентного пограничного шару методом Дородниціна у поєднанні з методом кінцевих елементів

Моделювання турбулентного пограничного шару, згідно блок-схеми рис. 3, проводили наступним чином. Для Θ і $(1 + v_T/v) \cdot T$ у рівняння (21) вводили приблизні (пробні) рішення у вигляді залежностей (22) і (23):

$$\Theta = \sum_{j=1}^n \frac{N_j(U)}{(1-U) \cdot \Theta_j(\xi)}, \quad (22)$$

$$\left(1 + \frac{v_T}{v}\right) \cdot T = \sum_{j=1}^n (1-U) \cdot N_j(U) \cdot \left(1 + \frac{v_T}{v}\right)_j \cdot \tau_j(\xi). \quad (23)$$

Множник $(1 - U)$ забезпечує характер поведінки Θ і T на зовнішній межі пограничного шару. Члени $N_j(U)$ – квадратична одновимірні інтерполяційні функції. У нашому випадку маємо частковий характер, а $v_T = f(U, \eta)$. Згідно рівняння Клаузера $v_T = 0.0168 \cdot U \cdot \delta^*$, де δ^* – товщина витіснення, що характеризує товщину середовища у пограничному шарі, яка еквівалентна втратам потоку маси цього середовища.

Товщину пограничного шару визначаємо, виходячи з наступного рівняння $d\delta/dx \sim V^*/U_c$, звідки $\delta \approx V^* \cdot x/U_c$. Функція $f_k(U)$ у рівнянні (21) має вигляд

$$f_k(U) = (1 - U) \cdot N_k(U). \quad (24)$$

Залежність (24) забезпечує виконання умови $f_k(U) = 0$ за $U = 1$.

Підстановка залежностей (22), (23) і (24) у рівняння (21) призводить до модифікованого методу Галеркіна. Визначивши часткові інтеграли отримали систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{j=1}^n CC_{kj} \cdot \frac{d\Theta_j}{d\xi} = \frac{U_\xi}{U_c} \cdot \sum_{j=1}^n FF_{kj} \cdot \Theta_j + U_c \cdot \sum_{j=1}^n AA_{kj} \cdot \left(1 + \frac{v_T}{v}\right)_j \cdot \tau_j. \quad (25)$$

Коефіцієнти рівняння (25) розраховуємо один раз із рівнянь:

$$CC_{kj} = \int_0^1 N_j \cdot N_k \cdot dU; \quad FF_{kj} = \int_0^1 N_j \cdot \left((1-U) \frac{dN_k}{dU} - N_k \right) \cdot (1+U) \cdot dU;$$

$$AA_{kj} = \int_0^1 \left(\frac{dN_j}{dU} \cdot (1-U) - N_j \right) \cdot \left(\frac{dN_k}{dU} \cdot (1-U) - N_k \right) \cdot dU. \quad (26)$$

У вузлових точках $\Theta_j = 1/\tau_j$. Для матриці CC будемо ефективну неявну схему:

$$\sum_{j=1}^n CC_{kj} \cdot \Delta\Theta_j^{n+1} = \Delta\xi \cdot (\beta \cdot TNR^{n+1} + (1-\beta) \cdot TNR^n), \quad (27)$$

$$\text{де } TNR = \frac{U_\xi}{U_c} \cdot \sum_{j=1}^n FF_{kj} \cdot \Theta_j + U_j \cdot \sum_{j=1}^n AA_{kj} \cdot \left(1 + \frac{v_T}{v}\right)_j \cdot \tau_j, \quad \Delta\Theta_j^{n+1} = \Theta_j^{n+1} - \Theta_j^n.$$

Розклавши TNR^{n+1} навколо TNR^n у ряд Тейлора, тоді рівняння (27) перетвориться у систему рівнянь для визначення $\Delta\Theta_j^{n+1}$:

$$\sum_{j=1}^n CCC_{kj} \cdot \Delta\Theta_j^{n+1} = P_k, \quad (28)$$

$$\text{де } CCC_{kj} = CC_{kj} - \beta \cdot \Delta\xi \cdot \left[\left(\frac{U_\xi}{U_c} \right)^{n+1} \cdot FF_{kj} \cdot U^{n+1} \cdot AA_{kj} \cdot G_j \right];$$

$$G_j = \left[\left(1 + \frac{v_T}{v}\right) \cdot \tau^2 - \tau \cdot \frac{d}{d\Theta} \left(\frac{v_T}{v} \right)_j \right]^n; \quad P_k = \Delta\xi \cdot \left\{ \beta \cdot \left(\frac{U_\xi}{U_c} \right)^{n+1} + (1-\beta) \cdot \left(\frac{U_\xi}{U_c} \right)^n \times \right.$$

$$\times \left. \sum_{j=1}^n FF_{kj} \cdot \Theta_j^n + (\beta \cdot U_c^{n+1} + (1 - \beta) \cdot U_c^n) \cdot \sum_{j=1}^n AA_{kj} \cdot \left(1 + \frac{v_T}{v}\right)_j \cdot \tau_j^n \right\}.$$

Розв'язуємо поетапно, визнаємо профіль $\tau(x_0, U_j)$, що відповідає U_j з розрахунку $dU/d\eta$ рівняння (21) на рівних інтервалах по η і інтерполяції τ на рівні інтервали по U_j . Перед інтегруванням визначаємо розподіл турбулентної в'язкості $v_T(R)/v$. Поблизу стінки вводимо довжину перемішування, а на зовнішньому просторі пограничного шару застосовуємо рівняння Клаузера.

Коефіцієнти CC , FF , AA у рівнянні (27) розраховуємо за одномірними лінійними елементами з кроком ΔU :

$$\begin{aligned} CC_{j,j-1} &= \frac{U_{j-0.5}}{6}; \quad CC_{j,j} = \frac{U_j}{3}; \quad CC_{j,j+1} = \frac{U_{j+0.5}}{6}; \\ FF_{j,j-1} &= 0.5 \cdot \frac{1 - U_j^2}{\Delta U} + 0.5 \cdot U_j - \frac{1 + \Delta U}{6}; \quad FF_{j,j} = -\frac{2}{3}; \\ FF_{j,j+1} &= -0.5 \cdot \frac{1 - U_j^2}{\Delta U} + 0.5 \cdot U_j - \frac{1 - \Delta U}{6}; \quad AA_{j,j-1} = -(1 - U_j) \cdot \frac{1 - U_{j-1}}{\Delta U^2} - \frac{1}{3}; \\ AA_{j,j} &= 2 \cdot \frac{(1 - U_j)^2}{\Delta U^2} + \frac{2}{3}; \quad AA_{j,j+1} = -(1 - U_j) \cdot \frac{1 - U_{j-1}}{\Delta U^2} - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Коефіцієнт тертя C_f визначали з рівняння: $C_f = 2 \cdot \tau / \text{Re}^{0.5}$.

Товщина витіснення δ^* і втрати імпульсу $\delta^{\Delta P}$ розраховуємо числовим інтегруванням рівнянь:

$$\delta^* = \frac{1}{U_c \cdot \text{Re}^{0.5}} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\tau} dU; \quad \delta^{\Delta P} = \frac{1}{U_c \cdot \text{Re}^{0.5}} \cdot \int_0^1 \frac{U}{\tau} dU$$

Розподіл швидкості в турбулентному пограничному шарі наведено на рис. 4.

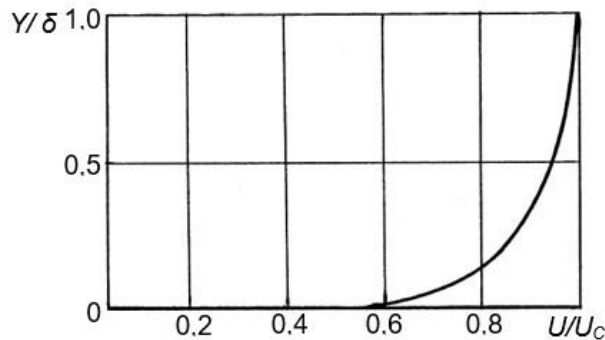


Рис. 4. Розподіл швидкості в турбулентному пограничному шарі

За турбулентного пограничного шару (рис. 4) на стінці трубопроводу виникає рухома плівка рідини, швидкість якої становить 0.6 від швидкості U_c на зовнішній межі пограничного шару.

Залежність товщини пограничного шару від інтенсивності потоку і відстані від початку входження рідини у трубопровід приведена на рис. 5 і 6.

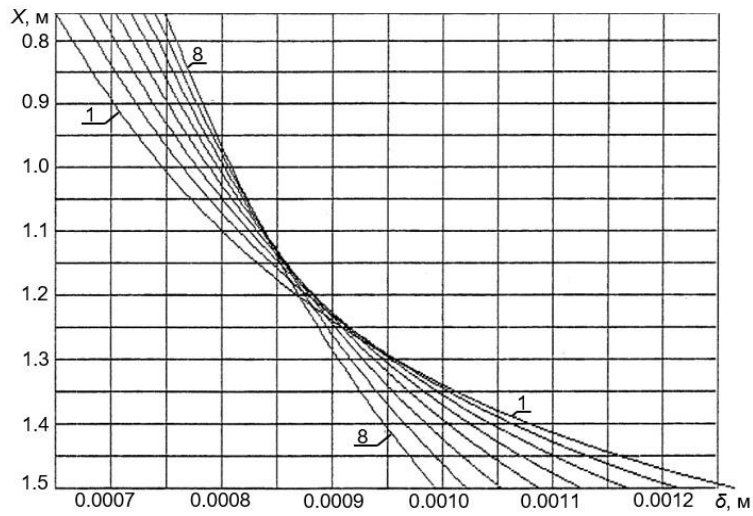


Рис. 5. Товщина пограничного шару δ на віддалі X від початку трубопроводу діаметром 14 мм за його подачі (кг/с), відповідно: 1 – 0.0083; 2 – 0.0167; 3 – 0.025; 4 – 0.0333; 5 – 0.04167; 6 – 0.05; 7 – 0.05833; 8 – 0.06667

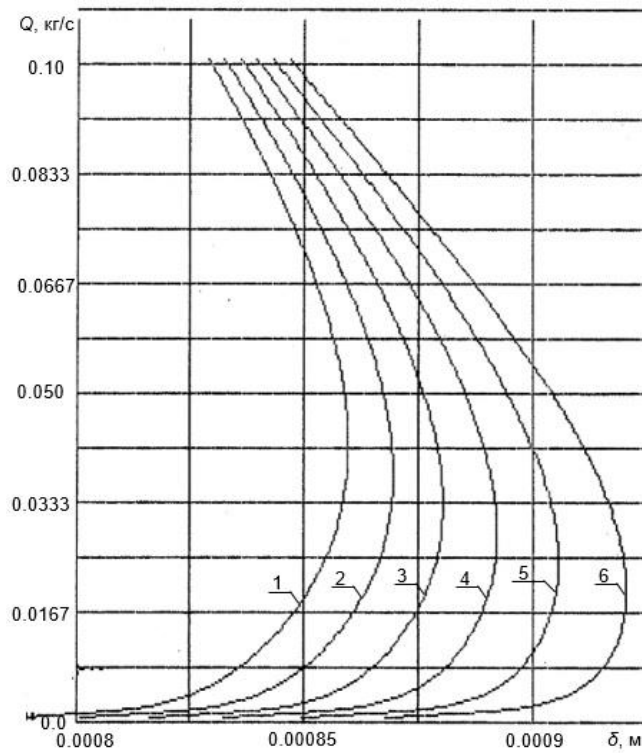


Рис. 6. Товщина пограничного шару δ в залежності від подачі Q трубопроводу діаметром 14 мм і віддалі X (м) від початку входження рідини: 1 – 1.16; 2 – 1.18; 3 – 1.20; 4 – 1.22; 5 – 1.24; 6 – 1.26

ВИСНОВКИ

Результати теоретичних досліджень показують що віддалі 1.16 - 1.26 м від входження рідини у трубопровід товщина пограничного шару є у межах від $0.825 \cdot 10^{-3}$ до $0.94 \cdot 10^{-3}$ м за подачі трубопроводу до 0.1 кг/с. Інтервал зміни товщини пограничного шару не перевищує 7.6 % на інтервалі зміни подачі трубопроводу до 0.025 кг/с, а на інтервалі подачі від 0.0667 до 0.1 кг/с товщина пограничного шару змінюється у межах 2.86 %. На заданій віддалі від початку трубопроводу із збільшенням подачі коливання товщини пограничного шару зменшуються і не перевищують 3.0 %.

Від початку входження у трубопровід до 1.2 м із збільшення подачі до 0.1 кг/с товщина пограничного шару зростає з інтервалом від 1.5 % до 3.5 % і не перевищує товщини пограничного шару $0.85 \cdot 10^{-3}$ м.

Після 1.2 м від початку трубопроводу із збільшення подачі до 0.1 кг/с товщина пограничного шару зменшується з інтервалом в 2.5 %. За подачі 0.0083 кг/с на віддалі 2.5 м від початку проводу товщина пограничного шару $1.26 \cdot 10^{-3}$ м, а за подачі 0.0667 кг/с - товщина пограничного шару $0.99 \cdot 10^{-3}$ м.

Наведений метод моделювання товщини пограничного шару визначає параметри пограничного шару за ламінарного і турбулентного режимів руху Ньютонівських рідин з достатньою точністю, враховує динаміку за напрямком руху, коефіцієнти поверхневого тертя і дотичні напруження між шарами.

Визначення по довжині проводу мінімального інтервалу зміни товщини пограничного шару обґрунтовує розміщення сенсорів для контролю і керування технічними і технологічними мехатронними системами виробництва.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] He, S. & Ariyaratne, C. (2011). Wall shear stress in the early stage of unsteady turbulent pipe flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 137(5), 606–610.
- [2] Sundstrom, L.R.J. & Cervantes, M.J. (2018). On the Similarity of Pulsating and Accelerating Turbulent Pipe Flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, 100(2), 417-436. <https://doi.org/10.1007/s10494-017-9855-5>
- [3] Kong, R. & Kim, S. (2015, August - September). *Characterization of Horizontal Air-water Two-Phase Flow*. The 16th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-16). (pp. 5559-5572). Chicago / USA.
- [4] Offor, U. H. & Alabi, S. B. (2016). An Accurate and Computationally Efficient Explicit Friction Factor Model. *Advances in Chemical Engineering and Science*, 6, 237-245. <http://dx.doi.org/10.4236/aces.2016.63024>
- [5] Medina, Y. C., Fonticiella, O. M. C. & Morales O. F. G. (2017). Design and modelation of piping systems by means of use friction factor in the transition turbulent zone. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 4(4), 162-167. DOI: 10.18280/mmep.040404
- [6] Azizi, N., Homayoon, R., & Hojjati, M. R. (2018). Predicting the Colebrook-White friction factor in the pipe flow by new explicit correlations. *Journal of Fluids Engineering*, 141(5), doi:10.1115/1.4041232
- [7] Pimenta, B. D., Robaina, A. D., Peiter, M. X., Mezzomo, W., Kirchner, J. H. & Ben, L. H. B. (2018). Performance of explicit approximations of the coefficient of head loss for pressurized conduits. *Brazilian Journal of Agricultural and Environmental Engineering (Revista Brasileira de Engenharia Agrícola et Ambiental)*, 22 (5), 301-307. Retrieved from <http://www.agriambi.com.br>
- [8] Tarek, A. Ganat, & Meftah Hrairi. (2018). Gas–Liquid Two-Phase Upward Flow through a Vertical Pipe. *Influence of Pressure Drop on the Measurement of Fluid Flow Rate, Energies (MDPI)*, 11(11), 1-23. doi:10.3390/en11112937

- [9] Brkic, D. & Praks, P. (2018). Unified Friction Formulation from Laminar to Fully Rough Turbulent Flow. *Applied Sciences*, 8(11), 20 - 36. doi: 10.3390/app8112036
- [10] Ortiz-Vidal, L. E., Mureithi, N. & Rodriguez, O. M. H. (2013, May). *Friction Factor in Two-Phase Gas-Liquid Pipe Flow*. 8-th International Conference on Multiphase Flow (ICMF-2013) Jeju / Korea. Retrieved from <https://www.researchgate.net/publication/237079232>
- [11] Lukman, S. & Oke, I. A. (2017). Accurate Solutions of Colebrook-White's Friction Factor Formulae. *Nigerian Journal of Technology (NIJOTECH)*, 36(4), 1039–1048. Nigeria.
- [12] Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. М.: Наука, 1988. 735 с.
- [13] Fletcher, C. A. J. (1988). *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1: Fundamental and General Techniques*. Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin.
- [14] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Госиздат технико-теоретической литературы, 1950. 680 с.
- [15] Дородницын А.А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя // Прикладная механика и техническая физика. 1960. Вып. 3. С. 111-118.

SIMULATION OF BOUNDARY LAYER UNDER LAMINAR AND TURBULENT MODES OF NEWTONIAN FLUID MOTION IN A FLEXIBLE PIPELINE

Dmytriv V. T., DThSc., Professor,

Stotsko Z. A., DThSc., Professor,

Lviv Polytechnic National University
/ Ukraine

Dmytriv I. V., Ph. D. in Engineering,
Assoc. Professor

Abstract. *the article deals with the modeling of boundary layer parameters for Newtonian fluids under laminar and turbulent modes of motion. Based on the system of Prandtl equations and initial boundary conditions under laminar motion, using the Gallorkin method, a tri-diagonal system of equations is formed, which connects the values of functions at the node of nets $n+1$ across the boundary layer. The numerical method uses the Thomas algorithm to calculate values U_j^{n+1} . The velocity value V_j^{n+1} is determined from the continuity equation by integration across the boundary layer. The Navier-Stokes equation in dimensionless form was used to model the turbulent boundary layer, given the velocity U is an independent variable. The differential equation system was solved using the numerical Dorodnicin method. The results of modeling the velocity distribution in the boundary layer, the thickness of the boundary layer in the section of the flexible pipeline 0.8-1.5 m from the beginning of the fluid entering the pipeline at the expense up to 0.1 kg/s are presented.*

Keywords: *boundary layer, turbulent mode, velocity, Prandtl equation*

REFERENCES (TRANSLATED AND TRANSLITERATED)

- [1] He, S. & Ariyaratne, C. (2011). Wall shear stress in the early stage of unsteady turbulent pipe flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 137(5), 606–610. (in English).
- [2] Sundstrom, L.R.J. & Cervantes, M.J. (2018). On the Similarity of Pulsating and Accelerating Turbulent Pipe Flows. *Flow, Turbulence and Combustion*, 100 (2), 417-436. <https://doi.org/10.1007/s10494-017-9855-5> (in English).
- [3] Kong, R. & Kim, S. (2015, August - September). *Characterization of Horizontal Air-water Two-Phase Flow*. The 16th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics (NURETH-16). (pp. 5559-5572). Chicago / USA. (in English).
- [4] Offor, U. H. & Alabi, S. B. (2016). An Accurate and Computationally Efficient Explicit Friction Factor Model. *Advances in Chemical Engineering and Science*, 6, 237-245. <http://dx.doi.org/10.4236/aces.2016.63024> (in English).

- [5] Medina, Y. C., Fonticiella, O. M. C. & Morales O. F. G. (2017). Design and modelation of piping systems by means of use friction factor in the transition turbulent zone. *Mathematical Modelling of Engineering Problems*, 4 (4), 162-167. DOI: 10.18280/mmep.040404 (in English).
- [6] Azizi, N., Homayoon, R., & Hojjati, M. R. (2018). Predicting the Colebrook-White friction factor in the pipe flow by new explicit correlations. *Journal of Fluids Engineering*, 141 (5), doi:10.1115/1.4041232 (in English).
- [7] Pimenta, B. D., Robaina, A. D., Peiter, M. X., Mezzomo, W., Kirchner, J. H. & Ben, L. H. B. (2018). Performance of explicit approximations of the coefficient of head loss for pressurized conduits. *Brazilian Journal of Agricultural and Environmental Engineering (Revista Brasileira de Engenharia Agrícola et Ambiental)*, 22 (5), 301-307. Retrieved from <http://www.agriambi.com.br> (in English).
- [8] Tarek, A. Ganat, & Meftah Hrairi. (2018). Gas–Liquid Two-Phase Upward Flow through a Vertical Pipe. *Influence of Pressure Drop on the Measurement of Fluid Flow Rate, Energies (MDPI)*, 11 (11), 1-23. doi:10.3390/en11112937 (in English).
- [9] Brkic, D. & Praks, P. (2018). Unified Friction Formulation from Laminar to Fully Rough Turbulent Flow. *Applied Sciences*, 8(11), 20-36. doi: 10.3390/app8112036 (in English).
- [10] Ortiz-Vidal, L. E., Mureithi, N. & Rodriguez, O. M. H. (2013, May). *Friction Factor in Two-Phase Gas-Liquid Pipe Flow*. 8-th International Conference on Multiphase Flow (ICMF-2013) Jeju / Korea. Retrieved from <https://www.researchgate.net/publication/237079232> (in English).
- [11] Lukman, S. & Oke, I. A. (2017). Accurate Solutions of Colebrook-White's Friction Factor Formulae. *Nigerian Journal of Technology (NIJOTECH)*, 36(4), 1039–1048. Nigeria. (in English).
- [12] Landau, L.D., & Lifshitz, E.M. (1988). *Theoretical physics. Hydrodynamics*. Moscow: Nauka. (in Russian).
- [13] Fletcher, C. A. J. (1988). *Computational Techniques for Fluid Dynamics 1: Fundamental and General Techniques*. Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin. (in English).
- [14] Lojciansky, L.G. (1950). *Fluid and gas mechanics*. Moscow: Gosizdat of technical and theoretical literature. (in Russian).
- [15] Dorodnitsyn, A.A. (1960). On one method for solving the laminar boundary layer equations. *Applied mechanics and technical physics*, 3. 111-118. (in Russian).

Стаття надійшла до редакції 11.11.2019