

Б.К. Гануліч [0000-0002-3337-5066], О.В. Гуда [0000-0002-3602-7892], Т.А. Крадінова [0000-0002-5611-1290]

Луцький національний технічний університет

ВЛАСНІ ФУНКЦІЇ РІВНЯННЯ ЛАПЛАСА/ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ КЛИНОПОДІБНИХ ОБЛАСТЕЙ

Розв'язано рівняння Лапласа/Гельмгольца для клиноподібних областей у циліндричній системі координат. Розв'язки отримані у вигляді рядів по ортонормованій системі функцій Бесселя. Виведено формули для оцінки точності (залишку ряду) обчислень при заданій кількості перших членів відповідного ряду.

Ключові слова: рівняння Лапласа/Гельмгольца, клиноподібна область, функції Бесселя, залишок ряду.

B.K. Hanulich, O.V. Huda, T.A. Kradinova

EIGENFUNCTIONS OF THE LAPLACE/HELMHOLTZ EQUATION FOR WEDGE-SHAPED DOMAIN

The Laplace/Helmholtz equation for wedge-shaped regions (wedge-shaped sector of finite width, wedge-shaped sector of finite length) in a cylindrical coordinate system is solved. The solutions are obtained in the form of series in an orthonormal system of modified Bessel and McDonald functions. Formulas for estimating the required number of first terms of the corresponding series to ensure the given accuracy of calculations are derived.

Keywords: Laplace/Helmholtz equation, wedge-shaped region, Bessel functions, remainder of the series.

Для побудови розв'язків рівнянь Лапласа/Гельмгольца в клиноподібних областях використовують циліндричну систему координат (r, φ, z) . У цій системі координат клиноподібна область визначається так

$$K : \{0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq \gamma; 0 \leq z \leq b\}. \quad (1)$$

Рівняння Лапласа/Гельмгольца записуються так [1,2]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0 \quad (3)$$

Для спрощення побудуємо загальні розв'язки цих рівнянь для клиноподібних областей за умови, що вони описують фізичні процеси, незалежні від координати z . Для цього використаємо метод розділення змінних, записавши шуканий розв'язок у вигляді $U(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Тоді незалежні від координати z власні функції рівняння Лапласа $R(r), \Phi(\varphi)$ знаходимо з розв'язку диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{\partial R}{\partial r} - \nu_n^2 R &= 0, \quad r \in [0, \infty), \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \nu_n^2 \Phi &= 0, \quad \varphi \in [0, \gamma]. \end{aligned} \quad (4)$$

де ν_n - стала розділення змінних або, іншими словами, власні значення задачі, а відповідні функції $R(r), \Phi(\varphi)$ є її власними функціями. Загасаючі на нескінченності і обмежені в нулі розв'язки рівняння Лапласа записуються так

$$U_D(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin(\nu_n \varphi) \begin{cases} (r/a)^{-\nu_n}, & r \geq a \\ (r/a)^{\nu_n}, & r \leq a \end{cases}, \quad (5)$$

$$U_N(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos(\nu_n \varphi) \begin{cases} (r/a)^{-\nu_n}, & r \geq a \\ (r/a)^{\nu_n}, & r \leq a \end{cases}. \quad (6)$$

Тут x_n, y_n - невідомі коефіцієнти розкладу; ν_n - додатні розв'язки трансцендентного рівняння $\sin(\nu_n \gamma) = 0$, тобто $\nu_n = n\pi/\gamma$. Зауважимо, що поява граничних умов на поверхнях клина приводить до випадання логарифмічного доданку у розв'язках рівнянь Лапласа. Представлення (6) дає загальний розв'язок крайової задачі Діріхле для рівняння Лапласа (2), а формула (6) дає загальний розв'язок крайової задачі Неймана для цього рівняння: $\partial_\varphi u_N(r, 0) = \partial_\varphi u_N(r, \gamma) = 0$. Тригонометричні функції є власними функціями цих задач і володіють властивістю ортогональності: $U_D(r, 0) = U_D(r, \gamma) = 0$

© Б.К.Гануліч, О.В.Гуда, Т.А.Крадінова

$$\int_0^\gamma \sin(v_n \varphi) \sin(v_m \varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \gamma / 2 & , \end{cases} \quad (7)$$

$$\int_0^\gamma \cos(v_n \varphi) \cos(v_m \varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \gamma / 2 & \end{cases} \quad (8)$$

Нехай значення потенціалів (5) (6) є відомими на поверхні $\{r = a, 0 \leq \varphi \leq \gamma\}$: $U_D(a, \varphi) = f_D(\varphi)$, $U_N(a, \varphi) = f_N(\varphi)$, то коефіцієнти розкладу визначаються формулами:

$$x_n = \frac{2}{\gamma} \int_0^\gamma f_D(\varphi) \sin(v_n \varphi) d\varphi \quad (9)$$

$$y_n = \frac{2}{\gamma} \int_0^\gamma f_N(\varphi) \cos(v_n \varphi) d\varphi \quad (10)$$

• Тобто вирази (9), (10) є справедливими для конкретного значення $r=a$. Тепер ставимо задачу обчислення потенціалу (5) у будь якій точці, коли відоме його значення на поверхні .

• $\{r = a, 0 \leq \varphi \leq \gamma\}$. Необхідний вираз записується так

$$U_D(r, \varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\gamma f_D(\varphi) S_D^N(q, \varphi) d\varphi \quad (11)$$

$$S_D^N(\varphi) = \frac{2}{\gamma} \sum_{n=1}^N (q^{\pi/\gamma})^n \sin[(n\pi/\gamma)\varphi] \quad q = \begin{cases} a/r, & r \geq a \\ r/a, & r \leq a \end{cases} \quad (12)$$

При $v_n = n\pi/\gamma$ для ряду (12) справедлива оцінка

$$S_D^N(\varphi) < \frac{2}{\gamma} \sum_{n=1}^N (q^{\pi/\gamma})^n \quad (13)$$

Оскільки ряд (13) визначає геометричну прогресію, запишемо

$$\sum_{n=1}^N (q^{\pi/\gamma})^n = \frac{q^{(N+1)\pi/\gamma} - 1}{q^{\pi/\gamma} - 1} - 1 = \frac{q^{(N+1)\pi/\gamma} - q^{\pi/\gamma}}{q^{\pi/\gamma} - 1} \quad (14)$$

В граничному випадку, при $N \rightarrow \infty$ і $q < 1$ знаходимо

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (q^{\pi/\gamma})^n = \frac{q^{\pi/\gamma}}{1 - q^{\pi/\gamma}} \quad (15)$$

Тепер можемо записати залишок ряду (6) так

$$|U_D(r, \varphi) - U_D^N(r, \varphi)| < \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\gamma f_D(\varphi) [S_D^\infty(\varphi) - S_D^N(\varphi)] d\varphi < \frac{2q^{(N+1)\pi/\gamma}}{\gamma(1 - q^{\pi/\gamma})} \int_0^\gamma f_D(\varphi) d\varphi \quad (16)$$

Аналогічну оцінку можемо знайти і для ряду (7):

$$|U_N(r, \varphi) - U_N^N(r, \varphi)| < \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\gamma f_N(\varphi) [S_N^\infty(\varphi) - S_N^N(\varphi)] d\varphi < \frac{2q^{(N+1)\pi/\gamma}}{\gamma(1 - q^{\pi/\gamma})} \int_0^\gamma f_N(\varphi) d\varphi \quad (17)$$

де

$$S_N^N(\varphi) = \frac{2}{\gamma} \sum_{n=1}^N (q^{\pi/\gamma})^n \cos[(n\pi/\gamma)\varphi] \quad (18)$$

Тут треба пам'ятати, що параметр q є функцією радіусу (13а); $U_D^N(r, \varphi)$, $U_N^N(r, \varphi)$ - ряди (5), (6), в яких враховано N членів.

Висновки: Таким чином формули (16), (17) дозволяють оцінити точність наближення та визначити необхідну кількість доданків для забезпечення заданої точності при підсумовуванні рядів (5), (6), за умови, що значення потенціалів (5), (6) є відомим на поверхні $\{r = a, 0 \leq \varphi \leq \gamma\}$. Із формул (16), (17) бачимо, що при фіксованому N точність обчислювання зростає зі зменшенням параметра q і кута γ . Очевидно також, що точність залежить від значення самої функції на поверхні $\{r = a, 0 \leq \varphi \leq \gamma\}$.

Перейдемо до рівняння Гельмгольца (8). Застосовуючи метод розділення змінних, знаходимо

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{v_n^2}{r^2} \right) R = 0, \quad r \in [0, \infty), \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + v_n^2 \Phi = 0, \quad \varphi \in [0, \gamma] \quad (20)$$

Враховуючи, що рівняння (19) визначає функції Бесселя, що згасають на нескінченності і обмежені в нулі, розв'язки рівняння Гельмгольца (8) записуються так:

$$U_D(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \sin(v_n \varphi) \begin{cases} H_{v_n}^{(1)}(kr) / H_{v_n}^{(1)}(ka), & r \geq a \\ J_{v_n}(kr) / J_{v_n}(ka), & r \leq a \end{cases}, \quad (21)$$

$$U_N(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos(v_n \varphi) \begin{cases} H_{v_n}^{(1)}(kr) / H_{v_n}^{(1)}(ka), & r \geq a \\ J_{v_n}(kr) / J_{v_n}(ka), & r \leq a \end{cases}. \quad (22)$$

Тут $J_{v_n}(*), H_{v_n}(*)$ - відповідно функції Бесселя і Ганкеля з дробовими індексами. Представлення (21) дає загальний розв'язок крайової задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца (3): $U_D(r, 0) = U_D(r, \gamma) = 0$, а формула (6) дає загальний розв'язок крайової задачі Неймана для цього рівняння: $\partial_\varphi U_N(r, 0) = \partial_\varphi U_N(r, \gamma) = 0$.

Процедура оцінки збіжності рядів (21), (22) тут є суттєво складнішою. Як і у попередньому випадку приймемо, що значення функцій (21), (22) є відомими на поверхні $\{r = a, 0 \leq \varphi \leq \gamma\}$: $U_D(a, \varphi) = f_D(\varphi), U_N(a, \varphi) = f_N(\varphi)$.

Тоді коефіцієнти розкладу визначаються формулами (9), (10). Тепер можемо записати

$$U_D(r, \varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\gamma f_D(\varphi) S_D^N(q, \varphi) d\varphi, \quad (23)$$

де

$$S_D^N(\varphi) = \frac{2}{\gamma} \sum_{n=1}^N q_{v_n} \sin(v_n \varphi), \quad (24)$$

$$q_{v_n} = \begin{cases} H_{v_n}^{(1)}(kr) / H_{v_n}^{(1)}(ka), & r \geq a \\ J_{v_n}(kr) / J_{v_n}(ka), & r \leq a \end{cases}. \quad (25)$$

Тут вираз для коефіцієнтів розкладу q_{v_n} залежить від двох параметрів: r і v_n . Крім того, q_{v_n} при $r > a$ і довільних n є комплексними величинами. Проте, врахувавши асимптотичні властивості функцій Бесселя і Ганкеля при $n \gg 1$ встановлюємо справедливості наступних співвідношень:

$$q_{v_n} = \begin{cases} H_{v_n}^{(1)}(kr) / H_{v_n}^{(1)}(ka), & r \geq a \\ J_{v_n}(kr) / J_{v_n}(ka), & r \leq a \end{cases}. \quad (26)$$

Очевидно, що для будь якого скінченного значення $n=N$, а також параметрів r і a вирази (26) справджуються з певною точністю. Щоб отримати необхідні оцінки

$$H_{v_n}^{(1)}(kr) / H_{v_n}^{(1)}(ka) \approx (a/r)^{v_n} = (q)^{v_n} = (q^{\pi/\gamma})^n, \quad r \geq a, n \gg 1$$

$$J_{v_n}(kr) / J_{v_n}(ka) \approx (r/a)^{v_n} = (q)^{v_n} = (q^{\pi/\gamma})^n, \quad r \leq a, n \gg 1,$$

встановимо максимальну різницю для заданої області зміни параметра r :

$$\max_{n, r \in [a, b]} |H_{v_n}^{(1)}(kr) / H_{v_n}^{(1)}(ka) - (a/r)^{v_n}| = C_{\max}^{(1)} \rightarrow 0,$$

$$\max_{n, r \in [0, a]} |J_{v_n}(kr) / J_{v_n}(ka) - (r/a)^{v_n}| = C_{\max}^{(2)} \rightarrow 0,$$

де $b > a$. Тоді для ряду (24) справедлива оцінка

$$S_D^N(\varphi) = \frac{2}{\gamma} \sum_{n=1}^N q_{v_n} \sin(v_n \varphi) < \frac{2C_{\max}}{\gamma} \sum_{n=1}^N (q^{\pi/\gamma})^n = \frac{2C_{\max}}{\gamma} \frac{q^{\pi/\gamma} [q^{N\pi/\gamma} - 1]}{q^{\pi/\gamma} - 1} \quad (27)$$

де $C_{max} = \max\{C_{max}^1, C_{max}^2\}$ константа незалежна від $N, (q = a/r, r \geq a), (q = \frac{a}{r}r < a)$ Тепер можемо записати залишок ряду (21) так

$$|U_D(r, \varphi) - U_D^N(r, \varphi)| < \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\gamma f_D(\varphi) [S_D^\infty(\varphi) - S_D^N(\varphi)] d\varphi < \frac{2C_{Max} q^{(N+1)\pi/\gamma}}{\gamma(1-q^{\pi/\gamma})} \int_0^\gamma f_D(\varphi) d\varphi, \quad (28)$$

Аналогічну оцінку можемо знайти і для ряду (22):

$$|U_N(r, \varphi) - U_N^N(r, \varphi)| < \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\gamma f_N(\varphi) [S_N^\infty(\varphi) - S_N^N(\varphi)] d\varphi < \frac{2C_{Max} q^{(N+1)\pi/\gamma}}{\gamma(1-q^{\pi/\gamma})} \int_0^\gamma f_N(\varphi) d\varphi, \quad (29)$$

$$S_N^N(\varphi) = \frac{2}{\gamma} \sum_{n=1}^N (q^{\pi/\gamma})^n \cos[(n\pi/\gamma)\varphi] \quad (30)$$

Формули (16), (17) дають можливість просто оцінити кількість необхідних доданків при підсумовуванні відповідно рядів (21), (22).

Висновки: Таким чином формули (28), (29) дають можливість оцінити необхідну кількість доданків для забезпечення заданої точності при підсумовуванні рядів (21), (22), за умови, що значення потенціалів (21), (22) є відомим на поверхні. $\{r = a, 0 \leq \varphi \leq \gamma\}$

Власні функції рівняння Лапласа/Гельмгольца в клиноподібному секторі скінченної ширини

Для побудови розв'язків рівнянь Лапласа/Гельмгольца в скінченному клиноподібному секторі використовують циліндричну систему координат (r, φ, z) . У цій системі координат такий сектор визначимо так

$$K : \{0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi \leq \gamma; 0 \leq z \leq b\}. \quad (31)$$

Рівняння Лапласа/Гельмгольца записуються (2), (3) відповідно. Як у попередньому використаємо метод розділення змінних, записавши шуканий розв'язок цих рівнянь так. $U(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$ Тоді власні функції рівняння Лапласа $R(r), \Phi(\varphi), Z(z)$, знаходимо з розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \left(\lambda_m^2 + \frac{\nu_n^2}{r^2} \right) R = 0, \quad r \in [0, \infty), \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \nu_n^2 \Phi = 0, \quad \varphi \in [0, \gamma]. \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \lambda_m^2 Z = 0, \quad z \in [0, b] \quad (34)$$

Тут ν_n, λ_m - сталі розділення змінних або, іншими словами, власні значення задачі, а відповідні функції $R(r), \Phi(\varphi), Z(z)$, є її власними функціями. Загасаючи на нескінченності і обмежені в нулі розв'язки рівняння Лапласа записуються так:

$$U_D(r, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{mD}(r, \varphi) \sin(\lambda_m z)$$

$$U_{mD}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn} \sin(\nu_n \varphi) \begin{cases} K_{\nu_n}(\lambda_m r) / K_{\nu_n}(\lambda_m a), & r \geq a \\ I_{\nu_n}(\lambda_m r) / I_{\nu_n}(\lambda_m a), & r \leq a \end{cases} \quad (35)$$

$$U_N(r, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{mN}(r, \varphi) \cos(\lambda_m z)$$

$$U_{mN}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn} \cos(\nu_n \varphi) \begin{cases} K_{\nu_n}(\lambda_m r) / K_{\nu_n}(\lambda_m a), & r \geq a \\ I_{\nu_n}(\lambda_m r) / I_{\nu_n}(\lambda_m a), & r \leq a \end{cases}. \quad (36)$$

Тут x_{mn}, y_{mn} - невідомі коефіцієнти розкладу; $I_{\nu_n}(\lambda_m r), K_{\nu_n}(\lambda_m r)$ - модифіковані функції Бесселя і Макдональда; ν_n, λ_m - додатні розв'язки трансцендентних рівнянь $\sin(\nu_n \gamma) = 0$, $\sin(\lambda_m b) = 0$, тобто $\nu_n = n\pi/\gamma$, $\lambda_m = m\pi/b$. Представлення (35) дає загальний розв'язок крайової задачі

© Б.К.Гануліч, О.В.Гуда, Т.А.Крадінова

Діріхле для рівняння Лапласа (2): $U_{mD}(r, 0, z) = U_{mD}(r, \gamma, z) = 0$, $U_{mD}(r, \varphi, 0) = U_{mD}(r, \varphi, b) = 0$, а формула (36) дає загальний розв'язок крайової задачі Неймана для цього рівняння: $\partial_z U_{mN}(r, \varphi, 0) = \partial_z U_{mN}(r, \varphi, b) = 0$. Тригонометричні функції $\sin(v_n \varphi)$, $\cos(v_n \varphi)$, $\sin(\lambda_m z)$, $\cos(\lambda_m z)$ і є власними функціями цих задач і володіють властивістю ортогональності (7), (8), а також

$$\int_0^b \sin(\lambda_n z) \sin(\lambda_m z) dz = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ b/2, & n = m \end{cases}, \quad (37)$$

$$\int_0^b \cos(\lambda_n z) \cos(\lambda_m z) dz = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ b/2, & n = m \end{cases}. \quad (38)$$

Тоді можемо записати:

$$U_{mD}(r, \varphi) = \frac{2}{b} \int_0^b U_D(r, \varphi, z) \sin(\lambda_m z) dz, \quad (39)$$

$$U_{mN}(r, \varphi) = \frac{2}{b} \int_0^b U_N(r, \varphi, z) \cos(\lambda_m z) dz \quad (40)$$

Якщо значення функцій (39) (40) є відомими на поверхні $\{r = a, 0 \leq \varphi \leq \gamma\}$: $U_{mD}(a, \varphi) = f_{mD}(\varphi)$, $U_{mN}(a, \varphi) = f_{mN}(\varphi)$, то коефіцієнтів розкладу визначаються формулами: (9), (10).

Тепер можемо переписати

$$U_{mD}(r, \varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\gamma f_{mD}(\varphi) S_{mD}^N(q, \varphi) d\varphi, \quad (41)$$

$$S_{mD}^N(\varphi) = \frac{2}{\gamma} \sum_{n=1}^N q_{mv_n} \sin(v_n \varphi) \quad (42)$$

$$q_{mv_n} = \begin{cases} K_{v_n}(\lambda_m r) / K_{v_n}(\lambda_m a), & r \geq a \\ I_{v_n}(\lambda_m r) / I_{v_n}(\lambda_m a), & r \leq a \end{cases}. \quad (43)$$

Коефіцієнти розкладу q_{v_n} при $r > a$ і довільних n є комплексними величинами. Для функцій Бесселя і Ганкеля при $n \gg 1$ справедливі наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} K_{v_n}(\lambda_m r) / K_{v_n}(\lambda_m a) &\approx (a/r)^{v_n} = (q)^{v_n} = (q^{\pi/\gamma})^n, \quad r \geq a, \quad n \gg 1 \\ I_{v_n}(\lambda_m r) / I_{v_n}(\lambda_m a) &\approx (r/a)^{v_n} = (q)^{v_n} = (q^{\pi/\gamma})^n, \quad r \leq a, \quad n \gg 1 \end{aligned} \quad (44)$$

Далі встановимо максимальну різницю, коли γ змінюється в скінченній області:

$$\begin{aligned} \max_{m, n, r \in [a, b]} |K_{v_n}(\lambda_m r) / K_{v_n}(\lambda_m a) - (a/r)^{v_n}| &= \bar{C}_{\max}^{(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ \max_{m, n, r \in [0, a]} |I_{v_n}(\lambda_m r) / I_{v_n}(\lambda_m a) - (r/a)^{v_n}| &= \bar{C}_{\max}^{(2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (45)$$

де $b > a$. Тоді для ряду (42) справедлива оцінка

$$S_{mD}^N(\varphi) = \frac{2}{\gamma} \sum_{n=1}^N q_{mv_n} \sin(v_n \varphi) < \frac{2\bar{C}_{\max}}{\gamma} \sum_{n=1}^N (q^{\pi/\gamma})^n = \frac{2\bar{C}_{\max}}{\gamma} \frac{q^{\pi/\gamma} [q^{N\pi/\gamma} - 1]}{q^{\pi/\gamma} - 1}, \quad (46)$$

де $\bar{C}_{\max} = \max\{\bar{C}_{\max}^{(1)}, \bar{C}_{\max}^{(2)}\}$ константа незалежна від N , $q = \begin{cases} a/r, & r \geq a \\ r/a, & r \leq a \end{cases}$

Тепер можемо записати залишок ряду (21) так

$$\begin{aligned} |U_{mD}(r, \varphi) - U_{mD}^N(r, \varphi)| &< \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\gamma f_{mD}(\varphi) [S_{mD}^\infty(\varphi) - S_{mD}^N(\varphi)] d\varphi < \\ &< \frac{2\bar{C}_{\max} q^{(N+1)\pi/\gamma}}{\gamma(1 - q^{\pi/\gamma})} \int_0^\gamma f_{mD}(\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (47)$$

Аналогічну оцінку можемо знайти і для ряду (22):

$$|U_{mN}(r, \varphi) - U_{mN}^N(r, \varphi)| < \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\gamma f_{mN}(\varphi) [S_{mN}^\infty(\varphi) - S_{mN}^N(\varphi)] d\varphi < \frac{2\bar{C}_{Max} q^{(N+1)\pi/\gamma}}{\gamma(1 - q^{\pi/\gamma})} \int_0^\gamma f_{mN}(\varphi) d\varphi, \quad (48)$$

Де $U_{mD}^N(r, \varphi), U_{mN}^N(r, \varphi)$ - ряди (35), (36), в яких враховано N членів.

$$S_{mN}^N(\varphi) = \frac{2}{\gamma} \sum_{n=1}^N q_{mv_n} \cos[(n\pi / \gamma)\varphi] \quad (49)$$

Формули (47), (48) дають можливість оцінити кількість необхідних доданків при підсумовуванні відповідно рядів (35), (36).

Висновки: Таким чином формули (47), (48) дають можливість оцінити необхідну кількість доданків для забезпечення заданої точності при підсумовуванні рядів (35), (36), за умови, що значення потенціалів (39), (40) є відомим на поверхні $\{r = a, 0 \leq \varphi \leq \gamma\}$.

Перейдемо до рівняння Гельмгольца (3). Застосовуючи метод розділення змінних, знаходимо

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + \left((k^2 - \lambda_m^2) - \frac{v_n^2}{r^2} \right) R = 0, \quad r \in [0, \infty), \quad (50)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + v_n^2 \Phi = 0, \quad \varphi \in [0, \gamma], \quad (51)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \lambda_m^2 Z = 0, \quad z \in [0, b]. \quad (52)$$

Враховуючи, що рівняння (32) визначає функції Бесселя, згасаючі на нескінченності і обмежені в нулі розв'язки рівняння Гельмгольца (3) записуються так:

$$U_D(r, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{mD}(r, \varphi) \sin(\lambda_m z)$$

$$U_{mD}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn} \sin(v_n \varphi) \begin{cases} H_{v_n}^{(1)}(\kappa_m r) / H_{v_n}^{(1)}(\kappa_m a), & r \geq a \\ J_{v_n}(\kappa_m r) / J_{v_n}(\kappa_m a), & r \leq a \end{cases} \quad (53)$$

$$U_N(r, \varphi, z) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{mN}(r, \varphi) \sin(\lambda_m z)$$

$$U_{mN}(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn} \sin(v_n \varphi) \begin{cases} H_{v_n}^{(1)}(\kappa_m r) / H_{v_n}^{(1)}(\kappa_m a), & r \geq a \\ J_{v_n}(\kappa_m r) / J_{v_n}(\kappa_m a), & r \leq a \end{cases} \quad (54)$$

Тут $k_m = \sqrt{k^2 - \lambda_m^2}$. Представлення (21) дає загальний розв'язок крайової задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца (3): $U_D(r, 0) = U_D(r, \gamma) = 0$, а формула (6) дає загальний розв'язок крайової задачі Неймана для цього рівняння: $\partial_\varphi U_N(r, 0) = \partial_\varphi U_N(r, \gamma) = 0$.

Як і у попередньому випадку прийемо, що значення функцій (53), (54) є відомими на поверхні $\{r = a, 0 \leq \varphi \leq \gamma\}$ $U_{mD}(a, \varphi) = f_{mD}(\varphi)$, $U_{mN}(a, \varphi) = f_{vN}(\varphi)$. Тоді коефіцієнти розкладу визначаються формулами (8), (9). Тепер можемо записати

$$U_{mD}(r, \varphi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\gamma f_{mD}(\varphi) S_{mD}^N(\varphi) d\varphi, \quad (55)$$

де

$$S_D^N(\varphi) = \frac{2}{\gamma} \sum_{n=1}^N q_{v_n} \sin(v_n \varphi), \quad (56)$$

$$q_{v_n} = \begin{cases} H_{v_n}^{(1)}(\kappa_m r) / H_{v_n}^{(1)}(\kappa_m a), & r \geq a \\ J_{v_n}(\kappa_m r) / J_{v_n}(\kappa_m a), & r \leq a \end{cases} \quad (57)$$

Тут вираз для коефіцієнти розкладу q_{r_n} залежить від двох параметрів: r і v_n . Крім того, q_{r_n} при $r > a$ і довільних n є комплексними величинами. Проте, врахувавши асимптотичні властивості функцій Бесселя і Ганкеля при $n \gg 1$ встановлюємо справедливості наступних співвідношень:

$$H_{v_n}^{(1)}(\kappa_m r) / H_{v_n}^{(1)}(\kappa_m a) \approx (a/r)^{v_n} = (q)^{v_n} = (q^{\pi/\gamma})^n, \quad r \geq a, \quad n \gg 1$$

$$J_{v_n}(\kappa_m r) / J_{v_n}(\kappa_m a) \approx (r/a)^{v_n} = (q)^{v_n} = (q^{\pi/\gamma})^n, \quad r \leq a, \quad n \gg 1 \quad (58)$$

Очевидно, що для будь якого скінченного значення $n=N$, а також параметрів r і a вирази (58) справджуються з певною точністю. Щоб отримати необхідні оцінки точності, встановимо максимальну різницю для заданої області зміни параметра r :

$$\max_{n,r \in [a,b]} |H_{v_n}^{(1)}(\kappa_m r) / H_{v_n}^{(1)}(\kappa_m a) - (a/r)^{v_n}| = \tilde{C}_{\max}^{(1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

$$\max_{n,r \in [0,a]} |J_{v_n}(\kappa_m r) / J_{v_n}(\kappa_m a) - (r/a)^{v_n}| = \tilde{C}_{\max}^{(2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

де $b > a$. Тоді для ряду (24) справедлива оцінка

$$S_{mD}^N(\varphi) = \frac{2}{\gamma} \sum_{n=1}^N q_{v_n} \sin(v_n \varphi) < \frac{2\tilde{C}_{\max}}{\gamma} \sum_{n=1}^N (q^{\pi/\gamma})^n = \frac{2\tilde{C}_{\max}}{\gamma} \frac{q^{\pi/\gamma} [q^{N\pi/\gamma} - 1]}{q^{\pi/\gamma} - 1}, \quad (59)$$

де $\tilde{C}_{\max} = \max\{\tilde{C}_{\max}^{(1)}, \tilde{C}_{\max}^{(2)}\}$ константа незалежна від N , $q = \begin{cases} a/r, & r \geq a \\ r/a, & r \leq a \end{cases}$

Тепер можемо записати залишок ряду (53) так

$$\begin{aligned} |U_{mD}(r, \varphi) - U_{mD}^N(r, \varphi)| &< \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\gamma f_{mD}(\varphi) [S_{mD}^\infty(\varphi) - S_{mD}^N(\varphi)] d\varphi < \\ &< \frac{2\tilde{C}_{\max} q^{(N+1)\pi/\gamma}}{\gamma(1 - q^{\pi/\gamma})} \int_0^\gamma f_{mD}(\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (60)$$

Аналогічну оцінку можемо знайти і для ряду (54):

$$\begin{aligned} |U_{mN}(r, \varphi) - U_{mN}^N(r, \varphi)| &< \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\gamma f_{mN}(\varphi) [S_{mN}^\infty(\varphi) - S_{mN}^N(\varphi)] d\varphi < \\ &< \frac{2\tilde{C}_{\max} q^{(N+1)\pi/\gamma}}{\gamma(1 - q^{\pi/\gamma})} \int_0^\gamma f_{mN}(\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (61)$$

Де

$$S_{mN}^N(\varphi) = \frac{2}{\gamma} \sum_{n=1}^N (q^{\pi/\gamma})^n \cos[(n\pi/\gamma)\varphi] \quad (62)$$

Таким чином формули (60), (61) дають можливість оцінити необхідну кількість доданків для забезпечення заданої точності при підсумовуванні рядів (53), (54), за умови, що значення потенціалів (56), (57) є відомим на поверхні $\{r = a, 0 \leq \varphi \leq \gamma\}$.

ВИСНОВКИ

Розв'язано рівняння Лапласа/Гельмгольца для клиноподібних областей, а саме: у клиноподібному секторі скінченної ширини та у скінченному секторі скінченної протяжності. Розв'язки представлені у вигляді рядів по функціях Бесселя. Отримано формули оцінки необхідної кількості доданків відповідного ряду для забезпечення заданої точності обчислень.

Список використаних джерел

1. Маркович Б. М. Рівняння математичної фізики : навч. посіб. Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2010. 384 с.
2. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. Київ: Либідь, 2006. 363 с.

Рецензент: Мікуліч О.А., д.т.н., професор кафедри штучного інтелекту та математичного моделювання