

Ю. С. Крутій, М. Г. Сур'янінов, А. О. Перпері, В. В. Вакуленко, В. М. Мітінський

Одеська державна академія будівництва та архітектури

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ НА ЗГИН БАЛОК ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ НА НЕОДНОРІДНІЙ ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Розроблено аналітичний метод розрахунку балок довільної неперервної змінної жорсткості, що опираються на неоднорідну суцільну пружну основу Вінклера. Неоднорідність основи характеризується змінним погонним коефіцієнтом постелі, який може являти собою будь-яку неперервну функцію. Метод ґрунтується на точному розв'язку відповідного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами. В замкненій формі наведено розрахункові формули для параметрів напружено-деформованого стану балки. Наведено розрахунок на згин бетонної балки у вигляді зрізаного клину, що опирається на експоненціально-змінну пружну основу.

Ключові слова: балка, змінна жорсткість, неоднорідна основа, гіпотеза Вінклера, аналітичний метод.

Yu. S. Krutii, M. H. Surianinov, A. O. Perperi, V. V. Vakulenko, V. M. Mytynskiy

ANALYTICAL METHOD FOR CALCULATING BENDING OF BEAMS OF VARIABLE STIFFNESS ON A NON-UNIFORM ELASTIC FOUNDATION

An analytical method for calculating beams of arbitrary continuous variable stiffness supported on a non-uniform continuous elastic Winkler foundation has been developed. The classical problem of calculating the bending of beams of constant stiffness supported on a constant elastic Winkler foundation is well studied. However, the assumption of the homogeneity of the foundation is far from reality and for more qualitative studies it is necessary to take into account the heterogeneity (variability) of the foundation. In this case, the bed coefficient will be variable along the beam axis, which significantly complicates the solution of the corresponding differential equation. The problem becomes even more complicated when not only the bed coefficient, but also the stiffness of the beam is variable. This is the case that this article is devoted to. The heterogeneity of the foundation is characterized by a variable linear bed coefficient, which can be any continuous function. The method is based on the exact solution of the corresponding differential equation with variable coefficients. In closed form, calculation formulas for the parameters of the stress-strain state of the beam are given. The calculation for the bending of a concrete beam in the form of a truncated wedge resting on an exponentially varying elastic base is given.

Keywords: beam, variable stiffness, inhomogeneous foundation, Winkler hypothesis, analytical method.

Постановка проблеми. Конструкція, що являє собою балку на пружній основі, часто застосовується в інженерній практиці, в тому числі, в промисловому та цивільному будівництві, в залізничній галузі, гідротехніці, кораблебудуванні, аерокосмічній техніці та інших. З числа існуючих моделей основи широкого поширення набула так звана модель Вінклера. У цій моделі пружна основа, на яку опирається конструкція, представляється у вигляді набору вертикальних, близько розташованих, не пов'язаних між собою пружин. Таку ситуацію загалом можна описати єдиним параметром, який називають модулем пружності основи чи коефіцієнтом постелі. У найпростішому випадку, коли основа вважається однорідною, коефіцієнт постелі є сталим. Класична задача про розрахунок на згин балок сталої жорсткості, що опираються на сталу пружну основу Вінклера, загалом добре вивчена. Застосування відповідних розв'язків в інженерній практиці не викликає труднощів.

Однак припущення про однорідність основи далеке від реальності і для більш якісних досліджень необхідно враховувати неоднорідність (змінність) основи [1]. В такому випадку коефіцієнт постелі буде змінним уздовж осі балки, що суттєво ускладнює розв'язання відповідного диференціального рівняння. Такому випадку присвячені роботи авторів [2-5]. Задача стає ще більш складною, коли не тільки коефіцієнт постелі, а й жорсткість балки є змінною. Саме такому випадку присвячено дану публікацію.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Серед публікацій, присвячених згину балки змінної жорсткості на пружній основі, відзначимо роботи [6-13]. У статті [6] розглядається напіваналітична процедура для помірно великих прогинів нескінченної неоднорідної статичної балки, що спирається на нелінійну пружну основу. Запропонований тут метод є функціонально-ітераційною процедурою, не тільки досить простою, але й легкою у застосуванні. У статті [7] пропонується новий функціонально-ітераційний метод для статичного аналізу балок як загальний підхід до змінного поперечного перерізу балки. Наведено ілюстративний приклад для перевірки достовірності запропонованого методу. У статті [8] представлено розв'язок граничного інтегрального рівняння для нелінійної задачі неоднорідних балок, що спираються на нелінійну трипараметричну пружну основу. Кілька балок аналізуються за різних граничних умов та розподілів

© Ю. С. Крутій, М. Г. Сур'янінов, А. О. Перпері, В. В. Вакуленко, В. М. Мітінський

навантаження. В роботі [9] розглядається балка змінного перерізу, що опирається на пружну основу, що характеризується двома коефіцієнтами постелі. Для розрахунку тут використовується метод апроксимації розв'язку степеневою функцією. Ефективність методу підтверджено тестовими прикладами. У роботі [10] розглядається робота залізобетонної балки, що лежить на пружному фундаменті, деформаційні характеристики якої описуються моделлю з двома коефіцієнтами постелі Власова-Пастернака. Для розв'язання диференціального рівняння тут застосовується варіаційний метод. Робота [11] присвячена дослідженню коливань балки Ейлера, що опирається на пружну основу. Припускається, що балка має змінну жорсткість уздовж довжини. Тут використовується метод гомотопічних збурень, який дозволяє створити в якості розв'язку наближений аналітичний вираз. Автори приходять до висновку, що вказаний підхід є перспективним методом дослідження коливань балок змінної жорсткості на пружній основі. У статті [12] досліджено згинальний стан залізобетонної балки зі змінною висотою поперечного перерізу по довжині, що спирається по всій довжині на цегляну основу. Жорсткість такої балки є неперервною змінною функцією. Балка знаходиться під впливом довільно розташованих зосереджених сил. Вихідне рівняння згину розв'язується методом скінченних різниць. В публікації [13] в якості методу дослідження також вибрано метод скінченних різниць. Тут наводяться практичні приклади розрахунку для балок змінної жорсткості.

Щодо публікацій, присвячених розрахунку балок сталої жорсткості на змінній пружній основі, то їх детальний огляд надано в роботах авторів [2-5]. В цих публікаціях розроблено відповідний аналітичний метод та розглянуто приклади його застосування. Зокрема, наведено розрахунки, коли змінний коефіцієнт постелі, який характеризує неоднорідність основи, задається степеневим, параболічним та експоненціальним законами.

Як показує аналіз публікацій, розробка нового аналітичного методу розрахунку на згин балок змінної жорсткості, що опираються на неоднорідну пружну основу, є актуальною.

Постановка завдань. Метою роботи є розробка аналітичного методу розрахунку балки на пружній основі, коли згинальна жорсткість та коефіцієнт постелі пружної основи являють собою будь-які неперервні функції.

Викладення основного матеріалу. Об'єктом дослідження є балка з довільною неперервною змінною згинальною жорсткістю $E(x)I(x)$, що опирається на суцільну неоднорідну пружну основу, для якої прийнято гіпотезу Вінклера. На рис. 1 представлено розрахункову схему балки, де $q(x)$ – задане розподілене змінне поперечне навантаження, $y(x)$ – прогин (просадка основи), $\varphi(x)$ – кут повороту. На рис. 2 показані внутрішні зусилля, які виникають у поперечних перерізах балки, а саме, згинальний момент $M(x)$ і поперечна сила $Q(x)$.

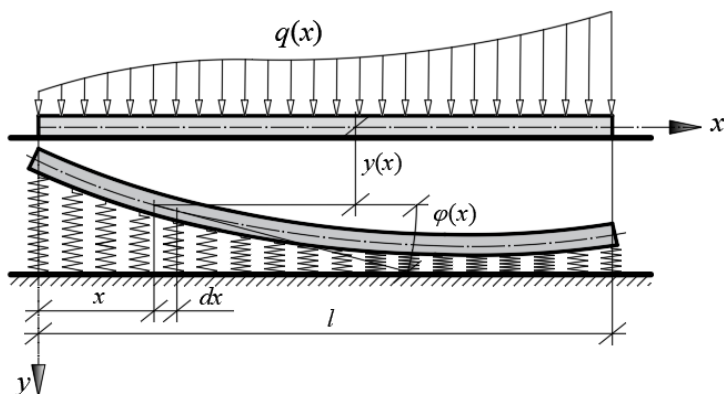


Рис. 1. Calculation diagram of the beam

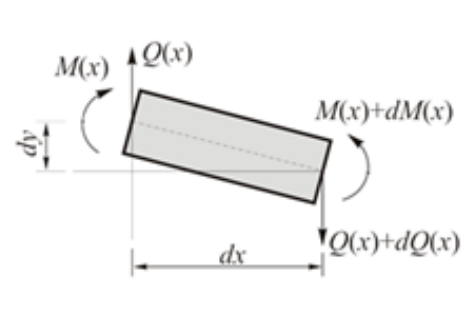


Рис. 2. Internal forces

Напружено-деформований стан балки характеризується переміщеннями $y(x)$, $\varphi(x)$ та зусиллями $M(x)$, $Q(x)$. В подальшому будемо називати їх параметрами стану балки.

Для згинальної жорсткості приймаємо форму запису: $E(x)I(x) = E_0 I_0 A(x)$, де $E_0 I_0$ – жорсткість в певній характерній точці балки (наприклад, в точці $x=0$), $A(x)$ – безрозмірна неперервна функція, що виражає закон зміни жорсткості уздовж довжини балки. Аналогічне подання запишемо також для навантаження: $q(x) = q_0 C(x)$, де q_0 – інтенсивність навантаження в

деякій характерній точці балки; $C(x)$ – безрозмірна неперервна функція, яка визначає закон зміни інтенсивності навантаження від координати x .

При розрахунках балок, що опираються на пружну основу, оперують такими поняттями, як погонний коефіцієнт постелі $k(x)$ та коефіцієнт постелі пружної основи $k^*(x)$, які характеризують її жорсткість. Вказані коефіцієнти, які в загальному випадку вважаємо змінними, пов'язані між собою співвідношенням $k(x) = b(x)k^*(x)$, де $b(x)$ – ширина балки в точці x .

У відповідності з гіпотезою Вінклера, реакція основи на балку $R(x)$ в довільній точці x пропорційна прогину $y(x)$ з коефіцієнтом пропорційності $k(x)$, $k(x) \geq 0$, тобто $R(x) = -k(x)y(x)$. Знак мінус тут означає, що реакція протилежна напрямку просадки основи. Надалі будемо вважати $k(x)$ довільною неперервною функцією, для якої приймаємо подання: $k(x) = k_0B(x)$, де k_0 – значення погонного коефіцієнту постелі у деякій характерній точці балки (наприклад, в точці $x = 0$); $B(x)$ – безрозмірна неперервна функція, що виражає закон зміни погонного коефіцієнту постелі уздовж довжини балки.

Диференціальне рівняння згину балки [14] у нашому випадку набуває вигляду

$$E_0I_0(A(x)y''(x))'' + k_0B(x)y(x) = q_0C(x). \quad (1)$$

Після знаходження з цього рівняння функції прогинів $y(x)$, решта параметрів стану знайдуться за допомогою диференціальних залежностей, відомих з теорії згину балок:

$$\varphi(x) = y'(x); M(x) = -E_0I_0A(x)y''(x); Q(x) = -E_0I_0(A(x)y''(x))'. \quad (2)$$

Рівняння (1) належить до класу звичайних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Знаходження загальних інтегралів для таких рівнянь є складною математичною проблемою. Як зазначається в монографії [14, с. 203], отримати розв'язок рівняння (1) в замкнутій формі вдається тільки в деяких окремих випадках. Наша мета – виписати точний розв'язок рівняння (1) для довільних неперервних функцій жорсткості, погонного коефіцієнту постелі та навантаження.

Точний розв'язок диференціального рівняння згину та формули параметрів стану балки

Для розв'язання рівняння (1) застосуємо метод прямого інтегрування, який було розвинуто у низці робіт [15-18].

Окрім рівняння (1), також розглядатимемо рівносильну йому систему диференціальних рівнянь. В якості вектору невідомих системи приймемо вектор, компонентами якого будуть виступати параметри стану балки

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ \varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ -E_0I_0A(x)y''(x) \\ -E_0I_0(A(x)y''(x))' \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В такому разі, внаслідок (1), (2), система запишеться у вигляді

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = H(x)\Phi(x) - f(x), \quad (4)$$

де

$$H(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/(E_0I_0A(x)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_0B(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_0C(x) \end{pmatrix}.$$

В подальшому, окрім неоднорідного рівняння (1), будемо оперувати відповідним йому однорідним рівнянням

$$E_0I_0(A(x)y''(x))'' + k_0B(x)y(x) = 0, \quad (5)$$

а також рівносильною йому однорідною системою диференціальних рівнянь

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = H(x)\Phi(x). \quad (6)$$

Позначимо через $X_n(x)$ ($n=1,2,3,4$) шукані безрозмірні фундаментальні розв'язки однорідного рівняння (5), а через

$$X^*(x) = \frac{q_0 l^4}{E_0 I_0} X_5(x) \quad (7)$$

частинний розв'язок неоднорідного рівняння (1), де $X_5(x)$ – невідома безрозмірна функція. Функції $X_n(x)$ ($n=1,2,3,4,5$) будемо шукати у вигляді рядів по степеням безрозмірного параметру $-K$ з невідомими змінними коефіцієнтами

$$X_n(x) = \beta_{n,0}(x) - K\beta_{n,1}(x) + K^2\beta_{n,2}(x) - K^3\beta_{n,3}(x) + \dots \quad (n=1,2,3,4,5), \quad (8)$$

де $K = k_0 l^4 / (E_0 I_0)$. Згідно з термінологією, яка прийнята в [19], функції $\beta_{n,0}(x)$ називатимемо початковими, а $\beta_{n,k}(x)$ ($k=1,2,3,\dots$) – твірними.

Поки припускаємо, що ряди (8), а також аналогічні ряди, створені із перших чотирьох похідних функцій $\beta_{n,0}(x)$, $\beta_{n,k}(x)$ ($k=1,2,3,\dots$), рівномірно збігаються. В такому разі буде можливою операція диференціювання рядів.

Початкові та твірні функції будемо шукати із умов, що за визначенням $X_n(x)$ ($n=1,2,3,4$) повинні задовольняти однорідне рівняння (5), а $X^*(x)$ – неоднорідне рівняння (1). Зважаючи на (7), зазначені умови у вигляді рівностей запишуться так:

$$(A(x)X_n''(x))'' + \frac{K}{l^4} B(x)X_n(x) = 0 \quad (n=1,2,3,4); \quad (9)$$

$$(A(x)X_5''(x))'' + \frac{K}{l^4} B(x)X_5(x) = \frac{1}{l^4} C(x). \quad (10)$$

Підставляючи в (9), (10) замість $X_n(x)$ ($n=1,2,3,4,5$) їх значення (8), після перетворень, отримаємо:

$$(A(x)\beta_{n,0}''(x))'' + \sum_{k=1}^{\infty} (-K)^k \left((A(x)\beta_{n,k}''(x))'' - \frac{1}{l^4} B(x)\beta_{n,k-1}(x) \right) = 0 \quad (n=1,2,3,4);$$

$$(A(x)\beta_{5,0}''(x))'' - \frac{1}{l^4} C(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (-K)^k \left((A(x)\beta_{5,k}''(x))'' - \frac{1}{l^4} B(x)\beta_{5,k-1}(x) \right) = 0.$$

Звідси, прирівнюючи до нуля всі коефіцієнти при степенях параметра $-K$, включно з нульовим степенем, приходимо до наступних диференціальних рівнянь відносно початкових та твірних функцій:

$$(A(x)\beta_{n,0}''(x))'' = 0 \quad (n=1,2,3,4); \quad (11)$$

$$(A(x)\beta_{5,0}''(x))'' = \frac{1}{l^4} C(x); \quad (12)$$

$$(A(x)\beta_{n,k}''(x))'' = \frac{1}{l^4} B(x)\beta_{n,k-1}(x) \quad (n=1,2,3,4,5) (k=1,2,3,\dots), \quad (13)$$

Долучимо до даних рівнянь такі граничні умови:

$$\begin{pmatrix} \beta_{1,0}(0) & \beta_{2,0}(0) & \beta_{3,0}(0) & \beta_{4,0}(0) \\ \beta'_{1,0}(0) & \beta'_{2,0}(0) & \beta'_{3,0}(0) & \beta'_{4,0}(0) \\ \beta''_{1,0}(0) & \beta''_{2,0}(0) & A(0)\beta''_{3,0}(0) & A(0)\beta''_{4,0}(0) \\ \beta'''_{1,0}(0) & \beta'''_{2,0}(0) & (A(0)\beta'''_{3,0}(0))' & (A(0)\beta'''_{4,0}(0))' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/l^3 \end{pmatrix}; \quad (14)$$

$$\beta_{5,0}(0) = \beta'_{5,0}(0) = A(0)\beta''_{5,0}(0) = (A(0)\beta'''_{5,0}(0))' = 0; \quad (15)$$

$$\beta_{n,k}(0) = \beta'_{n,k}(0) = A(0)\beta''_{n,k}(0) = (A(0)\beta'''_{n,k}(0))' = 0 \quad (n=1,2,3,4,5) (k=1,2,3,\dots). \quad (16)$$

В підсумку, після інтегрування рівнянь (11)-(13) з урахуванням заданих граничних умов, матимемо наступну сукупність формул:

$$\beta_{n,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \quad (n = 1, 2); \quad (17)$$

$$\beta_{n,0}(x) = \frac{1}{l^2} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \left(\frac{x}{l}\right)^{n-3} dx dx \quad (n = 3, 4); \quad (18)$$

$$\beta_{5,0}(x) = \frac{1}{l^4} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x \int_0^x C(x) dx dx dx dx; \quad (19)$$

$$\beta_{n,k}(x) = \frac{1}{l^4} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x \int_0^x B(x) \beta_{n,k-1}(x) dx dx dx dx \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5) (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (20)$$

Окрім рекурентної форми (20), твірні функції можна подати також в аналітичному вигляді

$$\beta_{n,k}(x) = \frac{1}{l^{4k}} \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x \int_0^x B(x) \dots \int_0^x \int_0^x \frac{1}{A(x)} \int_0^x \int_0^x B(x) \beta_{n,0}(x) dx dx dx dx \dots dx dx \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (21)$$

Права частина останньої формули містить всього $4k$ інтегралів, без урахування інтегралів, через які виражені початкові функції (18) та (19).

Таким чином, за допомогою рекурентної формули (20), для кожної з початкових функцій (17)-(19) знаходяться відповідні твірні функції. Очевидно, для таких функцій рівності (9), (10) задовольняються тотожно.

Тепер, коли початкові та твірні функції $\beta_{n,0}(x)$, $\beta_{n,k}(x)$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) ($k = 1, 2, 3, \dots$) визначені, необхідно довести, що ряди (8) збігаються. Наведемо доказ збіжності, наприклад, для перших двох рядів, які визначені формулами (8). Позначивши

$$h = \max_{x \in [0, l]} \frac{1}{A(x)}, \quad g = \max_{x \in [0, l]} B(x),$$

та використовуючи формулу (20), отримаємо наступні оцінки для твірних функцій:

$$\beta_{n,k}(x) \leq \frac{(hg)^k}{(n + 4k - 1)!} \left(\frac{x}{l}\right)^{n+4k-1} \quad (n = 1, 2) (k = 1, 2, 3, \dots).$$

За допомогою даних оцінок, будемо мати

$$|X_n(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} K^k \beta_{n,k}(x) \leq \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(hgK)^k}{(n + 4k - 1)!} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(hgK)^k}{(n + 4k - 1)!} \quad (n = 1, 2).$$

Звідси знаходимо:

$$|X_1(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(hgK)^k}{(4k)!} = \frac{1}{2} (\cos \sqrt[4]{hgK} + \operatorname{ch} \sqrt[4]{hgK});$$

$$|X_2(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(hgK)^k}{(4k+1)!} = \frac{1}{2\sqrt[4]{hgK}} (\sin \sqrt[4]{hgK} + \operatorname{sh} \sqrt[4]{hgK}).$$

Як видно, в ролі мажорант тут виступають константи, які виражаються через значення тригонометричних та гіперболічних функцій. Тим самим доведено, що ряди (8) для значень $n = 1, 2$ збігаються абсолютно і рівномірно. Аналогічно доводиться збіжність для решти рядів.

Таким чином, формулами (7), (8), (17)-(21) повністю визначені чотири розв'язки $X_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, 4$) однорідного рівняння (5) та частинний розв'язок $X^*(x)$ неоднорідного рівняння (1).

Кожен з розв'язків $X_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, 4$) породжує по формулі (3) вектор

$$\Phi_n(x) = \begin{pmatrix} X_n(x) \\ X_n'(x) \\ -E_0 I_0 A(x) X_n''(x) \\ -(E_0 I_0 A(x) X_n'''(x))' \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, 4)$$

розв'язок однорідної системи диференціальних рівнянь (6), в чому легко переконатись підстановкою. Тоді матриця

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} X_1(x) & X_2(x) & X_3(x) & X_4(x) \\ X_1'(x) & X_2'(x) & X_3'(x) & X_4'(x) \\ -E_0 I_0 A(x) X_1''(x) & -E_0 I_0 A(x) X_2''(x) & -E_0 I_0 A(x) X_3''(x) & -E_0 I_0 A(x) X_4''(x) \\ -E_0 I_0 (A(x) X_1''(x))' & -E_0 I_0 (A(x) X_2''(x))' & -E_0 I_0 (A(x) X_3''(x))' & -E_0 I_0 (A(x) X_4''(x))' \end{pmatrix}, \quad (22)$$

яка утворена з даних векторів також задовольнятиме однорідній системі (6). При цьому, з урахуванням (14)-(16), знаходимо

$$\Omega(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_0 I_0 / l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_0 I_0 / l^3 \end{pmatrix}; \quad |\Omega(0)| = \frac{(E_0 I_0)^2}{l^6} \neq 0.$$

Отже, матриця (22) є фундаментальною матрицею [20] системи (6), а $X_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, 4$) – фундаментальні розв'язки однорідного рівняння (5).

Помноживши праворуч $\Omega(x)$ на сталу матрицю $\Omega^{-1}(0)$ отримаємо нову фундаментальну матрицю $\Lambda(x) = \Omega(x)\Omega^{-1}(0)$, яка в точці $x = 0$ дорівнюватиме одиничній матриці

$$\Lambda(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Як відомо [20], фундаментальна матриця, яка задовольняє умові (23), визначається однозначно й називається матрицантом. Загальний розв'язок однорідної системи (6) за допомогою матрицанта запишеться у вигляді $\Phi(x) = \Lambda(x)\Phi(0)$.

Сформувавши за допомогою частинного розв'язку (7) вектор

$$\Phi^*(x) = \frac{q_0 l^4}{E_0 I_0} \begin{pmatrix} X_5(x) \\ X_5'(x) \\ -E_0 I_0 A(x) X_5''(x) \\ -E_0 I_0 (A(x) X_5''(x))' \end{pmatrix},$$

отримаємо частинний розв'язок неоднорідної системи (4), в чому можна переконатись підстановкою. Враховуючи (15), (16), для даного вектору також знаходимо

$$\Phi^*(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідної системи диференціальних рівнянь (4) запишеться наступним чином

$$\Phi(x) = \Lambda(x)\Phi(0) + \Phi^*(x). \quad (24)$$

Поставимо собі за мету виразити підсумкові формули для параметрів стану балки через безрозмірні функції. Такий підхід дасть можливість в подальшому при чисельних розрахунках оперувати безрозмірними величинами.

Аналізуючи формули (17)-(21), на підставі результатів роботи [19], заключаємо, що початкові та твірні функції $\beta_{n,0}(x)$, $\beta_{n,k}(x)$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) ($k = 1, 2, 3, \dots$) є безрозмірними. Як наслідок, функції $X_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) також будуть безрозмірними.

Перед тим, як записати формулу (24) у розгорнутому вигляді, введемо до розгляду наступні функції:

$$\tilde{X}_n(x) = l X_n'(x); \quad \hat{X}_n(x) = l^2 A(x) X_n''(x); \quad \hat{X}_n(x) = l^3 (A(x) X_n''(x))' \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5). \quad (25)$$

Безпосередньо з (8) та (25) випливає, що дані функції визначатимуться такими рядами:

$$\tilde{X}_n(x) = \tilde{\beta}_{n,0}(x) - K \tilde{\beta}_{n,1}(x) + K^2 \tilde{\beta}_{n,2}(x) - K^3 \tilde{\beta}_{n,3}(x) + \dots \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5); \quad (26)$$

$$\widehat{X}_n(x) = \widehat{\beta}_{n,0}(x) - K\widehat{\beta}_{n,1}(x) + K^2\widehat{\beta}_{n,2}(x) - K^3\widehat{\beta}_{n,3}(x) + \dots \quad (n=1,2,3,4,5); \quad (27)$$

$$\widehat{X}_n(x) = \widehat{\beta}_{n,0}(x) - K\widehat{\beta}_{n,1}(x) + K^2\widehat{\beta}_{n,2}(x) - K^3\widehat{\beta}_{n,3}(x) + \dots \quad (n=1,2,3,4,5), \quad (28)$$

де

$$\widetilde{\beta}_{n,0}(x) = l\beta'_{n,0}(x), \quad \widehat{\beta}_{n,0}(x) = l^2 A(x)\beta''_{n,0}(x), \quad \widehat{\beta}_{n,0}(x) = l^3(A(x)\beta''_{n,0}(x))', \quad (29)$$

$$\widetilde{\beta}_{n,k}(x) = l\beta'_{n,k}(x), \quad \widehat{\beta}_{n,k}(x) = l^2 A(x)\beta''_{n,k}(x), \quad \widehat{\beta}_{n,k}(x) = l^3(A(x)\beta''_{n,k}(x))' \quad (k=1,2,3\dots). \quad (30)$$

Функції (29) тут виступають в ролі початкових, а функції (30) – в ролі твірних для відповідних рядів (26)-(28).

На відміну від похідних функцій $X_n(x)$ ($n=1,2,3,4,5$), функції (25) будуть безрозмірними [19]. Надалі $\widetilde{X}_n(x)$, $\widehat{X}_n(x)$, $\widehat{X}_n(x)$ ($n=1,2,3,4,5$) будемо називати безрозмірними похідними.

Записуючи тепер матричну рівність (24) у розгорнутому вигляді та враховуючи (25), матимемо наступні формули для параметрів стану балки:

$$y(x) = y(0)X_1(x) + \varphi(0)lX_2(x) - M(0)\frac{l^2}{E_0I_0}X_3(x) - Q(0)\frac{l^3}{E_0I_0}X_4(x) + \frac{q_0l^4}{E_0I_0}X_5(x); \quad (31)$$

$$\varphi(x) = y(0)\frac{1}{l}\widetilde{X}_1(x) + \varphi(0)\widetilde{X}_2(x) - M(0)\frac{l}{E_0I_0}\widetilde{X}_3(x) - Q(0)\frac{l^2}{E_0I_0}\widetilde{X}_4(x) + \frac{q_0l^3}{E_0I_0}\widetilde{X}_5(x); \quad (32)$$

$$M(x) = -y(0)\frac{E_0I_0}{l^2}\widehat{X}_1(x) - \varphi(0)\frac{E_0I_0}{l}\widehat{X}_2(x) + M(0)\widehat{X}_3(x) + Q(0)l\widehat{X}_4(x) - q_0l^2\widehat{X}_5(x); \quad (33)$$

$$Q(x) = -y(0)\frac{E_0I_0}{l^3}\widehat{X}_1(x) - \varphi(0)\frac{E_0I_0}{l^2}\widehat{X}_2(x) + M(0)\frac{1}{l}\widehat{X}_3(x) + Q(0)\widehat{X}_4(x) - q_0l\widehat{X}_5(x). \quad (34)$$

Отже, можемо констатувати, що для довільних неперервних функцій згинальної жорсткості, навантаження та погонного коефіцієнту постелі отримано формули для параметрів стану балки (31)-(34). Однак обчислення за цими формулами будуть можливі тільки після визначення невідомих початкових параметрів $y(0)$, $\varphi(0)$, $M(0)$, $Q(0)$. У кожному конкретному випадку ці невідомі визначаються з умов закріплення кінців балки.

Подання початкових та твірних функцій степеневими рядами

Слід зазначити, що при чисельній реалізації формул для параметрів стану балки на практиці можуть виникати труднощі, пов'язані з необхідністю обчислення інтегральних виразів (18)-(21), якими визначаються початкові та твірні функції. Отримати в явному вигляді формули для вказаних функцій порівняно просто можна тільки в деяких окремих випадках. Натомість у переважній більшості випадків обчислення інтегралів (18)-(21) буде являти собою досить складне завдання, навіть коли вони виражаються через елементарні функції. Окрім того, як відомо, інтеграли від деяких функцій взагалі можуть не виражатись через елементарні функції. Сказане може слугувати перешкодою на шляху широкого застосування отриманих формул в інженерній практиці. Тому постає актуальне питання щодо подання початкових та твірних функцій у вигляді формул, більш зручних для практичної реалізації.

Як відомо, один з класичних методів інтегрування ґрунтується на заміні підінтегральної функції відповідним їй рядом Маклорена. У нашому випадку такий підхід дозволяє обчислити інтеграли (18)-(21) в аналітичному вигляді.

Відтак, будемо вважати, що безрозмірні функції $f(x) = 1/A(x)$, $B(x)$ та $C(x)$ подані у вигляді степеневих рядів:

$$f(x) = A_0 + A_1\left(\frac{x}{l}\right) + A_2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + A_j\left(\frac{x}{l}\right)^j + \dots; \quad (35)$$

$$B(x) = B_0 + B_1\left(\frac{x}{l}\right) + B_2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + B_j\left(\frac{x}{l}\right)^j + \dots; \quad (36)$$

$$C(x) = C_0 + C_1\left(\frac{x}{l}\right) + C_2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \dots + C_j\left(\frac{x}{l}\right)^j + \dots \quad (37)$$

У загальному випадку безрозмірні коефіцієнти даних рядів визначаються за формулами

$$A_0 = \frac{1}{A(0)}, A(0) \neq 0, A_j = \frac{l^j f^{(j)}(0)}{j!}, B_0 = B(0), B_j = \frac{l^j B^{(j)}(0)}{j!},$$

$$C_0 = C(0), C_j = \frac{l^j C^{(j)}(0)}{j!} \quad (j=1,2,3,\dots),$$
(38)

де індекс (j) означає порядок похідної. Однак, для визначення вказаних коефіцієнтів зручніше користуватись не загальними формулами (38), а виходячи з відомих рядів Маклорена для тих чи інших елементарних функцій. Також слід зауважити, що в сучасних публікаціях часто розглядаються випадки, коли функції $f(x)$, $B(x)$, $C(x)$ від самого початку задані поліномами. В таких випадках ряди (35)-(37) вироджуються до скінченних сум з відомими коефіцієнтами.

Враховуючи подання (35), (37), початкові функції (18) та (19) після інтегрування запишуться у вигляді таких степеневих рядів:

$$\beta_{n,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(n+j-2)(n+j-1)} \left(\frac{x}{l}\right)^j \quad (n=3,4);$$
(39)

$$\beta_{5,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^4 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e_j}{(j+3)(j+4)} \left(\frac{x}{l}\right)^j,$$
(40)

де

$$e_j = \sum_{i=0}^j \frac{A_{j-i} C_i}{(i+1)(i+2)}.$$
(41)

Безпосередньо з формули (20) або (21), з урахуванням (17), (39), (40), заключаємо, що твірні функції $\beta_{n,k}(x)$ ($n=1,2,3,4,5$) ($k=1,2,3,\dots$) також будуть являти собою степеневі ряди. При цьому степінь першого доданку (тобто найменший степінь) у вказаних рядах буде дорівнювати $n+4k-1$.

Отже, твірні функції можна подати у вигляді

$$\beta_{n,k}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n+4k-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_{n,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^j \quad (n=1,2,3,4,5) (k=1,2,3,\dots),$$
(42)

де $c_{n,k,j}$ – коефіцієнти, що підлягають визначенню. В такому разі

$$\beta_{n,k-1}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n+4k-5} \sum_{j=0}^{\infty} c_{n,k-1,j} \left(\frac{x}{l}\right)^j \quad (n=1,2,3,4,5) (k=1,2,3,\dots).$$
(43)

Тоді для добутку рядів (36) та (43), матимемо

$$B(x)\beta_{n,k-1}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n+4k-5} \sum_{j=0}^{\infty} h_{n,k-1,j} \left(\frac{x}{l}\right)^j,$$
(44)

де

$$h_{n,k-1,j} = \sum_{s=0}^j B_{j-s} c_{n,k-1,s}.$$
(45)

Підставимо в (20) замість $\beta_{n,k}(x)$, $B(x)\beta_{n,k-1}(x)$, $f(x)=1/A(x)$ їх значення (42), (44), (35), після чого виконаємо операції інтегрування та множення рядів. В підсумку прийдемо до рівності

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_{n,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_{n,k-1,j}}{(n+4k+j-2)(n+4k+j-1)} \left(\frac{x}{l}\right)^j \quad (n=1,2,3,4,5) (k=1,2,3,\dots),$$

де

$$d_{n,k-1,j} = \sum_{i=0}^j \frac{A_{j-i} h_{n,k-1,i}}{(n+4k+i-4)(n+4k+i-3)}.$$
(46)

Звідси знаходимо

$$c_{n,k,j} = \frac{d_{n,k-1,j}}{(n+4k+j-2)(n+4k+j-1)} \quad (n=1,2,3,4,5) (k=1,2,3,\dots) (j=0,1,2,\dots).$$

Враховуючи тут (45) та (46), остаточно матимемо формулу

© Ю. С. Крутий, М. Г. Сур'янінов, А. О. Перпері, В. В. Вакуленко, В. М. Мітінський

$$c_{n,k,j} = \frac{1}{(n+4k+j-2)(n+4k+j-1)} \sum_{i=0}^j \frac{A_{j-i} \sum_{s=0}^i B_{i-s} c_{n,k-1,s}}{(n+4k+i-4)(n+4k+i-3)} \quad (47)$$

$$(n = 1, 2, 3, 4, 5) (k = 1, 2, 3, \dots) (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Отримана формула (47) є рекурентною за індексом k , тобто кожні наступні значення $c_{n,k,j}$ тут обчислюються через попередні. Для повної визначеності таку формулу слід доповнити початковими значеннями $c_{n,0,j}$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) ($j = 0, 1, 2, \dots$).

Вважаючи $k = 1$ в формулі (43), матимемо

$$\beta_{n,0}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_{n,0,j} \left(\frac{x}{l}\right)^j \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Зіставляючи дану формулу для різних значень n почергово з формулами (17), (39), (40), знаходимо:

$$c_{n,0,0} = 1; c_{n,0,j} = 0 \quad (n = 1, 2) (j = 1, 2, 3, \dots); \quad (48)$$

$$c_{n,0,j} = \frac{A_j}{(n+j-2)(n+j-1)} \quad (n = 3, 4) (j = 0, 1, 2, \dots); \quad (49)$$

$$c_{5,0,j} = \frac{e_j}{(j+3)(j+4)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (50)$$

Таким чином, рекурентною формулою (47), з урахуванням початкових значень (48)-(50), повністю визначені коефіцієнти рядів (42), тому надалі можемо вважати їх відомими.

Виходячи з формул (17)-(20), (29), (30) та скориставшись рівностями (36), (37), (39), (40), (42), запишемо в явному вигляді подання для решти початкових та твірних функцій $\tilde{\beta}_{n,0}(x)$, $\hat{\beta}_{n,0}(x)$, $\tilde{\beta}_{n,k}(x)$, $\hat{\beta}_{n,k}(x)$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Опускаючи нескладні викладки, наведемо нижче тільки готові результати.

У зведеній табл. 1 представлені формули для всіх початкових функцій.

Табл. 1

Початкові функції

| | $n = 1, 2$ | $n = 3, 4$ | $n = 5$ |
|--------------------------|----------------------------------|--|--|
| $\beta_{n,0}(x)$ | $\left(\frac{x}{l}\right)^{n-1}$ | $\left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{(n+j-2)(n+j-1)} \left(\frac{x}{l}\right)^j$ | $\left(\frac{x}{l}\right)^4 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e_j}{(j+3)(j+4)} \left(\frac{x}{l}\right)^j$ |
| $\tilde{\beta}_{n,0}(x)$ | $n-1$ | $\left(\frac{x}{l}\right)^{n-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A_j}{n+j-2} \left(\frac{x}{l}\right)^j$ | $\left(\frac{x}{l}\right)^3 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e_j}{j+3} \left(\frac{x}{l}\right)^j$ |
| $\hat{\beta}_{n,0}(x)$ | 0 | $\left(\frac{x}{l}\right)^{n-3}$ | $\left(\frac{x}{l}\right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_j}{(j+1)(j+2)} \left(\frac{x}{l}\right)^j$ |
| $\hat{\beta}_{n,0}(x)$ | 0 | $n-3$ | $\left(\frac{x}{l}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C_j}{j+1} \left(\frac{x}{l}\right)^j$ |

Щодо твірних функцій $\tilde{\beta}_{n,k}(x)$, $\hat{\beta}_{n,k}(x)$, $\hat{\beta}_{n,k}(x)$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) ($k = 1, 2, 3, \dots$), то відповідні їм ряди запишуться у вигляді:

$$\tilde{\beta}_{n,k}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n+4k-2} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{c}_{n,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^j \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5) (k = 1, 2, 3, \dots); \quad (51)$$

$$\hat{\beta}_{n,k}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n+4k-3} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{c}_{n,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^j \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5) (k = 1, 2, 3, \dots); \quad (52)$$

$$\hat{\beta}_{n,k}(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n+4k-4} \sum_{j=0}^{\infty} \hat{c}_{n,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^j \quad (n=1,2,3,4,5) (k=1,2,3,\dots), \quad (53)$$

де

$$\tilde{c}_{n,k,j} = c_{n,k,j} (n+4k+j-1), \quad (54)$$

$$\hat{c}_{n,k,j} = \frac{1}{(n+4k+j-4)(n+4k+j-3)} \sum_{s=0}^j B_{j-s} c_{n,k-1,s}, \quad (55)$$

$$\hat{c}_{n,k,j} = \hat{c}_{n,k,j} (n+4k+j-3). \quad (56)$$

Тут індекси приймають такі значення: $n=1,2,3,4,5$; $k=1,2,3,\dots$; $j=0,1,2,\dots$.

В підсумку всі початкові та твірні функції подані степеневими рядами.

Розрахункові формули для фундаментальних функцій та їх безрозмірних похідних

Чисельний розрахунок фактично зводиться до обчислення значень фундаментальних функцій $X_n(x)$ ($n=1,2,3,4$), функції $X_5(x)$, а також їх безрозмірних похідних $\tilde{X}_n(x)$, $\hat{X}_n(x)$, $\hat{X}_n(x)$ ($n=1,2,3,4,5$). Тому доцільно виписати для них кінцеві розрахункові формули, скориставшись знайденими вище поданнями початкових та твірних функцій у вигляді степеневих рядів.

Підставляючи у формули (8) замість початкових та твірних функцій їх значення (17), (39), (40), (42), для фундаментальних функцій $X_n(x)$ ($n=1,2,3,4$) та функції $X_5(x)$ одержимо подання у вигляді таких степеневих рядів:

$$X_n(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k c_{n,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j} \quad (n=1,2,3,4,5).$$

Коефіцієнти даних рядів повністю визначаються формулами (41), (47)-(50). Виходячи з (26)-(28), (51)-(53) та використовуючи формули з табл. 1, для безрозмірних похідних отримаємо:

$$\tilde{X}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \tilde{c}_{1,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j-1}; \quad (57)$$

$$\tilde{X}_n(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \tilde{c}_{n,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j} \quad (n=2,3,4,5); \quad (58)$$

$$\hat{X}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{1,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j-2}; \quad (59)$$

$$\hat{X}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{2,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j-1}; \quad (60)$$

$$\hat{X}_n(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-3} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{n,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j} \quad (n=3,4,5); \quad (61)$$

$$\hat{X}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{1,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j-3}; \quad (62)$$

$$\hat{X}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{2,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j-2}; \quad (63)$$

$$\hat{X}_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{3,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j-1}; \quad (64)$$

$$\hat{X}_n(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^{n-4} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{n,k,j} \left(\frac{x}{l}\right)^{4k+j} \quad (n=4,5); \quad (65)$$

В рядах (57)-(65) всі коефіцієнти, окрім початкових $\tilde{c}_{n,0,j}$, $\hat{c}_{n,0,j}$, $\hat{c}_{n,0,j}$ ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) ($j = 0, 1, 2, \dots$), визначаються за формулами (54)-(56). Згідно формулам з табл. 1, початкові коефіцієнти визначаються рівностями:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{n,0,0} &= n - 1; \quad \tilde{c}_{n,0,j} = 0 \quad (n = 1, 2)(j = 1, 2, 3, \dots); \\ \tilde{c}_{n,0,j} &= \frac{A_j}{n + j - 2} \quad (n = 3, 4); \quad \tilde{c}_{5,0,j} = \frac{e_j}{j + 3} \quad (j = 0, 1, 2, \dots); \\ \hat{c}_{n,0,j} &= 0 \quad (n = 1, 2)(j = 0, 1, 2, \dots); \\ \hat{c}_{n,0,0} &= 1; \quad \hat{c}_{n,0,j} = 0 \quad (n = 3, 4)(j = 1, 2, 3, \dots); \\ \hat{c}_{5,0,j} &= \frac{C_j}{(j + 1)(j + 2)} \quad (j = 0, 1, 2, \dots); \\ \hat{c}_{n,0,j} &= 0 \quad (n = 1, 2)(j = 0, 1, 2, \dots); \\ \hat{c}_{n,0,0} &= n - 3; \quad \hat{c}_{n,0,j} = 0 \quad (n = 3, 4)(j = 1, 2, 3, \dots); \\ \hat{c}_{5,0,j} &= \frac{C_j}{j + 1} \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Зауважимо, що доданки з нульовими початковими коефіцієнтами у наведених вище рядах відсутні. Зовнішня сума в таких рядах починається з $k = 1$. Отже, можемо констатувати наявність кінцевих розрахункових формул у вигляді степеневих рядів для фундаментальних функцій $X_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, 4$), функції $X_5(x)$, а також для їх безрозмірних похідних.

Приклад розрахунку

Розглянемо бетонну балку у вигляді зрізаного клину з затиснутими кінцями (рис. 3).

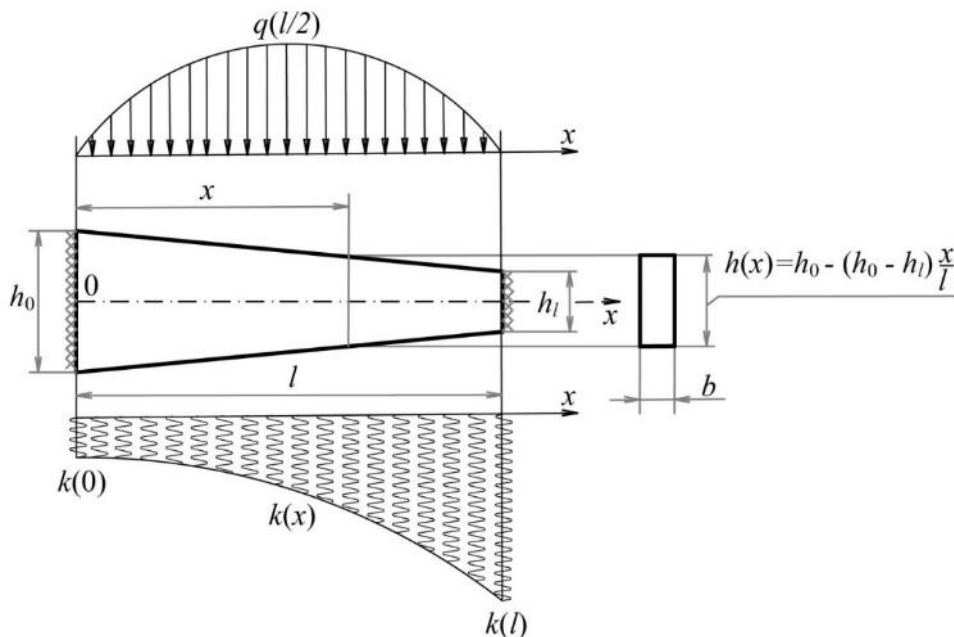


Рис. 3. Розрахункова схема балки у вигляді зрізаного клину

Балка опирається на експоненціально змінну пружну основу

$$k(x) = k(0) \exp\left(\gamma \frac{x}{l}\right), \quad \gamma = \ln \frac{k(l)}{k(0)}$$

та перебуває під впливом параболічного навантаження

$$q(x) = 4q(l/2) \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right), \quad q(l/2) \neq 0.$$

Згідно з формулою для моменту інерції поперечного перерізу $I(x) = bh^3(x)/12$, для заданої балки знаходимо:

$$I(x) = \frac{bh_0^3}{12} \left(1 - (1-\delta) \frac{x}{l} \right)^3; \quad \delta = \frac{h_l}{h_0}; \quad h_0 \geq h_l \neq 0.$$

Отже, у даному випадку:

$$E_0 I_0 = \frac{Ebh_0^3}{12}; \quad k_0 = k(0); \quad q_0 = 4q(l/2); \quad A(x) = \left(1 - (1-\delta) \frac{x}{l} \right)^3;$$

$$f(x) = 1 + \frac{3}{1!} (1-\delta) \left(\frac{x}{l} \right) + \frac{3 \cdot 4}{2!} (1-\delta)^2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3!} (1-\delta)^3 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \dots;$$

$$B(x) = \exp\left(\gamma \frac{x}{l} \right) = 1 + \frac{\gamma}{1!} \frac{x}{l} + \frac{\gamma^2}{2!} \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{\gamma^3}{3!} \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \dots; \quad C(x) = \frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2.$$

Тут враховано, що $E(x) \equiv E = E_0 = \text{const}$.

Відповідно для коефіцієнтів рядів (35)-(37) матимемо:

$$A_0 = 1, \quad A_j = \frac{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (j+2)}{j!} (1-\delta)^j; \quad B_0 = 1, \quad B_j = \frac{\gamma^j}{j!} \quad (j = 1, 2, 3, \dots);$$

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 1, \quad C_2 = -1, \quad C_j = 0 \quad (j = 3, 4, 5, \dots).$$

Випадку затиснутих кінців балки відповідають граничні умови:

$$y(0) = 0; \quad \varphi(0) = 0; \quad y(l) = 0; \quad \varphi(l) = 0.$$

Отже, два початкові параметри $y(0), \varphi(0)$ відомі. Два інших $M(0), Q(0)$ знайдемо із системи рівнянь, яку отримаємо після реалізації граничних умов на кінці $x = l$, використовуючи (31), (32). У підсумку рівності (31)-(34) для заданих граничних умов запишуться у вигляді:

$$y(x) = \frac{48q(l/2)l^4}{Ebh_0^3} (\lambda_1 X_3(x) + \lambda_2 X_4(x) + X_5(x));$$

$$\varphi(x) = \frac{48q(l/2)l^3}{Ebh_0^3} (\lambda_1 \tilde{X}_3(x) + \lambda_2 \tilde{X}_4(x) + \tilde{X}_5(x));$$

$$M(x) = -4q(l/2)l^2 (\lambda_1 \hat{X}_3(x) + \lambda_2 \hat{X}_4(x) + \hat{X}_5(x));$$

$$Q(x) = -4q(l/2)l (\lambda_1 \hat{X}_3(x) + \lambda_2 \hat{X}_4(x) + \hat{X}_5(x)),$$

де

$$\lambda_1 = \frac{X_4(l)\tilde{X}_5(l) - \tilde{X}_4(l)X_5(l)}{X_3(l)\tilde{X}_4(l) - \tilde{X}_3(l)X_4(l)}; \quad \lambda_2 = -\frac{X_3(l)\tilde{X}_5(l) - \tilde{X}_3(l)X_5(l)}{X_3(l)\tilde{X}_4(l) - \tilde{X}_3(l)X_4(l)}.$$

Вихідні дані для розрахунку: довжина балки $l = 6\text{ м}$; ширина $b = 0,4\text{ м}$; висота лівого кінця $h_0 = 0,6\text{ м}$; висота правого кінця $h_l = 0,3\text{ м}$; $E = 1,5 \cdot 10^7 \text{ кПа}$; $k(0) = 2 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2$; $k(l) = 4 \cdot 10^3 \text{ кН/м}^2$; $q(l/2) = 50 \text{ кН/м}$.

Результати розрахунку авторським методом (АМ) представлено в табл. 2, 3 та на рис. 4. В табл. 2, 3 також надані результати розрахунку методом скінченних елементів у програмі LIRA.

Табл. 2

Значення кінематичних параметрів

| x | y(x), [mm] | | Відносна похибка, [%] | φ(x), [rad] | | Відносна похибка, [%] |
|-----|------------|----------|-----------------------|-------------|----------|-----------------------|
| | АМ | FEM | | АМ | FEM | |
| 0,0 | 0,000000 | 0,000000 | 0,00 | 0,000000 | 0,000000 | 0,00 |
| 0,3 | 0,065941 | 0,067649 | 2,59 | 0,000429 | 0,000435 | 1,33 |
| 0,6 | 0,250933 | 0,255807 | 1,94 | 0,000792 | 0,000803 | 1,32 |
| 0,9 | 0,533689 | 0,542331 | 1,62 | 0,001080 | 0,001093 | 1,25 |
| 1,2 | 0,890494 | 0,903581 | 1,47 | 0,001285 | 0,001300 | 1,18 |
| 1,5 | 1,295620 | 1,313397 | 1,37 | 0,001401 | 0,001416 | 1,10 |
| 1,8 | 1,721828 | 1,744096 | 1,29 | 0,001425 | 0,001439 | 1,00 |

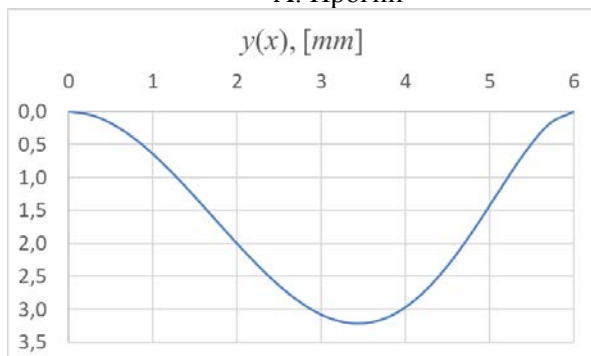
| | | | | | | |
|-----|----------|----------|------|-----------|-----------|------|
| 2,1 | 2,140975 | 2,167112 | 1,22 | 0,001354 | 0,001365 | 0,86 |
| 2,4 | 2,524752 | 2,553764 | 1,15 | 0,001189 | 0,001197 | 0,67 |
| 2,7 | 2,845582 | 2,876188 | 1,08 | 0,000935 | 0,000939 | 0,38 |
| 3,0 | 3,077709 | 3,108459 | 1,00 | 0,000600 | 0,000598 | 0,21 |
| 3,3 | 3,198540 | 3,227943 | 0,92 | 0,000196 | 0,000190 | 3,03 |
| 3,6 | 3,190269 | 3,216949 | 0,84 | -0,000257 | -0,000267 | 3,92 |
| 3,9 | 3,041876 | 3,064709 | 0,75 | -0,000733 | -0,000746 | 1,80 |
| 4,2 | 2,751569 | 2,769810 | 0,66 | -0,001197 | -0,001212 | 1,25 |
| 4,5 | 2,329769 | 2,343135 | 0,57 | -0,001601 | -0,001616 | 0,95 |
| 4,8 | 1,802752 | 1,811461 | 0,48 | -0,001887 | -0,001901 | 0,75 |
| 5,1 | 1,217104 | 1,221844 | 0,39 | -0,001978 | -0,001989 | 0,59 |
| 5,4 | 0,645104 | 0,646965 | 0,29 | -0,001778 | -0,001787 | 0,48 |
| 5,7 | 0,191245 | 0,191412 | 0,09 | -0,001168 | -0,001172 | 0,37 |
| 6,0 | 0,000000 | 0,000000 | 0,00 | 0,000000 | 0,000000 | 0,00 |

Табл. 3

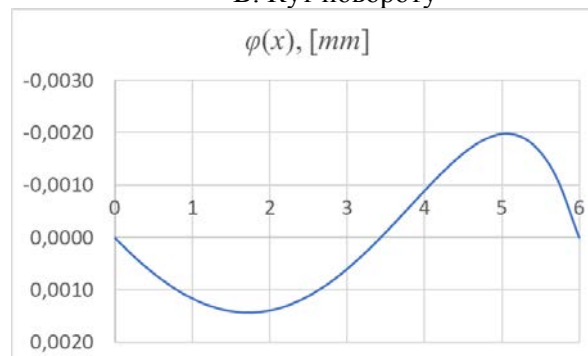
Значення силових параметрів

| x | $M(x), [kNm]$ | | Відносна похибка, [%] | $Q(x), [kN]$ | | Відносна похибка, [%] |
|-----|---------------|-------------|-----------------------|--------------|------------|-----------------------|
| | AM | FEM | | AM | FEM | |
| 0,0 | - | -167,487930 | 1,28 | 109,515957 | 111,132675 | 1,48 |
| 0,3 | - | -134,290207 | 1,22 | 108,078956 | 109,713280 | 1,51 |
| 0,6 | - | -101,926636 | 1,12 | 104,013733 | 105,626846 | 1,55 |
| 0,9 | -70,488115 | -71,147575 | 0,94 | 97,675187 | 99,204384 | 1,57 |
| 1,2 | -42,382450 | -42,604538 | 0,52 | 89,400381 | 90,773865 | 1,54 |
| 1,5 | -17,009447 | -16,851238 | 0,93 | 79,509442 | 80,658981 | 1,45 |
| 1,8 | 5,192084 | 5,654892 | 8,91 | 68,306706 | 69,177757 | 1,28 |
| 2,1 | 23,872435 | 24,550808 | 2,84 | 56,082122 | 56,641239 | 1,00 |
| 2,4 | 38,766929 | 39,565563 | 2,06 | 43,112897 | 43,352207 | 0,56 |
| 2,7 | 49,692374 | 50,517658 | 1,66 | 29,665393 | 29,604097 | 0,21 |
| 3,0 | 56,544124 | 57,312099 | 1,36 | 15,997273 | 15,680112 | 1,98 |
| 3,3 | 59,293827 | 59,937244 | 1,09 | 2,359927 | 1,852758 | 21,49 |
| 3,6 | 57,987942 | 58,461597 | 0,82 | -10,998816 | -11,616062 | 5,61 |
| 3,9 | 52,747120 | 53,030731 | 0,54 | -23,831640 | -24,474113 | 2,70 |
| 4,2 | 43,766550 | 43,864670 | 0,22 | -35,888323 | -36,476810 | 1,64 |
| 4,5 | 31,317400 | 31,256083 | 0,20 | -46,911896 | -47,383656 | 1,01 |
| 4,8 | 15,749475 | 15,569860 | 1,14 | -56,634310 | -56,952610 | 0,56 |
| 5,1 | -2,504738 | -2,755275 | 10,00 | -64,771531 | -64,931831 | 0,25 |
| 5,4 | -22,924458 | -23,202120 | 1,21 | -71,017978 | -71,047768 | 0,04 |
| 5,7 | -44,893219 | -45,166122 | 0,61 | -75,040208 | -74,988724 | 0,07 |
| 6,0 | -67,689457 | -67,940750 | 0,37 | -76,469737 | -76,382378 | 0,11 |

А. Прогин



В. Кут повороту



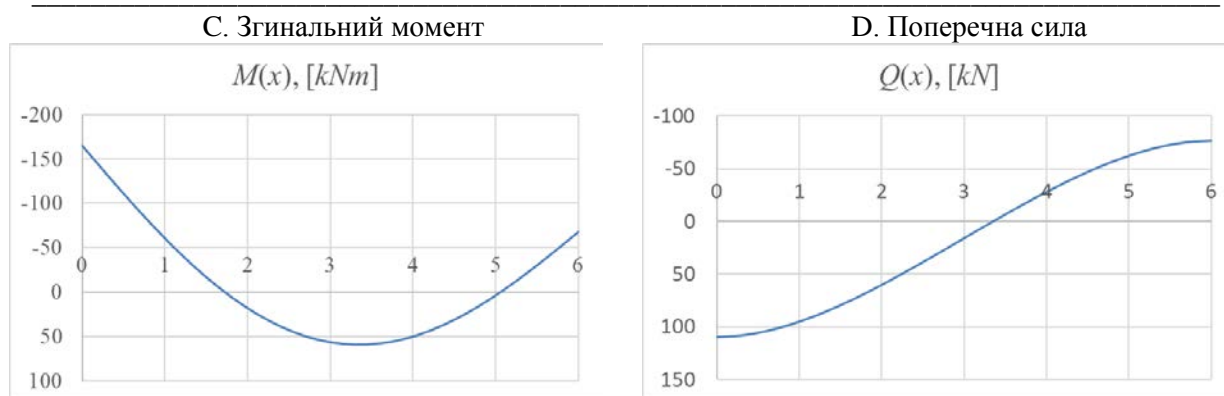


Рис. 4. Графіки параметрів стану балки

Слід зауважити, що найбільша відносна похибка досягається в околицях тих точок, де функції параметрів стану балки змінюють знак.

Висновки

1. Оскільки авторський метод ґрунтується на точному розв'язку диференціального рівняння, то відповідні чисельні розрахунки можна трактувати, як точні. Такі розв'язки є особливо цінними, оскільки вони можуть служити критеріями, по яким можна оцінювати точність різного роду наближених розв'язків.

2. Отримані результати дали можливість чисельно визначити похибку розрахунків методом скінченних елементів для розглянутого прикладу.

3. У цілому можна констатувати наявність нового аналітичного методу розрахунку на згин балок на неоднорідній пружній основі Вінклера, коли згинальна жорсткість балки, коефіцієнт постелі та навантаження задані будь-якими неперервними функціями.

Список використаних джерел

1. Foyouzat, M. A., Mofid, M., & Akin, J. E. (2015). On the dynamic response of beams on elastic foundations with variable modulus. *Acta Mechanica*, 227(2), 549–564. <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1485-1>
2. Krutii, Y., Surianinov, M., Petrash, S., & Yezhov, M. (2021). Development of an analytical method for calculating beams on a variable elastic Winkler foundation. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 1162(1), 012009. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1162/1/012009>
3. Krutii, Y., Surianinov, M., Perperi, A., Vakulenko, V., & Teorlo, N. (2024). Analytical calculation of a beam based on an elastic Winkler foundation with range inhomogeneity. *Mechanics and Mathematical Methods*, 6(2), 47–57. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2024-6-2-47-57>
4. Krutii, Y., Surianinov, M., Vakulenko, V., Soroka, M., & Vasilieva, N. (2024). Analytical calculation of beams on Winkler's variable elastic foundation. *Advances in Science and Technology*, 156, 75–80. <https://doi.org/10.4028/p-pd9h3g>
5. Krutii, Yu., Surianinov, M., Perperi, A., Vakulenko, V., & Teorlo, N. (2024). Analitichnyi rozrakhunok balky, shcho opyraietsia na pruzhnu osnovu Vinklera z eksponentsialnoiu neodnorodnistiu. *Suchasne budivnytstvo ta arkhitektura* [In Ukrainian], (10), 27–36. <https://doi.org/10.31650/2786-6696-2024-10-27-36>
6. Jang, T. S. (2014). A general method for analyzing moderately large deflections of a non-uniform beam: An infinite Bernoulli–Euler–von Kármán beam on a nonlinear elastic foundation. *Acta Mechanica*, 225(7), 1967–1984. <https://doi.org/10.1007/s00707-013-1077-x>
7. Jang, T. S., & Sung, H. G. (2012). A new semi-analytical method for the non-linear static analysis of an infinite beam on a non-linear elastic foundation: A general approach to a variable beam cross-section. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 47(4), 132–139. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2012.04.005>
8. Tsiatas, G. C. (2009). Nonlinear analysis of non-uniform beams on nonlinear elastic foundation. *Acta Mechanica*, 209(1-2), 141–152. <https://doi.org/10.1007/s00707-009-0174-3>
9. Poliakov, A. M., Shtanko, P. K., & Pakhaliuk, V. I. (2019). Calculation of a variable cross-section beam on an elastic foundation with two coefficients of compliance. *Journal of Physics: Conference Series*, 1353, 012110. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012110>

10. Deminov, P. (2023). The stiffness of a reinforced concrete beam with random parameters the cracks formation. E3S Web of Conferences, 410, 02025. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202341002025>
11. Mutman, U. (2013). Free vibration analysis of an Euler beam of variable width on the Winkler foundation using homotopy perturbation method. Mathematical Problems in Engineering, 2013, 1–9. <https://doi.org/10.1155/2013/721294>
12. Akhmediev, S., Mikhailov, V., Tazhenova, G., Bakirov, M., Filippova, T., & Tokanov, D. (2022). Calculating a beam of variable section lying on an elastic foundation. Journal of Applied Engineering Science, 1–7. <https://doi.org/10.5937/jaes0-38800>
13. Nikodým, M., & Frydryšek, K. (2013). About central difference method applied for the beams on elastic foundation. Transactions of the VŠB - Technical University of Ostrava, Mechanical Series, 59(2), 133–146. <https://doi.org/10.22223/tr.2013-2/1967>
14. S.P. Timoshenko. A Course in Elasticity Theory [in Russian]. Naukova Dumka, Kiev, 1972.
15. Shvab'yuk, V. I., Krutii, Y. S., & Sur'yaninov, M. G. (2016). Investigation of the free vibrations of bar elements with variable parameters using the direct integration method. Strength of Materials, 48(3), 384–393. <https://doi.org/10.1007/s11223-016-9776-x>
16. Krutii, Y., Suriyaninov, M., & Vandynskiy, V. (2018). Analytic formulas for the natural frequencies of hinged structures with taking into account the dead weight. MATEC Web of Conferences, 230, 02016. <https://doi.org/10.1051/mateconf/201823002016>
17. Krutii, Y., & Vandynskiy, V. (2019). Exact solution of buckling problem of the column loaded by self-weight. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 708, 012062. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/708/1/012062>
18. Krutii, Y., Kovrov, A., Otrosh, Y., & Surianinov, M. (2020). Analysis of forced longitudinal vibrations of columns taking into account internal resistance in resonance zones. Materials Science Forum, 1006, 79–86. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/msf.1006.79>
19. Krutii, Yu. S. (2016). Rozrobka metodu rozv'iazannia zadach stiikosti i kolyvan deformivnykh system zi zminnyimi neperervnymi parametramy [In Ukrainian] [Dys. d-ra tekhn. nauk, Luts'kyi natsionalnyi tekhnichnyi universytet]. Ukrainika naukova.
20. F.R. Gantmacher. The Theory of Matrices. Chelsea, New York, 1959....