

М.С. Слободян, М.І. Шайнога

Львівський національний університет імені Івана Франка

**РОЗТЯГ ПЛАСТИНИ З ОТВОРОМ ТА РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ, НА  
ПРОДОВЖЕННІ ЯКОЇ УТВОРИЛИСЯ ПЛАСТИЧНІ ЗОНИ З ВИКОРИСТАННЯМ  
УМОВИ ПЛАСТИЧНОСТІ ТРЕСКА-СЕН-ВЕНАНА**

*У роботі побудовано розв'язок задачі про розтяг безмежної ізотропної пластини з круговим отвором та радіальною наскрізною прямолінійною тріщиною. При розв'язуванні задачі припускалося, що під дією зовнішнього навантаження на нескінченності на продовженні тріщини утворилися пластичні зони, для моделювання яких використано умови пластичності Треска-Сен-Венана. Розв'язок задачі побудований з використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів і зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз задачі та побудовано графіки для довжин пластичних зон в залежності від прикладеного зовнішнього навантаження.*

*Ключові слова:* пластинка, тріщина, пластичні зони, комплексні потенціали, задача лінійного спряження, сингулярні інтегральні рівняння.

M.S. Slobodian, M.I. Shaynoga

**STRETCHING OF A PLATE WITH A HOLE AND A RADIAL CRACK, THE  
CONTINUATION OF WHICH FORMED PLASTIC ZONES USING TRESCA-SAINT-VENANT  
PLASTICITY CONDITION**

*The work presents a solution to the problem of the stretching of an infinite isotropic plate with a circular hole and a radial through straight crack. It was assumed that under the action of an external load at infinity, on the crack extension the plastic zones are formed, modeled using Tresca-Saint-Venant plasticity conditions. The solution of the problem is built using the method of the theory of functions of a complex variable and complex potentials and is reduced to a system of singular integral equations, which is numerically solved using the method of mechanical quadrature. A numerical analysis of the problem is conducted and graphic dependencies of the length of the plastic zones and applied external loads were constructed.*

*Key words:* plate, crack, plastic zones, complex potentials, linear conjugation problem, singular integral equations.

**Постановка проблеми.** У багатьох галузях промисловості використовуються пластинчасті елементи конструкцій. У таких елементах можуть міститися отвори, а під час експлуатації виникатимуть тріщини, які різко знижують рівень допустимого навантаження. Під дією зовнішнього навантаження на продовженні тріщин можуть виникати пластичні зони. Тому розробка методів для визначення напружено-деформованого стану пластин з отворами та тріщинами, на продовженні яких утворилися пластичні зони, є актуальною науково-технічною задачею механіки. Одним із основних завдань при оцінці міцності конструктивного елемента з тріщинами є визначення довжин пластичних зон, з допомогою яких характеризуємо напружено-деформований стан в околі вершин тріщин, а також можна визначити критичне навантаження, яке може бути прикладене до пластини.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У статті [1] наведено метод визначення розміщення тріщини та розмірів пластичних зон на її продовженні за допомогою використання позаплощинних полів зміщень. У роботі [2] наведено аналітичний розв'язок для визначення розмірів пластичної зони у вершині тріщини в трубі з внутрішніми похилими поверхневими тріщинами, з використанням на критерію текучості Мізеса. У [3] параметри сформульовано задачу для пластичної зони в пружно-пластичному кусково-однорідному тілі, яке зазнає деформації зсуву поблизу вершини міжфазної тріщини, з використанням методу Вінера-Хопфа. У цій праці вважається, що береги тріщини контактують з тертям, а пластична зона моделюється як пряма лінія розриву переміщень. У статті [4] з використанням комплексних потенціалів плоскої задачі та задачі згину розв'язано задачу згину нескінченної кусково-однорідної ізотропної пластини з пружною круговою шайбою та радіальною наскрізною прямою тріщиною, береги якої контактуються. У дослідженні [5] запропоновано аналітичний метод визначення термічних коефіцієнтів інтенсивності напружень для композитної пластини, яка містить круглий отвір та тріщиною, і яка піддається впливу теплового потоку. У ній вперше побудовано аналітичний розв'язок, з використанням методу комплексних змінних та методу інтегрування Шварца. У роботі [6] розглянуто модель тріщини Дагдейла-Баренблатта у нескінченній смугі шляхом, при чому тріщина є перпендикулярною до меж смуги та розташована в її центрі. Розв'язок задачі будується з допомогою на поліномів Чебишева другого порядку. У статті [7] розв'язано задачу про згин смуги, яка містить наскрізну тріщину, береги якої гладко контактують, а на продовженні тріщини утворилися пластичні зони. У [8] розв'язана задача згину з розтягом ізотропної пластини, яка містить наскрізну тріщину, за наявності пластичних зон у її вершинах. Причому у цій праці враховано зміцнення матеріалу і виконуються умови пластичності

© М.С. Слободян, М.І. Шайнога

Треска у вигляді поверхневого шару та пластичного шарніру. У статті [9] розв’язана задача чистого згину балки з тріщиною, перпендикулярною до її осі, на продовженні якої утворилися пластичні зони. Використовуючи методи теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів, задача зводиться до задач лінійного спряження, які розв’язано аналітично.

На основі наведеного вище можемо зробити висновок, що задачі розтягу пластин з отвором та тріщинами, на продовженні яких утворилися пластичні зони, є актуальними. У роботі сформульована модель тріщини, на продовженні якої утворилися пластичні зони, за розтягу пластини зусиллями на безмежності. Ця модель дає змогу з більшою точністю оцінити вплив тріщини на напружено-деформований стан пластини та на її міцність.

**Метою статті** є визначення напружено-деформованого стану за розтягу безмежної пластини з круговим отвором та тріщиною, на продовженні якої утворилися пластичні зони, з використанням умови пластичності Треска-Сен-Венана.

**Виклад основного матеріалу.**

**Формулювання задачі.**

Розглянемо нескінченну ізотропну пластину завтовшки  $2h$ , яка містить круговий отвір радіуса  $R$  і наскрізну прямолінійну радіальну тріщину завдовжки  $2l$ . Межа кругового отвору та береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження. Припустимо, що за дії рівномірно розподіленого розтягуювального навантаження на безмежності  $P_1$  і  $P_2$  (див. рис. 1) на продовженні тріщини утворилися прямолінійні пластичні зони завдовжки  $w_1$  і  $w_2$ . Розмістимо декартову систему координат  $Ox\tilde{z}$  у серединній площині пластини з початком у центрі кругового отвору, при чому вісь  $Ox$  направимо по тріщині, а вісь  $O\tilde{z}$  – перпендикулярно до серединної площини пластини. Теж виберемо полярну систему координат  $Or\theta$  з центром у точці  $O$  та полярною віссю  $Ox$ . У центрі тріщини розмістимо декартову систему координат  $O_1x_1y_1\tilde{z}_1$ . Через  $L$  позначимо межу кругового отвору; лінію, де розміщена тріщина позначимо  $L_1$ , прямолінійні пластичні зони –  $L'_1$  і  $L''_1$ , відстань між центром отвору та центром тріщини –  $x_0$ ; область всередині кругового отвору –  $S^+$ , а ззовні –  $S^-$ ; довжини пластичних зон –  $w_1$  і  $w_2$ ; вершини тріщини –  $a$  і  $b$ ; вершини пластичних зон –  $c$  і  $d$ ;  $\tilde{L}_1 = L_1 \cup L'_1 \cup L''_1$ .

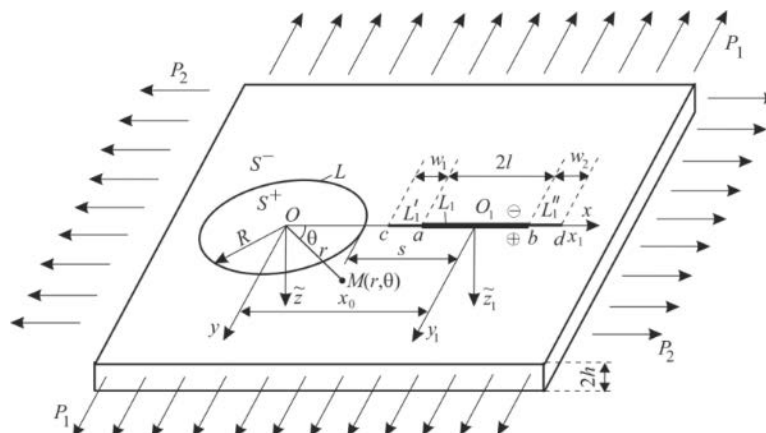


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

На межі кругового отвору будемо мати такі крайові умови

$$\sigma_{rr} = 0, \tau_{r\theta} = 0, x \in L, \tag{1}$$

де  $\sigma_{rr}$  і  $\tau_{r\theta}$  – компоненти тензора напружень у полярній системі координат.

На берегах тріщини будемо мати

$$\sigma_{y_1y_1}^\pm = 0, \tau_{x_1y_1}^\pm = 0, x_1 \in L_1, \tag{2}$$

де  $\sigma_{y_1y_1}$  і  $\tau_{x_1y_1}$  – компоненти тензора напружень у декартовій системі координат, значками “+” і “-” позначені граничні значення функцій при прямуванні точки площини до тріщини з пластичними зонами при  $y_1 \rightarrow \pm 0$ .

У пластичних зонах будемо мати такі крайові умови

$$\sigma_{y_1y_1}^\pm = \sigma_0^{(1)}, \tau_{x_1y_1}^\pm = \tau_0^{(1)}, x_1 \in L'_1, \tag{3}$$

$$\sigma_{y_1y_1}^\pm = \sigma_0^{(2)}, \tau_{x_1y_1}^\pm = -\tau_0^{(2)}, x_1 \in L''_1, \tag{4}$$

де  $\sigma_0^{(1)}$ ,  $\sigma_0^{(2)}$ ,  $\tau_0^{(1)}$ ,  $\tau_0^{(2)}$  – невідомі нормальні та дотичні напруження у пластичних зонах.

**Побудова розв'язку задачі.**

За узагальненого плоского напруженого стану компоненти тензора напружень  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}$  і вектора переміщень  $u_x, u_y$  у декартовій системі координат або тензора напружень  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{r\theta}$  і вектора переміщень  $u_r, u_\theta$  у полярній системі координат виражають через дві функції комплексної змінної  $\Phi(z)$  і  $\Psi(z)$  [10]

$$\Phi(z) = \Phi_K(z) + \Phi_1(z_1), \Psi(z) = \Psi_K(z) + \Psi_1(z_1) - x_0 \Phi_1'(z_1), \quad (5)$$

де функції  $\Phi_K(z)$  і  $\Psi_K(z)$  голоморфні в області  $S^-$ , а функції  $\Phi_1(z)$  і  $\Psi_1(z)$  голоморфні ззовні тріщини з пластичними зонами;  $z = x + iy, i^2 = -1$ .

Введемо функції

$$\begin{aligned} \Omega_1(z_1) &= \bar{\Phi}_1(z_1) + z_1 \bar{\Phi}_1'(z_1) + \bar{\Psi}_1(z_1), \\ \Phi_K(z) &= -\bar{\Phi}_K\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}_K'\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}_K\left(\frac{R^2}{z}\right), z \in S^+, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\bar{\Phi}_1(z_1) = \overline{\Phi_1(\bar{z}_1)}$ .

Зауважимо, що

$$\Phi_K(z) = \frac{(P_2 - P_1)R^2}{2z^2} + O(1), z \rightarrow 0.$$

З урахуванням (5) та (6), напружено-деформований стан пластини з отвором та тріщиною визначимо з формул [10]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} + i\tau_{r\theta} &= \Phi_K(z) - \frac{R^2}{r^2} \Phi_K\left(\frac{R^2}{z}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \{\overline{\Phi_K(z)} - \bar{z} \overline{\Phi_K'(z)}\} + \\ &+ \left\{ \Phi_1(z_1) + \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right) \overline{\Phi_1(z_1)} - \frac{\bar{z}}{z} (\Omega_1(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi_1'(z_1)}) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial}{\partial \theta} (u_r + iu_\theta) &= \kappa \Phi_K(z) + \frac{R^2}{r^2} \Phi_K\left(\frac{R^2}{z}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \{\overline{\Phi_K(z)} - \bar{z} \overline{\Phi_K'(z)}\} + \\ &+ \left\{ \kappa \Phi_1(z_1) - \left(1 + \frac{\bar{z}}{z}\right) \overline{\Phi_1(z_1)} + \frac{\bar{z}}{z} (\Omega_1(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi_1'(z_1)}) \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} - i\tau_{xy} &= \Phi_1(z_1) + \Omega_1(\bar{z}_1) + (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi_1'(z_1)} + \Phi_K(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \overline{\Phi_K(z)} + \\ &+ z \overline{\Phi_K'(z)} + \frac{R^2}{z^2} \left\{ \Phi_K\left(\frac{R^2}{z}\right) - \bar{z} \overline{\Phi_K'(z)} \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial}{\partial x_1} (u_x + iu_y) &= \kappa \Phi_1(z_1) - \Omega_1(\bar{z}_1) - (z_1 - \bar{z}_1) \overline{\Phi_1'(z_1)} + \kappa \Phi_K(z) - \\ &- \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \overline{\Phi_K(z)} - z \overline{\Phi_K'(z)} - \frac{R^2}{z^2} \left\{ \Phi_K\left(\frac{R^2}{z}\right) - \bar{z} \overline{\Phi_K'(z)} \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

де  $\mu = E/(2(1 + \nu))$  – модуль зсуву матеріалу пластини,  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ,  $E$  – модуль пружності матеріалу пластини,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

З (9) та крайових умов (2)-(4) маємо таку задачу лінійного спряження

$$(\Phi_1(t) - \Omega_1(t))^+ - (\Phi_1(t) - \Omega_1(t))^- = 0, t \in \tilde{L}_1, \quad (11)$$

розв'язавши яку, отримаємо

$$\Omega_1(z) = \Phi_1(z).$$

Додамо (9) та (10)

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x_1} (u_x + iu_y) = (1 + \kappa) \{\Phi_1(z_1) + \Phi_K(z)\}.$$

Врахувавши крайові умови (2)-(4), з попередньої формули отримаємо

$$(1 + \kappa) \{\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)\} = 2\mu \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (u_x + iu_y) \right], t \in \tilde{L}_1, \quad (12)$$

де  $[f] = f^+ - f^-$ .

Введемо позначення

$$g_1'(t) = \frac{2\mu}{(1 + \kappa)i} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (u_x + iu_y) \right], t \in \tilde{L}_1.$$

Тоді з (12) маємо таку задачу лінійного спряження

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = i g_1'(t),$$

розв'язок якої буде мати вигляд

$$\Phi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_c^d \frac{g_1'(t) dt}{t - z_1}. \quad (13)$$

З (7) та крайових умов (1) отримаємо

$$\begin{aligned} & \Phi_K^-(t) - \Phi_K^+(t) + \Phi_1(t - x_0) + \left(1 + \frac{R^2}{t^2}\right) \bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{t} - x_0\right) - \\ & - \frac{R^2}{t^2} \left\{ \Omega_1\left(\frac{R^2}{t} - x_0\right) + \left(t - \frac{R^2}{t}\right) \bar{\Phi}_1'\left(\frac{R^2}{t} - x_0\right) \right\} = 0, t \in L. \end{aligned} \quad (14)$$

Введемо функцію

$$F(z) = \begin{cases} \Phi_K(z) - \Phi_1(z - x_0), z \in S^+, \\ \Phi_K(z) + \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) - \frac{R^2}{z^2} \left\{ \Omega_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) + \left(z - \frac{R^2}{z}\right) \bar{\Phi}_1'\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) \right\}, \\ z \in S^-. \end{cases} \quad (15)$$

Якщо підставити (15) у (14), тоді отримаємо задачу лінійного спряження

$$F^+(t) - F^-(t) = 0, t \in L,$$

розв'язок якої буде мати вигляд

$$F(z) = \frac{(p_2 - p_1)R^2}{2z^2} + \frac{p_1 + p_2}{4} + \frac{1}{2\pi} \int_c^d \frac{\bar{g}_1'(t) dt}{t + x_0}. \quad (16)$$

Оскільки функція  $F(z)$  відома, тоді з (15) отримаємо

$$\Phi_K(z) = \begin{cases} F(z) + \Phi_1(z - x_0), z \in S^+, \\ F(z) - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right) \bar{\Phi}_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) + \frac{R^2}{z^2} \left\{ \Omega_1\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) + \left(z - \frac{R^2}{z}\right) \bar{\Phi}_1'\left(\frac{R^2}{z} - x_0\right) \right\}, \\ z \in S^-. \end{cases} \quad (17)$$

З (9) та крайових умов (2)-(4), врахувавши (1), будемо мати

$$\begin{aligned} & \Phi_1^+(x_1) + \Phi_1^-(x_1) + \Phi_K(x_1 + x_0) + \left(1 + \frac{R^2}{(x_1 + x_0)^2}\right) \overline{\Phi_K(x_1 + x_0)} + \\ & + \left(x_1 + x_0 - \frac{R^2}{x_1 + x_0}\right) \overline{\Phi_K'(x_1 + x_0)} + \frac{R^2}{(x_1 + x_0)^2} \Phi_K\left(\frac{R^2}{x_1 + x_0}\right) = \\ & = \begin{cases} 0, x_1 \in [a, b], \\ \sigma_0^{(1)} + i\tau_0^{(1)}, x_1 \in [c, a], \\ \sigma_0^{(2)} - i\tau_0^{(2)}, x_1 \in [b, d]. \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

Підставивши (13), (16), (17) у (18) у безрозмірних змінних отримаємо сингулярне інтегральне рівняння для визначення невідомої функції  $g_1'(t)$ , яке буде мати вигляд

$$\int_{-1}^1 \{R(\eta, \xi)G(\eta) + S(\eta, \xi)\overline{G(\eta)}\} d\eta = H(\xi), \xi \in [-1, 1], \quad (19)$$

де

$$H(\xi) = p_2 - \frac{p_1 - p_2}{2X^4} + \begin{cases} 0, \xi \in (-1 + 2w_1^*/(2+w_1^* + w_2^*), 1 - 2w_2^*/(2+w_1^* + w_2^*)), \\ (\sigma_0^{(1)} + i\tau_0^{(1)})/\sigma_Y, \xi \in [-1, -1 + 2w_1^*/(2+w_1^* + w_2^*)], \\ (\sigma_0^{(2)} - i\tau_0^{(2)})/\sigma_Y, \xi \in [1 - 2w_2^*/(2+w_1^* + w_2^*), 1], \end{cases}$$

$$R(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi(\eta - \xi)} +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{1}{X(TX - 1)} - \frac{T^2 - 1}{T(TX - 1)^2} + \frac{(T^2 - 1)(2TX^3 - 3TX + 1) + TX(TX - 1)^2}{TX^2(TX - 1)^3} \right\},$$

$$S(\eta, \xi) = \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{1}{X(TX - 1)} - \frac{T^2 - 1}{T(TX - 1)^2} + \frac{1}{TX^2} + \frac{3TX - X^2(2TX - 1) - 2}{X^3(TX - 1)^2} \right\},$$

$$X = 1 + \varepsilon + 0.5\lambda\{w_2^* - w_1^* + (2 + w_1^* + w_2^*)\xi\},$$

$$T = 1 + \varepsilon + 0.5\lambda\{w_2^* - w_1^* + (2 + w_1^* + w_2^*)\eta\},$$

$$\varepsilon = \frac{s}{R}, \lambda = \frac{l}{R}, w_1^* = \frac{w_1}{l}, w_2^* = \frac{w_2}{l}, p_1 = \frac{P_1}{\sigma_Y}, p_2 = \frac{P_2}{\sigma_Y}, G(\eta) = G_1(\eta) + iG_2(\eta) = \frac{hg_1'(t)}{\sigma_Y},$$

де  $G_1(\eta)$ ,  $G_2(\eta)$  – дійсні невідомі функції,  $\sigma_Y$  – межа текучості матеріалу пластини.

З умови однозначності переміщень при обході контуру тріщини з пластичними зонами отримаємо

$$\int_{-1}^1 \{G_1(\eta) + iG_2(\eta)\} d\eta = 0. \quad (20)$$

Коефіцієнти інтенсивності зусиль (КІЗ)  $k = k_1 + ik_2$  визначимо за формулами [11]

$$k^{c,d} = \mp h \lim_{x_1 \rightarrow c,d} \left( g_1'(x_1) \sqrt{(c + x_1)(d - x_1)/l} \right).$$

Оскільки у вершинах пластичних зон  $c, d$  КІЗ рівні нулеві, тоді

$$k^c = 0, k^d = 0. \quad (21)$$

Для пластичних зон  $L'_1$  і  $L''_1$  запишемо умови пластичності Треска-Сен-Венана [11]

$$\max\left\{\left|\sigma_1^{(j)}\right|, \left|\sigma_2^{(j)}\right|, \left|\sigma_1^{(j)} - \sigma_2^{(j)}\right|\right\} = \sigma_Y, \quad (22)$$

де

$$\sigma_{1,2}^{(j)} = 0.5 \left( \sigma_{xx}^{(j)} + \sigma_0^{(j)} \pm \sqrt{(\sigma_{xx}^{(j)} - \sigma_0^{(j)})^2 + 4(\tau_0^{(j)})^2} \right), j = 1, 2.$$

Отже, для знаходження невідомих функції  $G_1(\eta)$ ,  $G_2(\eta)$ , невідомих нормальних і дотичних напруження у пластичних зонах  $\sigma_0^{(1)}$ ,  $\sigma_0^{(2)}$ ,  $\tau_0^{(1)}$ ,  $\tau_0^{(2)}$  та довжин пластичних зон  $w_1^*$ ,  $w_2^*$ , отримано систему рівнянь (19)-(22).

#### Числовий аналіз.

Був проведений числовий аналіз задачі, який поданий на Рис. 2-3 при  $\nu = 0.3$ . Система сингулярних інтегральних рівнянь (19), (20) розв'язувалася числовим методом механічних квадратур, а система рівнянь (21), (22) розв'язувалася числовим методом Ньютона.

На Рис. 2 зображено залежність обезрозмірених довжин пластичних зон  $w_1^*$ ,  $w_2^*$  від параметра  $\varepsilon = \frac{s}{R}$  при фіксованому значенні  $\lambda = \frac{l}{R} = 0.5$ ,  $p_2 = 0$ . Графік 1 (для  $w_1^*$ ), 2 (для  $w_2^*$ ) побудовано при  $p_1 = 0.6$ , графік 3 (для  $w_1^*$ ), 4 (для  $w_2^*$ ) –  $p_1 = 0.5$ , графік 5 (для  $w_1^*$ ), 6 (для  $w_2^*$ ) –  $p_1 = 0.4$ .

На Рис. 3 зображено залежність обезрозмірених довжин пластичних зон  $w_1^*$ ,  $w_2^*$  від параметра  $\varepsilon = \frac{s}{R}$  при фіксованому значенні  $\lambda = \frac{l}{R} = 0.3$ ,  $p_2 = 0$ . Графік 1 (для  $w_1^*$ ), 2 (для  $w_2^*$ ) побудовано при  $p_1 = 0.6$ , графік 3 (для  $w_1^*$ ), 4 (для  $w_2^*$ ) –  $p_1 = 0.5$ , графік 5 (для  $w_1^*$ ), 6 (для  $w_2^*$ ) –  $p_1 = 0.4$ .

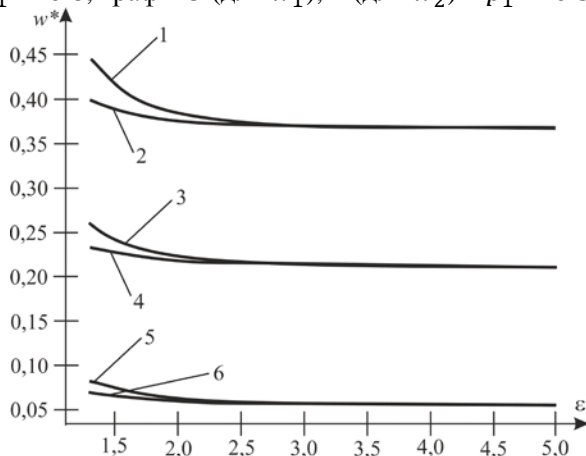


Рис. 2.

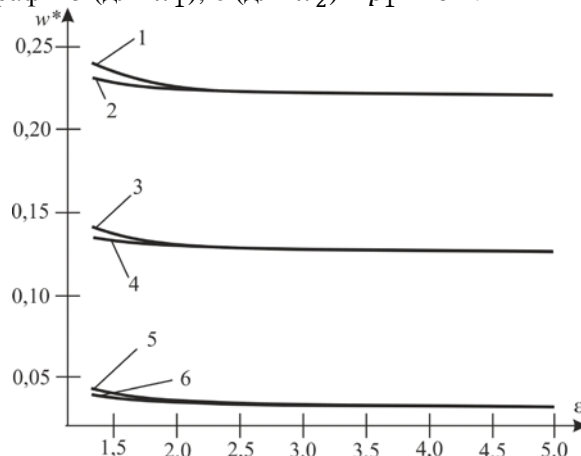


Рис. 3.

#### Висновки.

З використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язано задачу про розтяг безмежної ізотропної пластини з круговим отвором та радіальною наскрізною прямолінійною тріщиною на продовженні тріщини утворилися пластичні зони. Утворені пластичні зони моделювалися умови пластичності Треска-Сен-Венана. Розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. На сонові числового аналізу задачі побудовано графіки для довжин пластичних зон в залежності від прикладеного зовнішнього навантаження.

#### Список використаних джерел

1. X. Zhao, J. Li, J.-M. Ge, T. Sun, H. Deng, J.-G. Zhu, "Determination of fatigue crack tip location and plastic zone dimensions using displacement fields measured by digital image correlation method", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 320, 111060, 2025, <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2025.111060>.
2. Q. Pei, X.-M. Yao, L.-Z. Jin, C.-Y. Zhou, "Constraint effect and crack-tip plastic zone of the pipe with internal inclined surface cracks under external pressure", *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 147 (2), 021306, 2025, <https://doi.org/10.1115/1.4067676>.
3. A.O. Kaminsky, M.V. Dudyk, "Development of plastic zone near tip of interfacial crack with contacting faces", *International Applied Mechanics*, Vol. 60 (2), pp. 149–162, 2024, <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01269-7>.

4. **M. Slobodian**, I. Zvizlo, O. Bilash, M. Sorokaty, O. Petruchenko, L. Markevych, “Bending of a piecewise homogeneous plate with a circular interfacial materials separation zone and radial crack considering the strip contact of its edges”, *Vibroengineering Procedia*, Vol. 55, pp. 54–59, 2024, <https://doi.org/10.21595/vp.2024.24515>.
5. S.H. Moussavian, M. Jafari, M. Hajimohammadi. “Thermal stress intensity factors in composite plates with cracks arising from a circular hole”, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 47 (12), pp. 1634–1651, 2024, <https://doi.org/10.1080/01495739.2024.2428922>.
6. I. Slamani, H. Ferdjani, “Solution of a Dugdale-Barenblatt crack in an infinite strip by a hyper-singular integral equation”, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Vol. 133, 104625, 2024, <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104625>.
7. O. Bilash, **M. Slobodian**, R. Seliverstov, I. Zvizlo, O. Petruchenko, R. Kovalchuk, “Pure bending of a strip (Beam) with a transversal through crack located asymmetrically relative to its axis on the assumption of crack closure and striplike plastic zone near one of the tips”, *AIP Conference Proceedings*, 2949, 020002, 2023, <https://doi.org/10.1063/5.0165477>.
8. V.K. Opanasovych, M.M. Nykolyshyn, **M.S. Slobodian**, S.O. Alfavitska, O.K. Bilash, “Combined action of bending and tension of an isotropic plate with through crack in the absence of contact between the faces and with regard for the plastic zones and hardening of material at the tips”. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, Vol. 254 (1), pp. 117–128, 2021, <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05292-8>.
9. H. Sulym, V. Opanasovych, **M. Slobodian**, O. Bilash, “Pure bending of strip (beam) with crack in strip of tensile stress with allowance for plastic strips near crack tips”, *Acta Mechanica et Automatica*, Vol. 14, No. 1, pp. 44-49, 2020, <https://doi.org/10.2478/ama-2020-0007>.
10. “Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь: колективна монографія”, М.М. Кундрат, Н.А. Гук, Н.Л. Козакова та інші; за заг. ред. Р.М. Мартиняка, Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 392 р., 2022.
11. Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук, “Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами”, СПОЛЮМ, 2003.

**Рецензент:** Станкевич Володимир Зенонович, доктор фізико-математичних наук, професор, в.о. завідувача кафедри механіки Львівського національного університету імені Івана Франка.