

С.Б. Мікуліч, А.О. Сяський

Луцький національний технічний університет

**ВИКОРИСТАННЯ НЕПРЯМОГО ПІДХОДУ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПЛАСТИНЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ВКЛЮЧЕННЯМИ**

*У роботі представлено числову реалізацію методу дослідження напруженого стану нескінченних пластинок з жорсткими включеннями. Розв'язання задачі проводилося на основі сумісного використання методу граничних інтегральних рівнянь, апарату теорії функцій комплексної змінної. Числова реалізація запропонованого підходу здійснювалася за використання методу механічних квадратур та колокації. Тестування ефективності та точності запропонованого підходу проведено для випадку дослідження динамічного напруженого стану пластинчастого елемента з жорстким нерухомим круговим включенням за дії падаючої хвилі стиску. Отримані числові розв'язки порівнювалися з відповідними відомими у літературі аналітичними розв'язками. Відхилення результатів становило не більше 3%. Продемонстровано ефективність та універсальність розробленого підходу.*

*Ключові слова:* метод граничних елементів, пластинки, напружений стан, включення, динамічне навантаження.

S.B. Mikulich, A.O. Syaskyi

**USE OF THE INDIRECT APPROACH OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD TO THE STUDY OF THE DYNAMIC STRESS STATE OF PLATE ELEMENTS WITH INCLUSIONS**

*The paper presents a numerical implementation of the method for studying the stress state of infinite plates with rigid inclusions. The problem was solved based on the combined use of the method of boundary integral equations and the apparatus of the theory of functions of a complex variable. The numerical implementation of the proposed approach was carried out using the method of mechanical quadratures and collocation. Testing of the proposed approach's effectiveness and accuracy was carried out to study the dynamic stress state of a plate element with a rigid fixed circular inclusion under the action of an incident compression wave. The obtained numerical solutions were compared with the corresponding analytical solutions known in the literature. The deviation of the results was no more than 3%. The effectiveness and versatility of the developed approach are demonstrated.*

*Keywords:* boundary element method, plates, stress state, inclusion, dynamic loading.

**Постановка проблеми.** Майже у всіх інженерних конструкціях наявні концентратори напружень у вигляді отворів, включень чи підсилень. Оцінка концентрації напружень є важливою при визначенні надійності та термінів експлуатації відповідних деталей, особливо за динамічного чи вібраційного навантаження. Крім того, концентратори напружень впливають на втомне руйнування, що виникає через тріщини або пошкодження.

Слід відмітити, що концентрація напружень наявна також і у матеріалах з структурними неоднорідностями: порожнинами, отворами. За дії динамічних навантажень у таких матеріалах створюється градієнт напружень, що призводить до накопичення пошкоджень. Важливе значення мають дослідження розподілу напружень в околі таких концентраторів при вивченні механічної поведінки відповідних елементів конструкцій, особливо за наявності геометричної неоднорідності. Розподіл напружень та деформацій у таких елементах конструкцій істотно залежить від форми включення, його механічних, фізичних та геометричних характеристик. Ґрунтовний аналіз напружено-деформованого стану геометрично-однорідних тіл дозволяє запропонувати підходи до зменшення інтенсивності напружень шляхом підбору відповідних механічних і фізичних характеристик компонентів включення.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У літературі для задач про дослідження концентрації напружень біля кругових включень за статичного та квазістатичного навантаження у нескінченних пластинках отримано аналітичні розв'язки у формі рядів у роботах О. М. Гузя, В. Д. Кубенка [1], Г. М. Савіна [2]. Для включень іншої геометрії: еліптичної, прямокутної та інших форм, у літературі використовуються наближені методи, зокрема, метод багатократних відображень [2].

Крім того, для дослідження такого класу задач вченими застосовувалися і напівчислові методи, такі як метод граничних елементів [3-5], що дозволило отримати сингулярні та регулярні інтегральні рівняння для випадку статичного та квазістатичного навантаження.

Проте, даний клас задач має велику актуальність і зараз, про що свідчать численні роботи [6-12], для розв'язання яких у літературі використовуються як числові, так і аналітично-числові методи.

У [6] представлено результати числового аналізу напруженого стану тонкої пружної

прямокутної пластини з круглим отвором і кільцевим включенням із функціонально градієнтованого матеріалу, що отримані за використання методу скінченних елементів. У [7] запропоновано підходи до числового аналізу розподілу напружень у прямокутних пластинах з підкріпленими видовженими отворами за дії осесиметричного розтягувального навантаження.

У [8] представлено математичну модель задачі дослідження напружено – деформованого стану пластини з жорстким лінійним включенням за випадку дії статичного згинального навантаження, для розв’язання якої отримано сингулярне інтегральне рівняння. Метод сингулярних інтегральних рівнянь використовувався у [9] для побудови двовимірної моделі круглої пластини з криволінійним включенням та тріщиною. У [10] представлена аналітична модель переходу форми з 2D на 3D у тонких кругових елементах з включеннями за дії згинального навантаження.

Побудові аналітичних розв’язків задачі про напруженого стану пластинки з круговим м’яким та жорстким включенням присвячена робота [11]. Тут розв’язок Кірша модифіковано для випадку жорсткого або м’якого включення за використання теорії суперпозиції та критерію розподілу напружень.

У [12] запропоновано використання модифікованого методу граничних елементів до аналізу напружено-деформованого стану пластини з багат шаровим включенням довільної форми, що перебуває в умовах статичного навантаження. Однією з переваг використання методу граничних елементів є можливість визначити всі компоненти напружень та деформацій на межі розділу між включенням та матрицею. Крім того, використання такого підходу дозволило проводити числові дослідження для включень практично довільної форми. У [13] продемонстровано ефективність використання методу граничних елементів та граничних інтегральних рівнянь до дослідження динамічного напруженого стану пластинчастих елементів з розрізами.

У [14] побудовано інтегральні рівняння другої основної задачі для пластинчастих елементів з включеннями. Тут отримано вигляд фундаментальних функцій впливу напружень для випадку динамічного навантаження. Задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь.

**Постановка завдання.** Метою даної роботи було розробити числову реалізацію сформованої у [14] методики дослідження динамічного напружено-деформованого стану тіл з включеннями та провести числовий аналіз для випадку нескінченних пластинок з жорсткими нерухомими включеннями кругової форми за дії квазістатичного одновісного навантаження.

**Викладення основного матеріалу.** Розглянемо пластинчастий елемент, у який впаяне жорстке включення (рис. 1). Включення додатково зафіксовано таким чином, щоб на границі пластинчастого елемента та включення були відсутні переміщення (рис. 1).

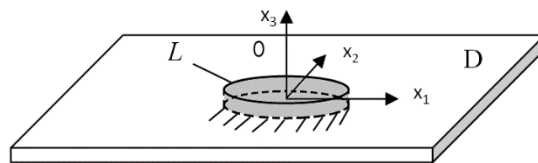


Рис. 1. Модель задачі

Позначимо через  $L$  границю контуру включення, через  $D$  – область, яку займає пластинка. Віднесемо пластинчастий елемент до декартової системи координат  $Ox_1x_2x_3$ , яку розмістимо у центрі ваги включення (рис. 1). Відповідно до [14], граничні умови задачі записуються у вигляді:

$$u_i|_L = 0, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Тут  $u_1$  та  $u_2$  – відповідно переміщення точок границі пластинки в напрямку осей  $Ox_1$  та  $Ox_2$ .

Для розв’язання поставленої задачі використаємо метод граничних елементів [15]. Відповідно до [15], інтегральне представлення переміщень у випадку другої основної задачі можна подати у вигляді [14]:

$$u_i(x_1, x_2) = - \int_L u_j(x_1^0; x_2^0) \cdot P_{ji}^*(x_1; x_2; x_1^0; x_2^0) ds, \quad (2)$$

де  $P_{kj}^*$  — фундаментальні функції, що відповідають напруженню у  $k$ -му напрямку від дії одиничних сил у  $j$ -му напрямку. Для двовимірного випадку значення індексів приймаються:  $k, j = 1, 2$ .

Відповідно до [15], використовуючи вектор Буссинеска, фундаментальний тензор функцій впливу, що входять до інтегрального представлення (2), для випадку квазістатичного навантаження можна записати у вигляді, аналогічному до [14]:

$$P_{ii}^* = \frac{1}{2\pi} \left( F_1 n_i \frac{\partial r}{\partial x_i} + F_2 \frac{\partial r}{\partial n} + 2F_3 \left( \frac{\partial r}{\partial x_i} \right)^2 \frac{\partial r}{\partial n} \right),$$

$$P_{ij}^* = \frac{1}{2\pi} \left( F_4 n_j \frac{\partial r}{\partial x_i} + F_2 n_i \frac{\partial r}{\partial x_j} + 2F_3 \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial n} \right),$$

де  $\vec{n}$  — вектор нормалі до границі. Тут функції  $F_1, F_2, F_3, F_4$  мають аналогічну структуру до [14]:

$$F_1 = \left( \frac{c_1^2}{c_2^2} - 1 \right) \psi' + \left( \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) \chi' + \left( \frac{c_1^2}{c_2^2} + 1 \right) \frac{\chi}{r};$$

$$F_2 = \psi' - \frac{\chi}{r}, F_3 = -\chi' + 2 \frac{\chi}{r}, F_4 = \left( \frac{c_1^2}{c_2^2} - 2 \right) (\psi' + \chi') + \frac{c_1^2}{c_2^2} \frac{\chi}{r}.$$

У випадку вказістатичного навантаження відповідно до [15]:

$$\psi = \frac{i\pi}{2} \left( -H_0^2 \left( \frac{\omega r}{c_2} \right) + \frac{c_2}{\omega r} \left( H_1^2 \left( \frac{\omega r}{c_2} \right) - \frac{c_2}{c_1} H_1^2 \left( \frac{\omega r}{c_1} \right) \right) \right),$$

$$\chi = \frac{i\pi}{2} \left( H_2^2 \left( \frac{\omega r}{c_2} \right) - \frac{c_2^2}{c_1^2} H_2^2 \left( \frac{\omega r}{c_1} \right) \right),$$

де  $r_i = \frac{\partial r}{\partial x_i}$ ,  $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$ ;  $H_k^2(z) = J_k(z) - iY_k(z)$  — функції Ганкеля II роду;  $J_k(z)$ ,  $Y_k(z)$  — відповідно функції Бесселя I та II роду,  $i, j=1, 2$ . Інтегрування вздовж границі проводиться за змінними  $x_1^0, x_2^0$ .

Використовуючи запропоновану у [14] методику зведемо розв'язання задачі до системи інтегральних рівнянь, які у роботі отримано шляхом задоволення граничних умов (1) при підстановці інтегральних представлень (2) з урахуванням представлень для підінтегральних функцій, встановлення їх особливостей, виділення нерегулярних складових та використання формул Племеля-Сохоцького [2, 15] при граничному переході. Інтегральні рівняння поставленої у меті роботи задачі у матричній формі записуються:

$$C \cdot U + \int_L F \cdot U ds = P, \quad (3)$$

де  $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$  - матриця коефіцієнтів, що визначається при граничному переході за використання формул Племеля-Сохоцького [2, 15],  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$  - матриця невідомих переміщень,  $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$  - матриця відомих величин, що отримується при урахуванні впливу заданого навантаження шляхом задоволення граничних умов (1),  $F = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$  - матриця відомих підінтегральних функцій, які отримуються при задоволенні граничних умов (1) та мають вигляд:

$$f_{jk} = P_{jk}^* \Big|_{\substack{(x_1, x_2) \in L \\ (x_1^0, x_2^0) \in L}}$$

Система інтегральних рівнянь (3) розв'язувалася числово за використання методу механічних квадратур сумісно з методом колокації. Для цього проводилася параметризація границі контуру включення  $L$  у вигляді [2]:

$$x_1 = \varphi(\theta); \quad x_2 = \psi(\theta), \quad t = g(\theta) = \varphi(\theta) + i\psi(\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

Враховуючи, що підінтегральні функції  $f_{jk}$  при малих значеннях аргументу є нерегулярними, використаємо уточнені квадратурні формули з урахуванням типу їх особливостей. Для інтегралів, що мають логарифмічну особливість використаємо квадратурні формули виду [16]:

$$\int_{\Omega} f(t, z_v) \ln r dt = \square \sum_{n=1}^K f_{vn} \left( \ln \frac{r_n}{\xi_n} - \sum_{m=1}^M \frac{\xi_n^m}{m} \cos(\theta - \theta_n) \right) g'_n, \quad (4)$$

де

$$g'_n = g'(\theta_n), \quad \theta_n = \square n, \quad z_v = z(\tilde{\theta}_v), \quad \tilde{\theta}_v = \theta_v + \square/2, \quad v = \overline{1, K}, \quad \square = 2\pi/K, \quad M = \frac{K}{2}.$$

Для решти інтегралів, що не мають логарифмічної та сингулярної особливості, використаємо такі квадратурні співвідношення підвищеної точності [17]:

$$\int_{\Omega} qf(t, z_v) dt = \square \sum_{n=1}^K q_n f_{vn} g'_n, \quad (5)$$

де  $f_{vn} = f(t_n, z_v)$ .

При реалізації запропонованого підходу точки колокації вибиралися з урахуванням наступних залежностей [17]:

$$z_v = x_1 + ix_2, t_n = x_1^0 + ix_2^0, r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}.$$

Використання квадратурних формул (4)-(5) до інтегральних рівнянь (3) дозволяє звести розв'язання задачі до системи рівнянь, що записується у вигляді:

$$A \cdot U = P, \tag{6}$$

де  $A = \{A_{jk}\}$ ,  $A_{jk} = C_{jk} + F_{jk}$ ,  $U = \{u_k\}$ ,  $P = \{P_j\}$ ,  $j, k = \overline{1..K}$

Для розрахунку головних нормальних напружень побудуємо аналітичні залежності у інтегральній формі. Для цього використаємо формули [2, 15] для випадку плоского напруженого стану:

$$\sigma_{11} = \rho \left( c_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (c_1^2 - 2c_2^2) \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right), \sigma_{22} = \rho \left( c_1^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (c_1^2 - 2c_2^2) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right), \tag{7}$$

де  $c_1$ ,  $c_2$  - швидкості хвиль розширення визначається та хвиль зсуву [2, 15], які у випадку плоского напруженого стану визначаються за формулами:

$$c_1^2 = \frac{E}{\rho(1 - \nu^2)}, c_2^2 = \frac{E}{2\rho(1 + \nu)}.$$

Тут  $E$  - модуль пружності першого роду матеріалу (модуль Юнга),  $\rho$  - густина матеріалу,  $\nu$  - коефіцієнт Пуассона.

Підставляючи представлення для переміщень (2) у формули (7) отримуємо:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \int_L H_{11} u_1 ds + \int_L H_{12} u_2 ds, \\ \sigma_{22} &= \int_L H_{21} u_1 ds + \int_L H_{22} u_2 ds, \end{aligned}$$

де функції  $H_{ij}$  є відомими та при розрахунку напружень визначаються числово у відповідних точках. У випадку розрахунку напружень на границі включення та матриці було додатково встановлено особливості підінтегральних функцій та використано формули Племеля-Сохоцького [2, 15] при граничному переході.

Для перевірки достовірності та точності запропонованого аналітично-числового підходу проведемо тестування на задачі про дослідження концентрації напружень на границі жорстко в'язаного кругового нерухомого включення. Числові розрахунки проведемо для різних значень коефіцієнту Пуассона у випадку дії «падаючої» хвилі стиску, потенціали якої задаються [1, 2]:

$$\Phi = \Phi_0 e^{i\omega(\tau - \omega_1 x_1)}, \Psi = 0, \tag{8}$$

де  $\omega$  - частота,  $\omega_1 = \frac{\omega}{c_1}$ ,  $\Phi_0 = \frac{\rho}{\omega^2}$ . Хвиля поширюється у напрямку осі  $Ox_1$ . 2D модель навантаження представлена на рис. 2.

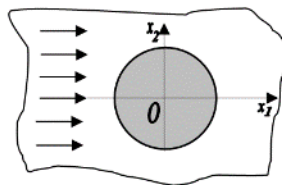


Рис. 2. 2D модель навантаження

Така задача є динамічним аналогом задачі про концентрацію напружень біля отворів (включень) при двоосьовому основному напруженому стані. У випадку усталених коливань математично таке навантаження описується з допомогою плоскої пружної хвилі, що падає на отвір (включення). Така хвиля породжує відбиті хвилі. Сумарне хвильове поле визначає напружений стан у пружній пластинці. При цьому, на контурі включення виникають відбиті хвилі стиску, потенціали (8)  $\Psi$  та  $\Phi$  яких задовольняють рівнянням Гемгольца [1, 2].

У [1, 2] за використання методу рядів отримано аналітичний розв'язок задачі у вигляді нескінченного ряду, що характеризується високою збіжністю. Відповідні результати у вигляді зображення з книги [1] наведено на рис. 3. Тут приймалося, що  $\alpha = \omega_2 = \frac{\omega}{c_2}$ .

Тому для тестування запропонованого підходу отримаємо розв'язок цієї ж задачі при аналогічних значеннях вхідних параметрів. Розрахунки проводитимемо у двох точках границі контуру жорсткого включення:  $\theta = 0$  та  $\theta = \pi$ .

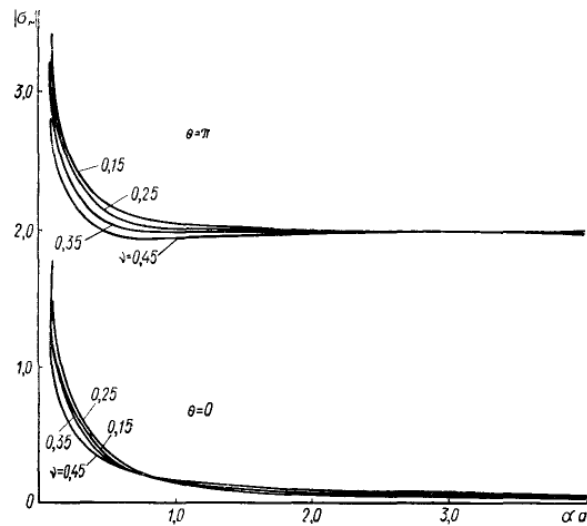


Рис. 3. Розподіл радіальних напружень на границі кругового нерухомого включення, отримані у [1] методом рядів

Результати числових розрахунків на основі розвиненої у роботі методики представлено на рис. 4. Тут наведено криві радіальних напружень для випадку аналогічних значень величин коефіцієнта Пуассона:  $\nu=0,15, 0,25, 0,35$  та  $\nu=0,45$  для зручності порівняння та аналізу. При розрахунках було вибрано  $n=50$  точок розбиття границі включення.

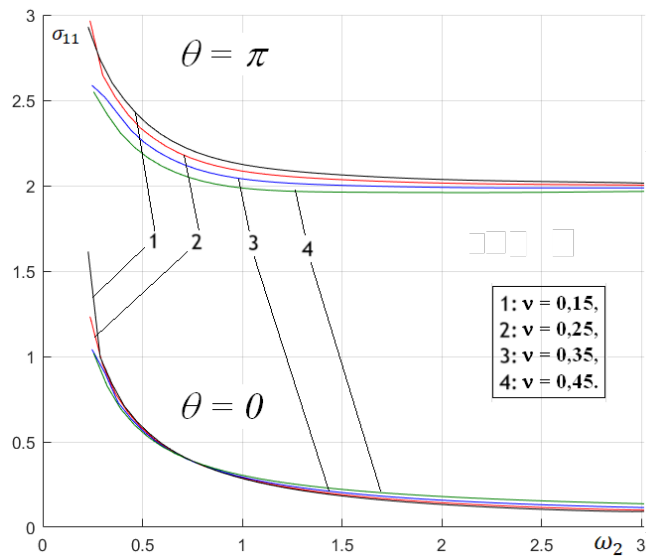


Рис. 4. Розподіл радіальних напружень на границі кругового нерухомого включення, отримані на основі розробленої методики

При порівнянні результатів, наведених на рис. 3 та рис. 4, видно, що напруження відрізняються на 2-3%, що підтверджує ефективність запропонованого підходу. Крім того, серед переваг розробленої методики є можливість проводити аналіз напруженого стану вздовж усіх точок границі включення, оскільки, на відміну від методу рядів, розв'язок будується для усіх точок границі одночасно. На рис. 5 наведено зміну розподілу нормальних напружень вздовж границі включення, що розраховані для декількох значень частотної характеристики  $\omega_2 = 0,25; 0,5; 1,0; 1,5$ .

Кільцеві напруження вздовж границі включення є значно меншими від радіальних напружень. Це пояснюється тим, що фронт хвилі діє вздовж осі  $Ox_1$ , що у точці  $\theta=0^\circ$  співпадає з напрямком нормалі до границі включення.

Розподіл кільцевих напружень, розрахованих у аналогічних точках:  $\theta = 0, \theta = \pi$  наведено на рис. 6.

Слід відмітити, запропонований у цій роботі підхід характеризується істотно ширшими можливостями розрахунків. Крім того, цей підхід є універсальним для дослідження напруженого стану у випадку включень іншої гладкої форми та не потребує, на відміну від методу рядів, жодних

модифікацій. Переваги цього підходу будуть продемонстровані у ряді наступних досліджень.

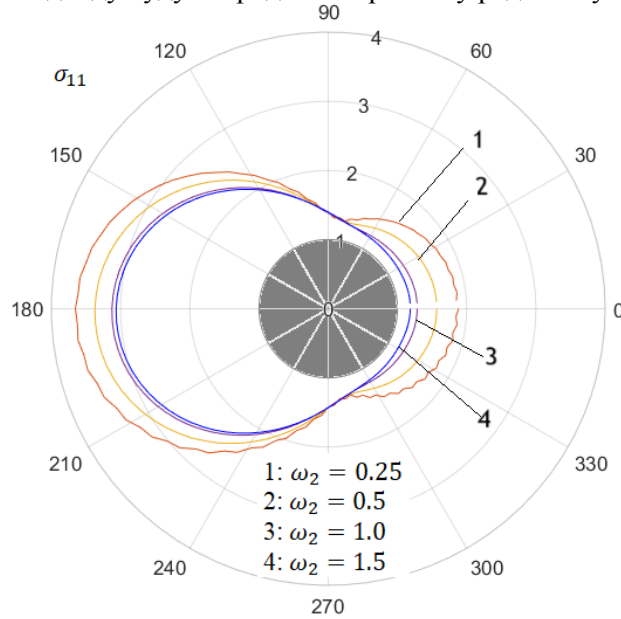


Рис 5. Зміна розподілу нормальних напружень вздовж границі включення

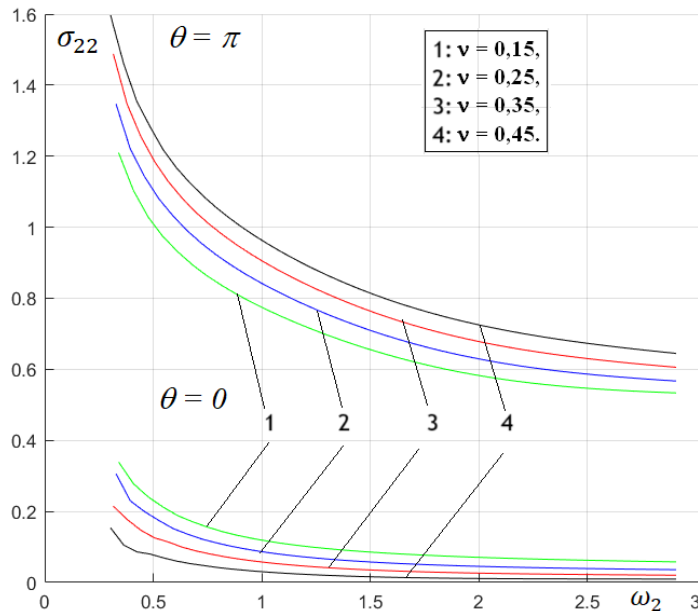


Рис. 6. Розподіл кільцевих напружень, розрахованих у аналогічних точках:  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$

### Висновки

Запропонована у роботі числова реалізація методу, розвинутого у [14], що дозволяє проводити дослідження та аналіз дифракції пружних хвиль у пластинчастих елементах з жорсткими впаяними включеннями, є більш універсальною, що продемонстровано на основі числових розрахунків. Подальші дослідження будуть спрямовані на вивчення впливу концентраторів напружень у формі еліптичних включень, що є моделями зварних швів, на розподіл напружень.

### Список використаних джерел

1. Guz, A.N., Kubenko, V.D. and Cherevko, M.A. Diffraction of Elastic Waves. Science Dumka, Kiev, 1978, 307 p.
2. Savin G. N. Stress distribution around holes. NASA, 1970, 1008 p.
3. Katsikadelis J.T. The Boundary Element Method for Engineers and Scientists: Theory and Applications (Second Edition), Academic Press, 2016, 446 p.
4. Gwinner J. , Stephan E.P. Advanced Boundary Element Methods: Treatment of Boundary Value, Transmission and Contact Problems, Springer, 2018, 652 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-92001-6>

5. Banjai L., Sayas F.-J. Integral Equation Methods for Evolutionary PDE: A Convolution Quadrature Approach, Springer, 2022, 268 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-13220-9>
6. Hart E. L., Terokhin B. I. Computer Simulation of the Stress-Strain State of the Plate with Circular Hole and Functionally Graded Inclusion. Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA), 2021, 29, 1, PP. 42–53, DOI 10.15421/142103
7. Hart E.L., Hudramovich V.S. Computer Simulation of the Stress-Strain State of Plates with Reinforced Elongate Rectangular Holes of Various Orientations. Strength of Materials and Theory of Structures, 2022, 108, PP. 77-86. DOI: 10.32347/2410-2547.2022.108.77-86
8. Nazarenko O., Usov A., Volkova M., Kozin O. Mathematical Modeling of the Stress-Strain State of a Plate with Rigid Linear Inclusion and Mixed Boundary Conditions. Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського, 1/2023 (138), PP. 22-28. DOI <https://doi.org/10.32782/1995-0519.2023.1.2>
9. Zelenyak V., Kolyasa L., Klapchuk M., Oryshchyn O., Vozna S. Determining Patterns in Thermoelastic Interaction between a Crack and a Curvilinear Inclusion Located in a Circular Plate, Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2021, 6/7 (114), PP. 52-58. DOI: [10.15587/1729-4061.2021.24399](https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.24399)
10. Oshri O., Biswas S., Balazs A.C. Modeling the behavior of inclusions in circular plates undergoing shape changes from two to three dimensions. Phys. Rev. E, 2019, 100, 043001. DOI: [10.1103/PhysRevE.100.043001](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.043001)
11. Lavrenyuk V. I., Lavrenyuk N. V. The Stress–Strain State of a Plate with a Multilayer Inclusion. International Applied Mechanics, 2007, 43, 3, PP.329-334.
12. Rana A.K., Paulb S.K., Deya P.P. Stress field in an isotropic elastic solid containing a circular hard or soft inclusion under uniaxial tensile stress. Materials Today: Proceedings, 2019, 11, PP. 657–666. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.03.024>
13. Shvabyuk V., Sulym H., Mikulich O. (2015) Stress State of Plate with Incisions under the Action of Oscillating Concentrated Forces, Acta Mechanica et Automatica, 9(3), 140-144. DOI [10.1515/ama-2015-0023](https://doi.org/10.1515/ama-2015-0023)
14. Шваб'юк В.І., Фурс Т.В., Коменда Н.В., Мікуліч С.Б. Інтегральні рівняння задачі дифракції хвиль у пружних середовищах з включеннями за дії нестационарних навантажень. Наукові нотатки, 75, Луцьк, 2023, С. 95-99.
15. Brebbia, C., Telles, J., Wrobel, L.: Boundary element techniques. Springer, New York, 1984.
16. Krenk. S., On quadrature formulas for singular integral equations of the first and second kind. Quarterly of Applied Mathematics, 33(3), 1975, 128-136. DOI: [10.1090/qam/448967](https://doi.org/10.1090/qam/448967)
17. Lifanov I. K., Singular Integral Equations and Discrete Vortices, VSP, Utrecht, 1996.