

М.П. Ярошевич^[0000-0002-2436-5608], В.С. Пуць^[0000-0003-3164-6173], Т.С. Ярошевич^[0000-0001-8003-0514],
В.Л. Мартинюк^[0000-0002-6914-2336]

Луцький національний технічний університет

ДИНАМІЧНА СИНХРОНІЗАЦІЯ ІНЕРЦІЙНИХ ВІБРОЗБУДНИКІВ БІГАРМОНІЧНОГО ВІБРОПРИВОДУ

Розглядається можливість отримання стійких бігармонічних коливань вібромашини з кінематично незв'язаними інерційними віброзбудниками. Досліджується динамічна синхронізація двох пар інерційних віброзбудників з кратними частотами обертання. Задача розв'язується за допомогою інтегрального критерію стійкості (екстремальної властивості) синхронних рухів. Встановлені зсуви фаз у можливих синхронних рухах віброзбудників, умови існування та стійкості синхронних рухів. Отримано формули для вібраційних моментів, які забезпечують самосинхронізацію віброзбудників. Теоретичні результати підтверджуються чисельним моделюванням.

Ключові слова: вібромашина, бігармонічні коливання, дебалансний віброзбудник, самосинхронізація, інтегральний критерій.

M. Yaroshevich, V. Puts, T. Yaroshevych, V. Martyniuk

DYNAMIC SYNCHRONIZATION OF INERTIAL VIBRATION EXCITERS BIHARMONY VIBRATION DRIVE

The possibility of obtaining stable biharmonic oscillations of a vibration machine with kinematically uncoupled inertial vibration exciters is considered. The dynamic synchronization of two pairs of inertial vibration exciters with multiple rotation frequencies is investigated. The problem is solved using the integral stability criterion (extreme property) of synchronous movements. Phase shifts in possible synchronous movements of vibration exciters, conditions for the existence and stability of synchronous movements are established. Formulas for vibration moments that ensure self-synchronization of vibration exciters are obtained. Theoretical results are confirmed by numerical modeling.

Keywords: vibration machine, biharmonic oscillation, unbalanced vibrator, self-synchronization, integral criterion.

Постановка проблеми. Вібромашини з інерційними збудниками, що самосинхронізуються, серійно випускаються та успішно працюють як на підприємствах нашої країни, так і багатьох країн світу [1-3]. Основними перевагами використання явища самосинхронізації у приводі вібромашин є: усунення високонавантажених кінематичних передач між віброзбудниками; розосередження збурюючої сили вздовж робочого органу (для забезпечення збільшення жорсткості робочого органу); зменшене навантаження на підшипники віброзбудників; можливість прикладання збурюючої сили у центрі інерції системи. Разом з тим, можливості вдосконалення вібромашин на основі явища самосинхронізації ще далеко не вичерпані.

Аналіз існуючих досліджень і публікацій. На сьогодні явище динамічної синхронізації інерційних віброзбудників досліджено достатньо добре [1, 2]. В [4] розглядаються дві нові можливості удосконалення вібромашин, які містять в конструкції віброзбудники, що самосинхронізуються, а саме: почерговий пуск віброзбудників та ефект вібраційного підтримання обертання. Переваги використання почергового пуску інерційних віброзбудників обґрунтовується також в статті [5]. Можливості використання ефекту самосинхронізації для створення вібромашин із законом коливань робочого органу, який може змінюватися при роботі, демонструється в [6]. В працях [7, 8] звертається увага на можливість розв'язування практичних задач самосинхронізації за методикою дослідження ефекту вібраційного захвату обертання незрівноваженого ротора. Проте, в існуючих дослідженнях розглядається, зазвичай, самосинхронізація віброзбудників з однаковими частотами обертання.

Випадкам самосинхронізації віброзбудників з кратними частотами обертання присвячено істотно менше досліджень [1, 9-12]. В монографії [1] вказується на значно більшу складність розв'язування даних задач, а також на проблеми практичного використання ефекту кратної самосинхронізації. У статті [10] обґрунтовується можливість використання інтегрального критерію стійкості синхронних рухів для розв'язування задач кратної самосинхронізації. Частковий самосинхронізації інерційних віброзбудників бігармонічного вібропривода присвячені статті [11, 12].

Мета досліджень. Продемонструвати можливість отримання горизонтальних бігармонічних коливань робочого органу вібромашини з інерційними віброзбудниками, які не з'єднані кінематичними передачами.

Методика дослідження. Для вирішення поставлених задач використано методи теоретичної та вібраційної механіки, а також інтегральний критерій стійкості синхронних рухів. Чисельне моделювання проводилося з використанням математичного пакету Maple.

Викладення основного матеріалу. Опис динамічної системи та диференціальні рівняння руху. На віброуючому робочому органі вібромашини (несучому твердому тілі), жорстко закріплені дві пари інерційних віброзбудників (рис. 1). Робочий орган встановлено на нерухомій основі за допомогою гвинтових циліндричних пружин. В загальному випадку робочий орган може здійснювати плоскі коливання. Усі віброзбудники приводяться в обертання від незалежних асинхронних електродвигунів. Причому, віброзбудники у парах обертаються в протилежних напрямках; пари віброзбудників приводяться в обертання від електродвигунів з кратними синхронними частотами. Осі віброзбудників перпендикулярні до площини коливань робочого органу.

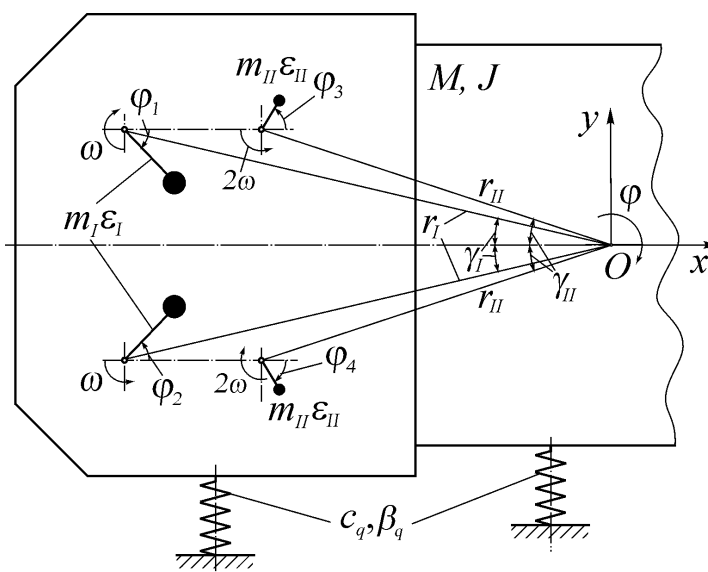


Рис. 1. Динамічна схема бігармонічного віброприводу

Рівняння руху такої динамічної системи можна подати у вигляді [1]:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{x} + \beta_x \dot{x} + c_x x &= \sum_{s=1}^4 m_s \varepsilon_s \dot{\varphi}_s^2 \cos \varphi_s, & M\ddot{y} + \beta_y \dot{y} + c_y y &= -\sum_{s=1}^4 m_s \varepsilon_s \dot{\varphi}_s^2 \sin \varphi_s, \\
 J\ddot{\varphi} + \beta_\varphi \dot{\varphi} + c_\varphi \varphi &= \sum_{s=1}^4 m_s \varepsilon_s r_s \dot{\varphi}_s^2 \sin(\varphi_s + \delta_s), & I_s \ddot{\varphi}_s &= L_s(\dot{\varphi}) - R_s(\dot{\varphi}) + \Psi_s,
 \end{aligned} \quad (1)$$

де M , J , $q_j = x, y, \varphi$ – маса, момент інерції та узагальнені координати пружно підв'язаного робочого органу; φ_s , $m_s \varepsilon_s$ – кути повороту та статичні моменти віброзбудників; β_q , c_q – коефіцієнти в'язкого опору та жорсткості пружин підвіски робочого органу; r_i – віддаль від центру ваги O до осі i -го віброзбудника; I_s – зведені моменти інерції віброзбудників; $L_i(\dot{\varphi}_i)$ – обертовий момент на валу електродвигуна; $R_i(\dot{\varphi}_i)$ – зведений момент сил опору обертання (обумовлений переважно опором у підшипниках); g – прискорення вільного падіння.

Аналітичні дослідження самосинхронізації бігармонічних віброзбудників. У розглядуваних практичних випадках віброзбудники та електродвигуни пар номінально однакові: $m_1 \varepsilon_1 = m_2 \varepsilon_2 = m \varepsilon_{1,2} = m_I \varepsilon_I$; $m \varepsilon_{3,4} = m_{II} \varepsilon_{II}$; $r_{1,2} = r_I$; $r_{3,4} = r_{II}$; $I_{1,2} = I_I$; $I_{3,4} = I_{II}$. У разі коли, консервативні сили по коливних координатах не враховуються, для розв'язування прикладних задач динамічної синхронізації інерційних віброзбудників може бути використаний інтегральний критерій стійкості синхронних рухів [1, 4]. Згідно даного критерію, стійкі синхронні рухи віброзбудників відповідають точкам грубих мінімумів, деякої функції D різниці фаз обертання збудників. Дану функцію називають потенціальною. Оскільки у технічних задачах парціальні кутові

швидкості віброзбудників вважаються однаковими (достатньо близькими), то роль потенціальної функції D буде відігравати середнє значенню функції Лагранжа Λ робочого органу [1]. Внаслідок припущення про «м'якість» пружних опор робочого органу ($\dot{\varphi}_i \gg p_q$, де p_q – власні частоти коливань робочого органу), функція Лагранжа Λ дорівнює середньому значенню його кінетичної енергії:

$$D = \frac{1}{2} \langle M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + J\dot{\varphi}^2 \rangle. \quad (2)$$

Зазначимо, що кутові дужки $\langle \dots \rangle$ вказують на усереднення виразів за швидким часом $\tau = \omega t$.

Згідно методики дослідження, систему рівнянь коливань робочого органу (1) достатньо розв'язувати за припущення про рівномірне обертання віброзбудників: $\varphi_i = \varphi_i^0 = \sigma_i(\omega_i t + \alpha_i)$, де $\sigma_i = \pm 1$ в залежності від напрямку обертання віброзбудника; $\omega_{1,2} = \omega$, $\omega_{3,4} = 2\omega$; ω – частота кратно-синхронного обертання. У цьому разі рівняння руху робочого органу перетворюються на звичайні лінійні диференціальні рівняння малих вимушених коливань. З урахуванням розв'язків рівнянь (1), після усереднення виразу (2) отримуємо формулу для потенціальної функції:

$$D = -V_I \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - V_{II} \cos(\alpha_3 - \alpha_4), \quad (3)$$

де $V_I = \frac{(m_I \varepsilon_I r_I \omega)^2}{2J}$, $V_{II} = \frac{2(m_{II} \varepsilon_{II} r_{II} \omega)^2}{J}$ – максимальні значення (модулі) вібраційних моментів.

Як відомо, вібраційні моменти характеризують усереднений вплив вібрації на обертання віброзбудників; саме вібраційні моменти призводять (за виконання певних умов) до самосинхронізації віброзбудників.

Вираз для потенціальної функції (3) містить лише різниці фаз віброзбудників з однаковими частотами. Різниці фаз збудників з кратними частотами відсутні. Звідси слідує, що динамічний зв'язок між парами віброзбудників відсутній. Звичайно, таке заключення справедливе лише у розглядуваному наближенні. Отже, у першому наближенні (реалізованого на практиці) задача про кратну самосинхронізацію розпадається на дві однакові задачі. Кожна з них окремо є відомою задачею про самосинхронізацію двох збудників з однаковими частотами обертання в протилежних напрямках, які встановлені на робочому органі з плоскими коливаннями. Тоді аналогічно [1], нескладно встановити, що протифазні режими обертання віброзбудників у парах будуть стійкими за будь-яких поєднань параметрів; необхідним є лише виконання умов $r_I \neq 0$, $r_{II} \neq 0$. Умови існування синфазних режимів руху можна подати у вигляді [1]:

$$k_{1-2} |\omega_1 - \omega_2| / V_{I\varphi} < 1, \quad k_{3-4} |\omega_3 - \omega_4| / V_{II\varphi} < 1,$$

де k_{1-2}, k_{3-4} – коефіцієнти демпфування. Для зарезонансних вібромашин з однаковими (близькими) парціальними частотами дані умови обов'язково виконуються. Тобто, на практиці обов'язково мають встановитися два усталені режими протифазного обертання віброзбудників у парах. Відповідно, робочий орган вібромашини буде коливатися за бігармонічним законом.

Результати комп'ютерного моделювання. Моделювання зводилося до чисельного інтегрування системи (1) та рівнянь динамічної моделі асинхронного електродвигуна [8]. Параметри системи: $M = 108 \text{ kg}$; $J = 2,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $c_q = 3,5 \cdot 10^4 \text{ N/m}$; $\beta_q = 500 \text{ kg/s}$; $m_I = 3,2 \text{ kg}$; $\varepsilon_I = 0,02 \text{ m}$; $I_1 = 0,008 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $I_2 = 0,005 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; $r_I = 0,76 \text{ m}$; $r_{II} = 0,51 \text{ m}$; $\gamma_I = 0,13 \text{ rad}$; $\gamma_{II} = 0,11 \text{ rad}$; електродвигуни $P_N = 0,18 \text{ kW}$, $\omega_s = 157 \text{ rad/s}$. Зазначимо, що основні віброзбудники приводяться в обертання за допомогою клинопасової передачі з передатним числом 2:1.

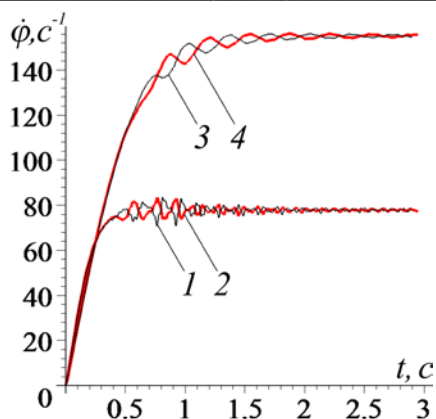


Рис. 2. Зміни в часі частоти віброзбудників:
1) $\dot{\varphi}_1$; 2) $-\dot{\varphi}_2$; 3) $-\dot{\varphi}_3$; 4) $\dot{\varphi}_4$

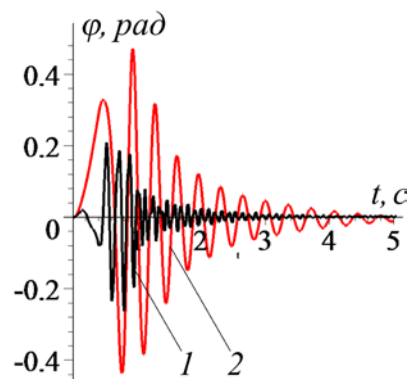


Рис. 3. Зміни в часі різниці фаз між віброзбудниками у парах: 1 - φ_{12} ; 2 - φ_{34}

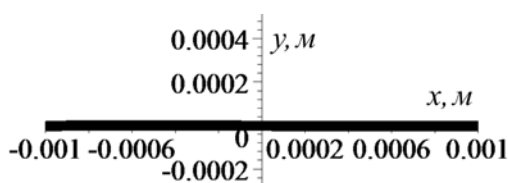


Рис. 4. Траєкторія руху центра мас робочого органу

Результати чисельного моделювання вказують на можливість усталених бігармонічних коливань несучого тіла вібромашини з дебалансними віброзбудниками, які не зв'язані кінематичними передачами. Про це свідчать графіки зміни в часі частоти обертання віброзбудників та різниці фаз між збудниками у парах, а також графіки траєкторії коливань центра мас робочого органу. Як слідує з рис. 2, в усталеному режимі руху віброзбудники у парах обертаються у протифазі з синхронними частотами: $\dot{\varphi}_1 \approx |\dot{\varphi}_2| = \omega_1 \approx 78,2 \text{ s}^{-1}$, $|\dot{\varphi}_3| \approx \dot{\varphi}_4 = \omega_{II} = 155,3 \text{ s}^{-1}$ (рис. 3); відношення синхронних частот віброзбудників різних пар близьке до кратного. Згідно рис. 4, траєкторія робочого органу в усталеному режимі – поступальні коливання паралельно осі Ox (рис. 3). Приведена різниця фаз між віброзбудниками з кратними частотами є змінною.

Висновки.

Встановлено можливість отримання поступальних бігармонічних коливань робочого органу вібромашини з двома парами дебалансних віброзбудників, які не зв'язані кінематичними передачами.

Показано, що запропонована динамічна схема допускає два стабільні усталені режими протифазного обертання віброзбудників кожної пари; обертання пар збудників відбувається майже з кратними частотами.

Список використаних джерел:

1. Blekhman I.I. Vibrational mechanics – Nonlinear dynamic effects, General approach, Applications. - Singapore at al.: World Scientific, 2000.
2. Blekhman I.I., Blekhman L.I., Dresig H. et al. Selected Topics in Vibrational Mechanics. - Singapore at al.: World Scientific, 2004, 409 p.
3. Ярошевич М.П., Ярошевич Т.С. Динаміка розбігу вібраційних машин з дебалансним приводом: монографія / Луцьк: ЛНТУ, 2010. – 220 с.
4. Blekhman I.I., Vasil'kov.V.B. On Some Opportunities for Improving Vibration Machines with Self-Synchronization Inert Vibration Exciters. Journal of Machinery manufacture and reliability, 2013, Vol.42, №3, P. 192-195.

5. Ярошевич М.П., Силивонюк А.В. Про деякі особливості динаміки розбігу вібраційних машин зі збудниками, що само синхронізуються.- Науковий вісник національного гірничого університету, 2013, № 4, С. 70-75.
6. Blekhman, I.I., Semenov, Y.A. On the possibility of designing adaptive vibration machines with self-synchronizing exciters. *Mechanisms and Machine Science*, 80, 231-236 (2020)
7. Yaroshevich N., Grabovets V. et al. On the effect of vibrational capture of rotation of an unbalanced rotor. *Mathematical Models in Engineering*, 2023, Vol. 9, No. 2, pp. 81-93, <https://doi.org/10.21595/mme.2023.23273>.
8. Yaroshevich N., Gursky V. et al. (2022) On the dynamics of vibrational capture of rotation of an unbalanced rotor. *Vibroengineering Procedia*, Vol. 42: 1-6, <https://doi.org/10.21595/vp.2022.22413>.
9. Ragulskis K. *Mechanisms on a vibrating base*. Kaunas: Publishing House of the Institute of Energy and Electrical Engineering. AS of the Lithuanian SSR, 1993, 232 p.
10. Blekhman I.I. Extension of the domain of applicability of the integral stability criterion (extreme properties) in synchronization problems. *Journal of Applied mathematics and mechanics*. Vol.68, No 6, pp.839-846, Elsevier Ltd. 2004.
11. N. Yaroshevich, V. Puts, T. Yaroshevych, and V. Martyniuk, “Self-synchronisation of vibration exciters of a biharmonic vibration drive,” *Vibroengineering Procedia*, Vol. 55, pp. 27–32, Sep. 2024, <https://doi.org/10.21595/vp.2024.24416>
12. Yaroshevich N., Puts V. T.Yaroshevych, and V. Martyniuk. (2025) Study of self-synchronization of unbalanced vibration exciters of a biharmonic vibration drive. *Vibroengineering procedia*, Vol. 59: 96-102, doi: [10.21595/vp.2025.25204](https://doi.org/10.21595/vp.2025.25204)
13. Чабан В. Й. Математичне моделювання електромеханічних процесів. Львів: вид-во держ. ун-ту «Львівська політехніка», 1997. 342 с.

Дата надходження статті до видання: 28.02.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 24.03.2026

Дата оприлюднення 14.04.2026