

С.Б. Мікуліч^[0009-0003-3287-217X]

Луцький національний технічний університет

СИМУЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ВЗАЄМОДІЇ ЖОРСТКИХ ВКЛЮЧЕНЬ У ПЛАСТИНЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТАХ ЗА ДИНАМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

У роботі представлено симуляційний аналіз та числову реалізацію методики дослідження динамічної взаємодії жорстких включень у нескінченних пластинчастих елементах. Розв'язання задачі базується на сумісному використанні методу граничних інтегральних рівнянь та апарату теорії функцій комплексної змінної, що дозволяє ефективно моделювати зварні з'єднання як жорсткі неоднорідності. Числова реалізація запропонованого підходу здійснювалася із застосуванням методу механічних квадратур та колокації для розв'язання систем сингулярних інтегральних рівнянь. Проведено дослідження впливу геометричних параметрів на розподіл радіальних та кільцевих напружень в околі системи з двох включень. Виконано порівняльний аналіз динамічного напруженого стану для випадків однакової та різної довжини включень при варіації частоти зовнішнього навантаження. Встановлено ефекти взаємного екранування та підсилення локальних полів напружень залежно від топології розташування елементів. Продемонстровано універсальність розробленого підходу для оцінки міцності тонкостінних конструкцій зі складними системами включень.

Ключові слова: концентрація напружень, пластинчасті елементи, жорсткі включення, динамічне навантаження.

S.B. Mikulich

SIMULATION ANALYSIS OF RIGID INCLUSIONS INTERACTION IN PLATE ELEMENTS UNDER DYNAMIC LOADS

The paper presents a simulation analysis and numerical implementation of a methodology for investigating the dynamic interaction of rigid inclusions in infinite plate elements. The problem is solved based on the combined application of the boundary integral equation method and the theory of functions of a complex variable, which allows for effective modeling of welded joints as rigid heterogeneities. The numerical implementation of the proposed approach was carried out using the method of mechanical quadratures and collocation to solve systems of singular integral equations.

A study of the influence of geometric parameters on the distribution of radial and hoop stresses in the vicinity of a system of two inclusions was performed. A comparative analysis of the dynamic stress state for cases of identical and different inclusion lengths under varying frequencies of the external load was conducted. The effects of mutual shielding and reinforcement of local stress fields depending on the topology of the elements' arrangement were established. The versatility of the developed approach for assessing the strength of thin-walled structures with complex inclusion systems is demonstrated.

Keywords: stress concentration, plate elements, rigid inclusions, dynamic loads.

Аналіз актуальності дослідження. Сучасний розвиток машинобудування та будівництва висуває дедалі вищі вимоги до надійності та довговічності тонкостінних пластинчастих елементів, що складають основу критичних конструкцій. Найбільш вразливими ділянками таких елементів традиційно є зони з'єднання деталей, зокрема зварні шви, які докорінно змінюють однорідність силового поля конструкції. Реальні зварні з'єднання характеризуються складною мікроструктурою, наявністю зон термічного впливу та залишковими напруженнями, що робить їх пряме чисельне моделювання надзвичайно ресурсомістким. У зв'язку з цим виникає потреба у розробці аналітично-числових розрахункових моделей, здатних прогнозувати поведінку конструкції від дії різних типів навантаження, особливо, динамічних та імпульсних впливів.

Ефективним підходом до вирішення цієї задачі є перехід від детального опису геометрії шва до його представлення у вигляді жорсткого включення у пружній матриці пластинчастого елемента. Такий підхід до моделювання можна використовувати, оскільки модуль пружності та межа текучості матеріалу шва та прилеглих зон суттєво перевищують аналогічні показники основного металу, створюючи ефект локального "армування". Жорстке включення ідеально відтворює кінематичне обмеження деформацій, яке виникає в реальному зварному вузлі, дозволяючи зосередити увагу на головному чиннику руйнування — концентрації напружень на межі розподілу середовищ.

Особливо важливим є дослідження взаємодії кількох таких включень, оскільки в реальних об'єктах зварні шви часто розташовані близько один до одного, утворюючи складні топологічні системи. Симуляційний аналіз взаємодії цих елементів дає змогу виявити ефекти взаємного підсилення напружень, які неможливо зафіксувати при розгляді поодиноких дефектів чи включень. Використання концепції жорстких включень дозволяє уніфікувати розрахункові схеми для різних типів зварювання, від точкового до переривчастого шва, зводячи їх до чітко визначених граничних задач механіки.

Таким чином, актуальність дослідження зумовлена необхідністю створення швидких та точних алгоритмів оцінки міцності пластинчастих систем із неоднорідностями. Результати

© С.Б. Мікуліч

симуляційного моделювання можна використовувати для теоретичного обґрунтування оптимізації розташування зварних вузлів з метою мінімізації ризиків крихкого руйнування. Розуміння механізмів перерозподілу зусиль між жорсткими включеннями дозволить значно підвищити експлуатаційну безпеку технічних об'єктів у авіаційній та суднобудівній галузях.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Отвори, включення чи підсилення спричиняють значну концентрацію напружень у всіх інженерних конструкціях, що робить оцінку їх величини критично важливою для визначення надійності та термінів експлуатації елементів. Концентрація напружень також наявна у матеріалах зі структурними неоднорідностями, такими як порожнини, домішки та геометричні включення, особливо за дії динамічного чи вібраційного навантаження. Динамічні впливи створюють у таких зонах градієнт напружень, що стає причиною прогресивного накопичення пошкоджень. Розподіл напружено-деформованого стану в околі цих концентраторів значною мірою визначається формою, механічними та геометричними характеристиками включення. Ґрунтовний аналіз таких тіл є основою для розробки методів зниження інтенсивності напружень шляхом ефективного підбору властивостей елементів та їх розташування.

Проблема концентрації напружень поблизу включень залишається високоактуальною в сучасній механіці [1–12]. Історично для задач про кругові включення в нескінченних пластинах за статичного або квазістатичного навантаження існують класичні аналітичні розв'язки у формі рядів, представлені у роботах О. М. Гузя, В. Д. Кубенка та Г. М. Савіна [13, 14]. Однак для включень зі складною геометрією (еліптичної, прямокутної та інших форм) використовуються наближені методи, зокрема метод багатократних відображень [14]. Також для дослідження цього класу задач активно застосовуються напівчислові підходи, такі як метод граничних елементів (МГЕ) [15–17]. Перевагою МГЕ є можливість запису сингулярних та регулярних інтегральних рівнянь для різних типів граничних умов [15, 18, 19].

У сучасних дослідженнях широке застосування мають числові та аналітично-числові методи. Зокрема, метод скінченних елементів (МСЕ) використовується для аналізу напруженого стану пластин із функціонально-градієнтованими кільцевими включеннями [1] та підкріпленими видовженими отворами [2]. Проте, класичний МСЕ часто демонструє високу точність переважно для статичних навантажень.

Крім того, паралельно розвиваються математичні моделі на основі сингулярних інтегральних рівнянь для пластин із лінійними [3, 20] та криволінійними включеннями і тріщинами [4, 21]. Такі підходи дозволяють аналізувати 2D–3D переходи у формі кругових елементів [5] та будувати модифіковані розв'язки Кірша для жорстких або м'яких включень [6, 7]. Перевагою застосування модифікованого методу граничних елементів для дослідження даного класу задач є можливість вивчення напружено-деформованого стану систем із багаточаровими включеннями довільної форми [8, 11]. Цей підхід забезпечує точне визначення всіх компонент напружень на межі розподілу включення – матриця. Ефективність МГЕ та граничних інтегральних рівнянь також підтверджена при дослідженні динамічного напруженого стану пластинчастих елементів із розрізами [9].

Для задач дифракції хвиль у середовищах із включеннями за нестационарних навантажень використання методу граничних елементів дозволяє побудувати інтегральні рівняння у замкненій формі, зокрема, для другої основної задачі [10]. Використання фундаментальних функцій впливу, записаних у аналітичній формі, дозволяє зводити такі задачі до систем сингулярних інтегральних рівнянь, що є ключовим для симуляційного аналізу взаємодії жорстких включень.

Постановка завдання. Аналіз існуючих публікацій свідчить, що попри значні успіхи в розробці числових методів для аналізу напружено-деформованого стану елементів з одиничними включеннями, питання динамічної взаємодії систем жорстких неоднорідностей у тонкостінних елементах залишається розв'язаним лише частково. Більшість класичних моделей обмежуються статичним навантаженням або канонічними формами включень, що не дозволяє повною мірою врахувати специфіку реальних зварних вузлів як складних топологічних систем.

Тому метою даної роботи є розробка алгоритму симуляційного аналізу, який базується на концепції представлення зварних швів як жорстких включень у межах гранично-елементного підходу. Це дозволяє не лише уніфікувати розрахункові схеми для різних типів з'єднань, а й детально дослідити ефекти взаємного підсилення напружень при їх близькому розташуванні. Такий підхід забезпечує високу обчислювальну ефективність при аналізі нестационарних процесів, створюючи теоретичне підґрунтя для оптимізації зварних конструкцій з метою запобігання їх крихкому руйнуванню.

Викладення основного матеріалу. Розглянемо пластинчастий елемент, що містить систему

жорстких довільно розмішених включень (рис. 1), що є моделями зварних швів. Розглядається випадок, коли на границі пластинчастого елемента та включення відсутні переміщення (рис. 1).

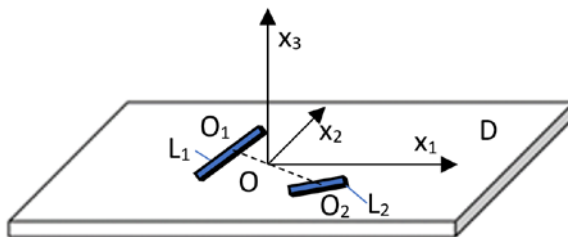


Рис. 1. Модель задачі

Позначимо через L_1 границю контуру одного з включень, а через L_2 - границю контуру іншого включення. Область, яку займає пластинка, позначено через D . Віднесемо пластинчастий елемент до декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$, яку розмістимо у середині відрізка O_1O_2 , що з'єднає центри ваги включень (рис. 1). Граничні умови задачі для випадку відсутності переміщень у включеннях відповідно до [13] записуються у вигляді:

$$u_i|_{L_j} = u_i^{(j)} = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (1)$$

Тут $u_1^{(j)}$, $u_2^{(j)}$ – відповідно переміщення точок на границі пластинка-включення в напрямку осей Ox_1 та Ox_2 .

Використаємо запропонований у [9] підхід, адаптувавши його для випадку дослідження двозв'язних областей. Позначимо через L – сумарний граничний контур: $L = \cup_j L_j$. Інтегральне представлення переміщень другої основної задачі запишемо у вигляді [14]:

$$u_i(x_1, x_2) = - \int_L u_j(x_1^0; x_2^0) \cdot P_{ji}^*(x_1; x_2; x_1^0; x_2^0) ds, \quad (2)$$

де P_{kj}^* — фундаментальні функції [9]. Для розглянутого двовимірного випадку значення індексів вибиралися $k, j = 1, 2$.

Використовуючи розроблений у [9] алгоритм, побудуємо для розв'язання задачі систему інтегральних рівнянь. Для цього задовольнимо граничні умови (1) на кожному з граничних контурів, використовуючи інтегральні представлення для переміщень (2). Дослідивши нерегулярність підінтегральних функцій та встановивши їх особливості шляхом виділення нерегулярних складових та використавши формули Племеля-Сохоцького [13, 14] при граничному переході запишемо систему інтегральних рівнянь задачі у матричній формі:

$$C \cdot U + \int_L F \cdot U ds = P, \quad (3)$$

де $C = \{c_{ij}\}$ - матриця позаінтегральних коефіцієнтів, $U = \{u_i^{(k)}\}$ – матриця невідомих переміщень, $P = \{P_{ij}\}$ – матриця впливу заданого навантаження, $F = \{f_{ij}\}$ – матриця фундаментальних функцій.

Для розв'язання системи інтегральних рівнянь (3) використано числовий алгоритм, що ґрунтується на методі механічних квадратур та колокації. При параметризації границі контуру включень L_j використовувалося конформне відображення [14]:

$$t = g(\theta) = a(e^{-i\theta} + a_1 e^{i\theta} + a_2 e^{3i\theta} + a_3 e^{5i\theta} + \dots), \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

де сталі a_1, a_2, \dots визначають співвідношення між сторонами прямокутного включення, а стала a впливає на його довжину.

Для визначення напружень на границі матриця - включення використовувалися отримані у [9] залежності у інтегральній формі:

$$\sigma_{ij} = \int_L H_{ik} u_k ds,$$

причому функції H_{ij} є відомими. Розрахунок напружень проводився числово у відповідних точках границь включень.

Числові розрахунки проведені для випадку дослідження впливу «падаючої» хвилі стиску, потенціали якої задаються [13, 14]:

$$\Phi = \Phi_0 e^{i\omega(\tau - \omega_1 x_1)}, \quad \Psi = 0,$$

де ω - частота, $\omega_1 = \frac{\omega}{c_1}$, $\Phi_0 = \frac{\rho}{\omega^2}$, що поширюється у напрямку осі Ox_1 на систему жорстких

включень. 2D модель задачі для випадку колінеарних включень представлено на рис. 2.

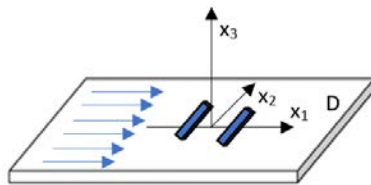


Рис. 2. 2D модель навантаження.

Числові розрахунки проведено для випадку, коли включення мають однакову (рис. 3, зліва) та різні (рис. 3, справа) довжини. При розрахунках враховувалося, що відстань між центрами включень дорівнює довжині більшого з включень.

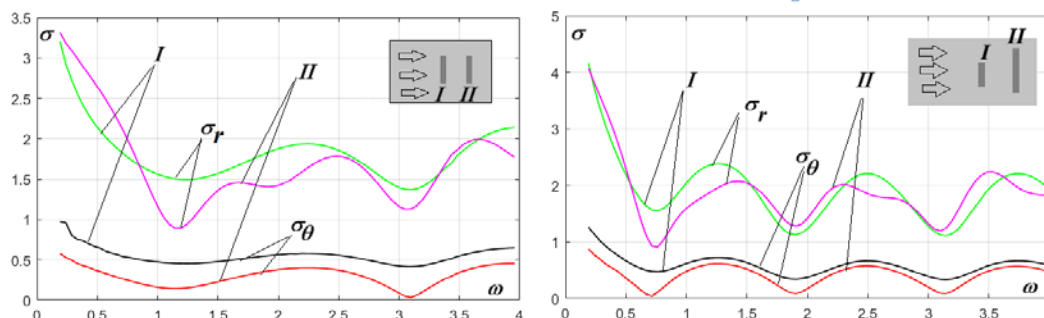


Рис. 3. Напружений стан пластинчастих елементів з системою включень.

Проведені розрахунки дозволили встановити закономірності розподілу компонент напружень σ_r та σ_θ в околі двох жорстких включень залежно від частоти динамічного навантаження ω та геометричної конфігурації системи. На представлених на рис. 3 графіках спостерігається осцилюючий характер зміни напружень, що пояснюється інтерференцією хвиль, відбитих від межі розділу «включення–матриця».

Для випадку включень однакової довжини (рис. 3, зліва) максимальні значення радіальних напружень σ_r фіксуються в області низьких частот, після чого спостерігається їх поступове затухання з вираженими локальними екстремумами. Напруження на першому включенні I, яке першим сприймає хвильовий фронт, є дещо вищими за аналогічні показники на другому включенні II, що свідчить про частковий ефект «екранування».

При дослідженні моделі з включеннями різної довжини (рис. 3, справа) характер взаємодії суттєво змінюється. Зменшення розміру першого включення призводить до зростання амплітуди напружень σ_r на більшому (другому) включенні, що вказує на перерозподіл енергії динамічного впливу в системі. Графіки демонструють, що для випадку системи включень різної довжини екстремуми напружень стають більш гострими, а частотний інтервал між ними скорочується.

Кільцеві напруження σ_θ в обох випадках мають значно меншу амплітуду порівняно з радіальними, проте їх роль у зонах концентрації є важливою для оцінки ризику зсувного руйнування. Порівняльний аналіз показує, що при відстані між центрами, яка дорівнює довжині більшого включення, взаємний вплив елементів залишається інтенсивним, провокуючи ефект підсилення поля напружень у проміжку між ними.

Результати симуляції підтверджують, що зміна геометричних параметрів одного з включень радикально змінює частотний відгук усієї конструкції. Це дозволяє зробити висновок, що при проектуванні зварних вузлів необхідно враховувати не лише їх власну міцність, а й розташування щодо напрямку очікуваного динамічного навантаження. Отримані дані можуть бути використані для визначення критичних частот, при яких концентрація напружень досягає небезпечних значень, що є ключовим для забезпечення надійності пластинчастих елементів у авіа-та суднобудуванні.

Слід відмітити, запропонований у цій роботі підхід характеризується істотно ширшими можливостями розрахунків. Крім того, цей підхід є універсальним для дослідження напруженого стану у випадку включень іншої гладкої форми та не потребує, на відміну від методу рядів, жодних модифікацій. Переваги цього підходу будуть продемонстровані у ряді наступних досліджень.

Висновки

Запропонований у роботі підхід на основі модифікованого методу граничних елементів демонструє значно ширші обчислювальні можливості порівняно з традиційними підходами. Головною перевагою даного методу є його універсальність, оскільки він дозволяє досліджувати напружений стан пластин із включеннями будь-якої гладкої геометрії без необхідності складної математичної модифікації алгоритму, що є обов'язковим для методу розкладу у ряди. Потенціал та ефективність застосування цієї методики для складніших систем будуть детально висвітлені у наших наступних наукових працях.

Список використаних джерел

1. Hart, E. L., Terokhin, B. I. (2021) Computer Simulation of the Stress-Strain State of the Plate with Circular Hole and Functionally Graded Inclusion. *JODEA*, 29(1), 42–53.
2. Hart, E.L., Hudramovich, V.S. (2022) Computer Simulation of the Stress-Strain State of Plates with Reinforced Elongate Rectangular Holes of Various Orientations. *Strength of Materials and Theory of Structures*, 108, 77–86.
3. Nazarenko, O., Usov, A., Volkova, M., Kozin, O. (2023) Mathematical Modeling of the Stress-Strain State of a Plate with Rigid Linear Inclusion and Mixed Boundary Conditions. *Вісник КрНУ*, 1(138), 22–28.
4. Zelenyak, V., Kolyasa, L., Klapchuk, M., et al. (2021) Determining Patterns in Thermoelastic Interaction between a Crack and a Curvilinear Inclusion. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 6/7(114), 52–58.
5. Oshri, O., Biswas, S., Balazs, A.C. (2019) Modeling the behavior of inclusions in circular plates undergoing shape changes from two to three dimensions. *Phys. Rev. E*, 100, 043001.
6. Lavrenyuk, V. I., Lavrenyuk, N. V. (2007) The Stress–Strain State of a Plate with a Multilayer Inclusion. *International Applied Mechanics*, 43(3), 329–334.
7. Rana, A.K., Paulb, S.K., Deya, P.P. (2019) Stress field in an isotropic elastic solid containing a circular hard or soft inclusion. *Materials Today: Proceedings*, 11, 657–666.
8. Shvabyuk, V., Sulym, H., Mikulich, O. (2015) Stress State of Plate with Incisions under the Action of Oscillating Concentrated Forces. *Acta Mechanica et Automatica*, 9(3), 140–144.
9. Шваб'юк В.І., Фурс Т.В., Коменда Н.В., Мікуліч С.Б. (2023) Інтегральні рівняння задачі дифракції хвиль у пружних середовищах з включеннями. *Наукові нотатки*, 75, 95–99.
10. Brebbia, C., Telles, J., Wrobel, L. (1984) *Boundary element techniques*. Springer, New York.
11. Krenk, S. (1975) On quadrature formulas for singular integral equations of the first and second kind. *Quarterly of Applied Mathematics*, 33(3), 128–136.
12. Lifanov, I. K. (1996) *Singular Integral Equations and Discrete Vortices*. VSP, Utrecht.
13. Guz, A.N., Kubenko, V.D., Cherevko, M.A. (1978) *Diffraction of Elastic Waves*. Naukova Dumka, Kiev, 307 p.
14. Savin, G. N. (1970) *Stress distribution around holes*. NASA, 1008 p.
15. Katsikadelis, J.T. (2016) *The Boundary Element Method for Engineers and Scientists*. Academic Press, 446 p.
16. Gwinner, J., Stephan, E.P. (2018) *Advanced Boundary Element Methods*. Springer, 652 p.

Дата надходження статті до видання: 14.02.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 24.03.2026

Дата оприлюднення 14.04.2026