УДК 621.9048.6 DOI 10.36910/775.24153966.2025.83.18

В. Пуць, М. Ярошевич, Т. Ярошевич, Є. Статкевич

Луцький національний технічний університет

САМОСИНХРОНІЗАЦІЯ ВІБРОЗБУДНИКІВ ВІБРАЦІЙНИХ МАШИН З БІГАРМОНІЧНИМИ КОЛИВАННЯМИ РОБОЧОГО ОРГАНУ

Розглянуто практичну можливість самосинхронізації двох пар дебалансних віброзбудників з кратними частотами обертання. Задача розв'язується з використанням інтегрального критерію стійкості синхронних рухів. Отримано формули для синхронізуючих моментів; умови існування та стійкості синхронних режимів руху збудників. Наведені рівняння для визначення кутів зсуву фаз у можливих синхронних режимах руху віброзбудників. Сформульовані практичні рекомендації стосовно підвищення стабільності кратно-синхронного обертання віброзбудників. Теоретичні результати узгоджуються з результатами комп'ютерного моделювання

Ключові слова: *вібраційна машина, бігармонічний коливання, дебелансний віброзбудник, самосинхронізація, вібраційний момент.*

V. Puts, T. Yaroshevich, M. Yaroshevych, E. Statkevych

SELF-SYNCHRONIZATION OF VIBRATION EXCITERS OF VIBRATING MACHINES WITH BIHARMONIC OSCILLATIONS OF THE WORKING BODY

The practical possibility of self-synchronization of two pairs of unbalanced vibration exciters with multiple rotation frequencies is considered. The problem is solved using the integral criterion of stability of synchronous movements. Formulas for synchronizing moments are obtained; conditions for the existence and stability of synchronous modes of motion of exciters. Equations are given for determining the phase shift angles in possible synchronous modes of motion of vibration exciters. Practical recommendations are formulated regarding increasing the stability of multiple-synchronous rotation of vibration exciters. Theoretical results are consistent with the results of computer modeling

Keywords: *vibration machine, biharmonic drive, unbalanced vibration exciter, dynamic self-synchronisation, vibrational torque***.**

Постановка проблеми. Вібраційні машини з дебалансними віброзбудниками широко використовуються в самих різних виробництвах. У нинішній час створено та експлуатується велика кількість вібромашин різної конструкції, потужності й функціонального призначення [1-3]. Серед існуючих машин досить перспективними є вібромашини з бігармонічним законом коливань робочого органу. Двочастотні коливання у низці випадків можуть істотно підвищити ефективність вібромашин. Необхідною умовою нормальної роботи вібромашин з кількома віброзбудниками є синхронність обертання та наявність певного співвідношення між фазами збудників. На сьогодні проблема самосинхронізація обертання віброзбудників залишається актуальною при створенні вібромашин з бігармонічним законом коливань робочого органу [1, 2, 4, 5].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. На даний час явище самосинхронізації механічних віброзбудників досить добре вивчено. Огляд та узагальнення основних результатів теоретичних та експериментальних досліджень наведено, наприклад, у [1, 2]. Більшість існуючих досліджень присвячені, так званій, простій самосинхронізації віброзбудників, коли усі вони обертаються з однаковими (близькими) частотами. Самосинхронізації віброзбудників з кратними частотами, присвячені значно менше праць, зокрема [4-7]. В статті [8] демонструється можливість використання ефекту самосинхронізації інерційних віброзбудників для створення вібраційної техніки з законом коливань робочого органу, який можна змінювати в процесі роботи. У працях [7, 9] досліджується проходження резонансу вібромашинами з віброзбудниками, які самосинхронізуються; вказується на можливості покращення розбігу вібромашин у разі використання методу почергового та подвійного пусків електродвигунів. Робота [10] присвячена синтезу конструктивних параметрів двочастотного інерційного вібратора. У [11, 12] показано, що прикладні задачі самосинхронізації інерційних віброзбудників можна розв'язувати за методикою дослідження вібраційного захоплення обертання незрівноважених роторів.

Серед останніх досліджень, присвячених питанням самосинхронізації дебалансних віброзбудників, можна відзначити роботи [13, 14]. У статті [14] розглядається самосинхронізація віброзбудників бігармонічного чотиривального вібратора напрямленої дії. Проте, в [14] обґрунтовується можливість усунення з вібропривода лише однієї з трьох існуючих в конструкції привода кінематичних передач.

Мета дослідження. Продемонструвати можливість стабільної роботи бігармонічного чотиривального вібратора напрямленої дії з однією зубчастою передачею яка синхронізує обертання віброзбудників.

Методика дослідження. Для досліджень використано методи прикладної теорії механічних коливань, інтегральний критерій стійкості синхронних рухів, чисельне моделювання з використанням системи комп'ютерної математики Maple 14.

Опис системи та рівняння руху. Несуче тверде тіло (робочий орган вібромашини) пружно встановлено на нерухомій основі за допомогою досить «м'яких» пружних опор (рис. 1).

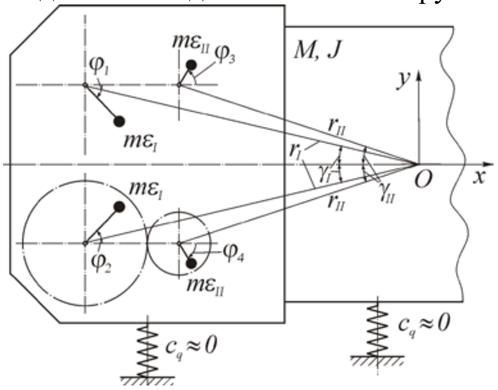

Рис. 1. **Схема бігармонічного віброприводу**

Тверде тіло може здійснювати малі плоско-паралельні коливання. Тобто, в загальному випадку, несуче тверде тіло має три ступені вільності. На несучому тілі встановлені дві пари номінально однакових дебалансних віброзбудників (1, 2 та 3, 4); при чому, частота обертання другої пари у два рази вища за частоту першої. Віброзбудники у парах обертаються у протилежних напрямках; 2-ий та 4-ий збудники з'єднані зубчастою передачею з передатним числом 1:2; 1-ий, 2-ий та 3-ій віброзбудники приводяться в обертання від незалежних електродвигунів асинхронних типу.

Диференціальні рівняння руху досліджуваної динамічної системи можна подати у такому вигляді [2]:

$$M\ddot{x} + \beta_x \dot{x} + c_x x =$$
$$= m\varepsilon_I \left[\dot{\varphi}_1^2 \cos\varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 \cos\varphi_2 \right] + m\varepsilon_{II} \left[\dot{\varphi}_3^2 \cos\varphi_3 + 4\dot{\varphi}_2^2 \cos(2\varphi_2 + \beta) \right],$$
$$M\ddot{y} + \beta_y \dot{y} + c_y y =$$
$$-m\varepsilon_I \left[\dot{\varphi}_1^2 \sin\varphi_1 + \dot{\varphi}_2^2 \sin\varphi_2 \right] - m\varepsilon_{II} \left[\dot{\varphi}_3^2 \sin\varphi_3 - 4\dot{\varphi}_2^2 \sin(2\varphi_2 + \beta) \right],$$
$$J\ddot{\varphi} + \beta_\varphi \dot{\varphi} + c_\varphi \varphi =$$
$$-m\varepsilon_I r_I \left[\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 + \gamma_1) + \dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 + \gamma_1) \right] - m\varepsilon_{II} r_{II} \left[\dot{\varphi}_3^2 \sin(\varphi_3 - \gamma_2) - 4\dot{\varphi}_2^2 \sin(2\varphi_2 + \beta - \gamma_2) \right],$$
$$I_1\ddot{\varphi}_1 = L_1(\dot{\varphi}_1) - R_1(\dot{\varphi}_1) + m\varepsilon_I \left[\ddot{x}\sin\varphi_1 + \ddot{y}\cos\varphi_1 + \ddot{\varphi} r_I \cos(\varphi_1 - \gamma_1) \right],$$
$$I_2\ddot{\varphi}_2 = -L_2(\dot{\varphi}_2) + R_2(\dot{\varphi}_2) - m\varepsilon_I \left[\ddot{x}\sin\varphi_2 + \ddot{y}\cos\varphi_2 + \ddot{\varphi} r_I \cos(\varphi_2 + \gamma_1) \right] -$$
$$-2m\varepsilon_{II} \left[-\ddot{x}\sin(2\varphi_2 - \beta) + \ddot{y}\cos(2\varphi_2 - \beta) + \ddot{\varphi} r_{II} \cos(2\varphi_2 - \beta - \gamma_2) \right],$$
$$I_3\ddot{\varphi}_3 = -L_3(\dot{\varphi}_3) + R_3(\dot{\varphi}_3) - m\varepsilon_{II} \left[\ddot{x}\sin\varphi_3 + \ddot{y}\cos\varphi_3 + \ddot{\varphi} r_{II} \cos(\varphi_3 - \gamma_2) \right],$$

де M, J – маса та момент інерції несучого тіла, відносно осі яка проходить через центр мас; $q = x, y, \varphi$, φ_i – узагальнені координати несучого тіла та роторів віброзбудників, $i = 1, 2, 3$; при чому, $\varphi_4 = 2\varphi_2 + \beta$; β – кут зсуву фаз між 2-им та 4-им роторами віброзбудників; β_q, c_q – коефіцієнти в'язкого тертя та жорсткості пружних елементів підвіски несучого тіла; I_i - зведені моменти інерції роторів віброзбудників відносно осі обертання; $L_i\left(\dot{\varphi}_i\right)$ – обертальний момент електродвигуна; $R_i\left(\dot{\varphi}_i\right)$ - момент сил опору обертання ротора віброзбудника; r_i – відстань від осі *i*-го збудника до центру мас несучого тіла O; γ_i – кути, які визначають положення осей роторів віброзбудників; m_i, ε_i – маса та ексцентриситет віброзбудника.

Викладення основного матеріалу. Для розв'язування прикладних задач про самосинхронізацію механічних віброзбудників може бути використана спрощена інженерна методика дослідження динамічної синхронізації - інтегральний критерій стійкості синхронних рухів віброзбудників [1, 4]. Згідно інтегральний критерію, стійкі синхронні рухи збудників відповідають точкам мінімума, так званої, потенціальної функції D різниці фаз обертання збудників.

Оскільки, у розглядуваній технічній задачі, парціальні кутові швидкості збудників вважаються однаковими, то потенціальна функція дорівнює середньому значенню функції Лагранжа несучого тіла [1]. Функція Лагранжа Λ внаслідок припущення, що пружні опори несучого тіла є достатньо «м'якими», дорівнює його кінетичній енергії:

$$D = \Lambda = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\frac{1}{2}\left[M(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+J\dot{\varphi}^2\right]d\tau\,, \tag{2}$$

де $\tau = \omega t$.

Згідно методики інтеґрального критерію, вихідну систему (1) достатньо розв'язувати за припущення про рівномірне обертання віброзбудників. Таким чином, $\varphi_i = \omega t + \alpha_1$ $\varphi_2 = -(\omega t + \alpha_2)$, $\varphi_3 = -(2\omega t + \alpha_3)$, $\varphi_4 = 2\omega t + 2\alpha_2 - \beta$, де ω - кратно-синхронна частота обертання вброзбудників; α_i - сталі. У такому випадку рівняння руху несучого тіла перетворюються у звичайні лінійні диференціальні рівняння малих вимушених коливань. Тоді, з урахуванням розв'язків даних рівнянь, після усереднення виразу (2) отримуємо формулу для потенціальної функції:

$$D = -\frac{1}{2J\omega^2}\left[F_1^2 r_I^2\cos\left(\alpha_1-\alpha_2\right)+\frac{F_2^2 r_{II}^2}{4}\cos\left(2\alpha_2-\alpha_3-\beta\right)\right]+C\,, \tag{3}$$

де $F_1 = m\varepsilon_I\omega^2$, $F_2 = 4m\varepsilon_{II}\omega^2$ - амплітуди вимушених сил, які розвивають віброзбудники першої та другої пар, відповідно; C – стала, що не залежить від фаз α_s.

Згідно технологічних рекомендацій, зазвичай приймають: $m\varepsilon_{II} = m\varepsilon_I/4$. Тоді, вираз (3) можна записати у дещо спрощеному вигляді:

$$D = -\frac{(m\varepsilon_I\omega)^2}{2J}\left[r_I^2\cos\left(\alpha_1-\alpha_2\right)+\frac{r_{II}^2}{4}\cos\left(2\alpha_2-\alpha_3-\beta\right)\right].$$

Виконавши диференціювання по змінній α_i знайдемо вирази для вібраційних моментів:

$$V_1 = \frac{m\varepsilon_I^2\omega^2 r_I^2}{2J}\sin\left(\alpha_1-\alpha_2\right),\quad V_3 = -\frac{m\varepsilon_I^2\omega^2 r_{II}^2}{8J}\sin\left(2\alpha_2-\alpha_3-\beta\right),$$

$$V_2 = -\frac{m\varepsilon_I^2\omega^2}{2J}\left[r_I^2\sin\left(\alpha_1-\alpha_2\right)-\frac{r_{II}^2}{2}\sin\left(2\alpha_2-\alpha_3-\beta\right)\right]. \tag{4}$$

Як відомо, саме вібраційний момент при виконанні певних умов викликає динамічну синхронізацію роторів віброзбудників.

З (4) слідує, що сила динамічного зв'язку між першим та другим, а також - другим та третім віброзбудниками є такою ж, як у вібромашини з двома збудниками, які обертаються у протилежних напрямках з однаковими частотами. Важливо, що дана схема знайшла найбільш широке практичне використання серед усіх існуючих вібромашин зі збудниками, які самосинхронізуються.

Прирівнюючи до нуля похідні $\partial D/\partial\alpha_s = 0$, приходимо до системи рівнянь для визначення фаз обертання роторів віброзбудників у можливих синхронних рухах. Система рівнянь $\partial D/\partial\alpha_s = 0$ допускає кілька істотно різних груп розв'язків. Водночас, практично цікавим є лише одна група розв'язків:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0,\quad 2\alpha_2 - \alpha_3 = \beta\,. \tag{5}$$

Таким чином, досліджувана динамічна система допускає синфазне обертання віброзбудників у парах, та синхронне обертання пар віброзбудників з кутом зсуву фаз β між ними.

Згідно інтегрального критерію, стійкі синхронні обертання віброзбудників відповідають точкам грубого мінімуму потенціальної функції. Необхідними та достатніми умовами мінімуму функції D в точках $\alpha_s = \alpha_i^*$, є виконання нерівностей (приймаємо $\alpha_3 = 0$):

$$\left|\frac{\partial^2 D}{\partial \alpha_1^2}\right|_{\alpha_s=\alpha_s^*} > 0, \qquad \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial^2 D}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_1} & \dfrac{\partial^2 D}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \\ \dfrac{\partial^2 D}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} & \dfrac{\partial^2 D}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_2} \end{matrix}\right|_{\alpha_s=\alpha_s^*} > 0, \tag{6}$$

Дослідимо стійкість практично цікавої групи розв'язків (5). З (6) отримуємо наступні умови стійкості синфазного обертання віброзбудників у парах:

$$\frac{F_1^2 r_I^2}{2J\omega^2} > 0, \qquad \frac{F_1^2 r_I^2 + F_2^2 r_{II}^2}{2J\omega^2} > 0. \tag{7}$$

Як бачимо, умови стійкості синфазного обертання віброзбудників теоретично виконуються завжди. Розв'язкам (5) відповідають поступальні бігармонічні коливання несучого тіла вібромашини вздовж осі Ox за законом:

$$x = -\frac{2F_I}{M\omega^2}\cos\omega t - \frac{2F_2}{M\omega^2}\cos(2\omega t - \beta) \qquad (y \approx 0,\ \varphi \approx 0).$$

Однак, розв'язки (5) є не єдиним мінімумом потенціальної функції. Так, можливе синхронне обертання віброзбудників також з зсувами фаз: $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi,\ 2\alpha_2 - \alpha_3 = \beta$. Отже, крім розглянутого режиму руху можуть бути стійкими також побічні режими, зазвичай, совсім небажані. Відповідь на питання - який саме режим виникне при реальних початкових умовах та параметрах динамічної системи, можуть дати лише експериментальні дослідження.

Комп'ютерне моделювання самосинхронізації бігармонічних віброзбудників. Моделювання зводилося до чисельного інтегрування системи (1) та рівнянь динамічної моделі асинхронного електродвигуна [8]. Параметри системи відповідають параметрам експериментальної вібраційної установки [8]: $M = 108\,кг;\ m\varepsilon_I = 0{,}03\,кг\,м;$ $I_1 = 0{,}01\ кг\cdot м^2$; $I_2 = 0{,}02\ кг\cdot м^2$; $I_3 = 0{,}006\ кг\cdot м^2$; $J = 2{,}1\,kg\cdot m^2$; $\beta_{x,y} = 500\,kg/s$; $\beta_\varphi = 10\,kg\,m^2/s$; $c_{x,y} = 3\cdot 10^4\,N/m$; $c_\varphi = 588\,N/m$; $r_I = 1{,}28\,m$; $r_{II} = 0{,}94\,m$; $\gamma_I = 0{,}22\,rad$; $\gamma_{II} = 0{,}28\,rad$; при цьому, β кут встановлювався рівним $0{,}01\,rad$.

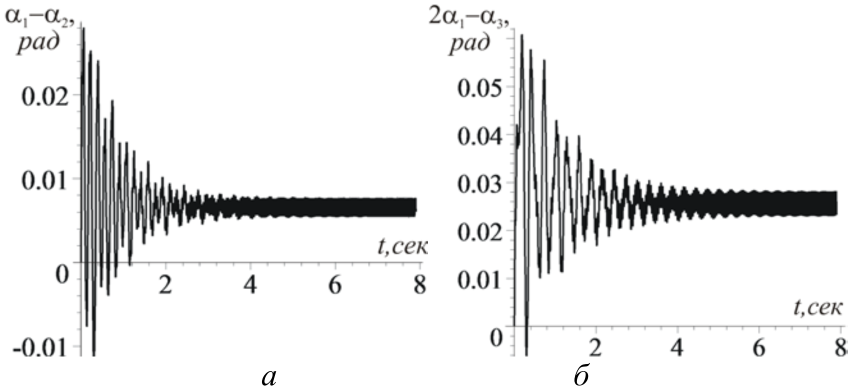

Рис. 2. **Часові залежності різниці фаз між віброзбудниками:** *а)* $\alpha_1 - \alpha_2$; *б)* $2\alpha_1 - \alpha_3$

Згідно рис. 2, достатньо швидко після пуску вібромашини встановлюється стабільне синхронне обертання усіх віброзбудників. При цьому, віброзбудники у парах обертаються практично синфазно, а кут зсуву фаз між 1-м та 3-м віброзбудниками встановлюється близький до кута, який виставляється в передачі між 2-им та 4-им збудниками. Перехідний процес нетривалий, коливання зсуву фаз незначні.

Висновки. Встановлено, що кратно-синхронне обертання віброзбудників бігармонічного привода можливо забезпечити за допомогою лише однієї кінематичної передачі. Використання явища самосинхронізації віброзбудників дозволяє зменшити динамічні навантаження у приводі; розширює можливості його компоновки. Характер синхронних рухів віброзбудників не залежить від кута зсуву фаз між збудниками з кратними частотами. Даний кут можна призначати лише згідно технологічних рекомендацій.

Список використаних джерел:

1. Blekhman I.I. Vibrational mechanics – Nonlinear dynamic effects, General approach, Applications. - Singapore at al.: World Scientific, 2000.
2. Blekhman I.I., Blekhman L.I., Dresig H. et al. Selected Topics in Vibrational Mechanics. - Singapore at al.: World Scientific, 2004, 409 p.
3. Ланець О.С. Високоефективні міжрезонансні вібраційні машини з електромагнітним приводом (Теоретичні основи та практика створення). Львів, НУ «Львівська політехніка» (2008)
4. Ярошевич М.П., Ярошевич Т.С. Динаміка розбігу вібраційних машин з дебалансним приводом: монографія / Луцьк: ЛНТУ, 2010. – 220 с.
5. Blekhman I.I., Vasil'kov.V.B. On Some Opportunities for Improving Vibration Machines with Self-Synchronization Inert Vibration Exciters. Journal of Machinery manufacture and reliability, 2013, Vol.42, №3, P. 192-195.
6. Blekhman I.I. Extension of the domain of applicability of the integral stability criterion (extreme properties) in synchronization problems. Journal of Applied mathematics and mechanics. Vol.68, No 6, pp.839-846, Elsevier Ltd. 2004.
7. Ярошевич М.П., Силивонюк А.В. Про деякі особливості динаміки розбігу вібраційних машин зі збудниками, що само синхронізуються.- Науковий вісник національного гірничого університету, 2013, № 4, С. 70-75.
8. Blekhman, I.I., Semenov, Y.A.: On the possibility of designing adaptive vibration machines with self-synchronizing exciters. Mechanisms and Machine Science, 80, 231-236 (2020)
9. Yaroshevich M.P., Zabrodets I.P., Yaroshevich T.S. Dynamics of vibrating machines starting with unbalanced drive in case of bearing body flat vibrations. Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. Dnipropetrovsk, 2015, Vol. 3, P. 39–45.
10. Gursky V., Krot P., Korendiy V., Zimroz R. Dynamic Analysis of an Enhanced Multi-Frequency Inertial Exciter for Industrial Vibrating Machines. Machines 2022, № 10, 130. doi.org/10.3390/machines10020130
11. Yaroshevich N., Grabovets V., Yaroshevich T. et al. On the effect of vibrational capture of rotation of an unbalanced rotor. Mathematical Models in Engineering, 2023, Vol. 9, No. 2, pp. 81–93, https://doi.org/10.21595/mme.2023.23273.
12. Yaroshevich, N., Puts, V., Yaroshevich, T., (2024). Self-synchronization of vibration exciters of a biharmonic vibration drive*Vibroengineering Procedia*, 55, pp. 27–32.
13. Hu W., Cheng Z., Zhang X. et al. Self-balance characteristics of the vibrating system with four split-driving vibrators. Nonlinear Dyn, 2024. https://doi.org/10.1007/s11071-024-09804-4
14. N. Yaroshevich, V. Puts, T. Yaroshevych, and V. Martyniuk, "Self-synchronisation of vibration exciters of a biharmonic vibration drive," *Vibroengineering Procedia*, Vol. 55, pp. 27–32, Sep. 2024, https://doi.org/10.21595/vp.2024.24416