

Я.М. Пелех¹, О.П. Козарь², Т.В. Магеровська¹, С.М. Ментинський¹, Я.П. Легета²*Національний університет «Львівська політехніка»¹
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»²***МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОСТІ МАГНІТНОГО ПОЛЯ В ШАРІ
ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНОЇ СТАЛІ**

Робота присвячена визначенню періодичної складової напруженості магнітного поля в шарі електротехнічної сталі. Під час побудови математичної моделі магнітна проникність апроксимується дробово-раціональною функцією. Для розрахунку властивостей магнітного поля використано два нелінійні методи – метод четвертого порядку точності та метод третього порядку точності з двосторонньою оцінкою похибки результату. Переваги такого підходу полягають у тому, що використовуючи лише чотири обчислення правої частини диференціального рівняння отримано метод четвертого порядку точності, два двосторонні наближення третього порядку точності, а також явну оцінку головного члена локальної похибки результату. Проведено розрахунок і аналіз математичної моделі, а також визначено вигляд наближення магнітної проникності, яку потрібно використовувати при дослідженні слабких і сильних полів.

Ключові слова: рівняння електродинаміки, напруженість магнітного поля, задача Коші, нелінійний числовий метод, ланцюгові дробі, двосторонні наближення.

Ya.M. Pelekh, O.P. Kozar, T.V. Maherovska, S.M. Mentynsky, Ya.P. Legeta

**METHOD FOR DETERMINING THE MAGNETIC FIELD STRENGTH IN A SHEET OF
ELECTRICAL STEEL**

This work is devoted to the determination of the periodic component of the magnetic field strength in a layer of electrical steel. When constructing a mathematical model, the magnetic permeability is approximated by a fractional-rational function. To calculate the properties of the magnetic field, it is proposed to use two nonlinear methods - the method of the fourth order of accuracy and the third order of accuracy with a two-sided estimate of the error of the result.

The advantages of this approach are that using only four calculations of the right-hand side of the differential equation, a method of fourth-order accuracy, two two-sided approximations of third-order accuracy, and an explicit estimate of the main term of the local error of the result are obtained.

The mathematical model was calculated and analyzed, and the form of the magnetic permeability approximation that should be used in the study of weak and strong fields was determined.

Keywords: electrodynamic equations, magnetic field strength, initial value problem, continued fractions, two-sided approximations.

Постановка проблеми. Одним із пріоритетних напрямів сучасного машинобудування є підвищення ефективності технологічних процесів обробки конструкційних матеріалів при одночасному забезпеченні високих експлуатаційних характеристик деталей і вузлів. Особливе місце серед цих процесів займають методи індукційної термообробки, засновані на використанні електромагнітних полів. Порівняно з традиційними методами нагріву, вони забезпечують низку важливих переваг: локалізованість впливу, високу швидкість нагріву, можливість автоматизації процесу та зменшення енергетичних витрат. У результаті стає можливим отримання необхідного розподілу температурного поля в тілі деталі, формування оптимальної мікроструктури матеріалу та контроль залишкових механічних напружень, що визначають довговічність і надійність роботи конструкції.

У машинобудуванні широке застосування знаходять феромагнітні сталі, які є основою для виготовлення відповідальних елементів конструкцій. Однією з особливостей таких матеріалів є нелінійна залежність між індукцією магнітного поля та його напруженістю. Ця властивість значно ускладнює процес математичного моделювання явищ, які відбуваються при індукційному нагріві, оскільки опис електромагнітних і теплових процесів потребує використання нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Аналітичні розв'язки для таких рівнянь можуть бути отримані лише для спрощених моделей, які не враховують реальних фізичних особливостей матеріалів.

У зв'язку з цим постає завдання створення адекватних математичних моделей, що враховують нелінійні магнітні властивості сталей та дозволяють із необхідною для практики точністю визначати розподіл напруженості магнітного поля в тілі деталі. Такий підхід відкриває можливість більш точного прогнозування процесів теплопровідності та формування напружено-деформованого стану, що безпосередньо впливає на якість і надійність оброблених деталей.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблемам моделювання електромагнітних процесів у феромагнітних матеріалах присвячено значну кількість досліджень. У класичних працях

© Я.М. Пелех, О.П. Козарь, Т.В. Магеровська, С.М. Ментинський, Я.П. Легета

розглянуто основні принципи індукційного нагріву та подано інженерні методики розрахунку процесів нагріву для різних класів матеріалів. Ці роботи заклали основу для подальшого розвитку теоретичних та прикладних досліджень у галузі. Аналіз літератури дозволяє зробити висновок, що актуальною задачею є поєднання точних апроксимацій магнітних характеристик сталей із ефективними числовими методами для розв'язання відповідних диференціальних рівнянь. Такий підхід дозволяє не тільки підвищити точність визначення напруженості магнітного поля, але й створює основу для побудови моделей, орієнтованих на потреби прикладної механіки та технології машинобудування.

Для розрахунку властивостей магнітного поля запропоновано методику, яка базується на представленні шуканого розв'язку диференціального рівняння в ланцюговий дріб [1]. Ланцюгові дроби можна розглядати як один з основних алгоритмів для знаходження апроксимацій Паде [2]. У роботах [3-8] з використанням різних нелінійних апроксимацій досліджуються конкретні прикладні задачі.

Переваги такого підходу полягають у тому, що, використовуючи на кожному кроці інтегрування лише чотири обчислення правої частини диференціального рівняння, отримано метод четвертого порядку точності та два двосторонні наближення третього порядку точності, а також знайдено явну оцінку головного члена локальної похибки результату. Запропонований нелінійний метод є вкладеним методом порядку точності 4(3) з двосторонньою оцінкою похибки.

Актуальність дослідження. Якість і відтворюваність формування заданих механічних властивостей деталей в процесі індукційної термообробки визначається точністю прогнозування розподілу напруженості магнітного поля у феромагнітному шарі, адже саме він зумовлює температурне поле, градієнти, а відтак – залишкові напруження та втомну довговічність. Запропонована в роботі математична модель, в якій магнітна проникність апроксимується дробово-раціональною функцією забезпечує високоточне відтворення періодичної складової напруженості магнітного поля. Це дозволяє оперативно досліджувати технологічні «вікна» процесу (перехід від поверхневого зміцнення до об'ємного нагріву, підбір частоти та сили струму індуктора), зменшити число натурних проб, підвищити енергоефективність і керованість режимів.

Метою дослідження є розроблення математичної моделі та числових методів для визначення періодичної складової напруженості магнітного поля у шарі електротехнічної сталі Е43, яка широко використовується в електротехнічних та машинобудівних конструкціях. Особливу увагу приділено можливості застосування результатів моделювання для оптимізації технологічних режимів індукційної термообробки, забезпечення раціонального розподілу температурних полів і контролю залишкових напружень у деталях машин.

Викладення основного матеріалу.

1. Математична модель.

Розглянемо задачу визначення періодичної складової напруженості магнітного поля в шарі електротехнічної сталі, на поверхні $\underline{z} = 0$ якої підтримується напруженість

$$\overline{H}^{(0)} = \{0, H_0 \sin(2\pi \nu \underline{t}), 0\},$$

де ν – частота, $\underline{z}$ – координата товщини, $\underline{t}$ – час.

Ми будемо виходити з рівнянь Максвелла [5], нехтуючи струмами зміцнення. Тоді отримаємо рівняння

$$\sigma \underline{\mu}(H) \frac{\partial H}{\partial \underline{t}} = \frac{\partial^2 H}{\partial \underline{z}^2}, \quad (1)$$

з граничними умовами

$$H(0, \underline{t}) = H_0 \sin(2\pi \nu \underline{t}), \quad H(l, \underline{t}) = 0, \quad (2)$$

а також з умовою періодичності

$$H(\underline{z}, \underline{t} + T) = H(\underline{z}, \underline{t}). \quad (3)$$

Тут $\underline{\mu}(H) = \frac{dB(H)}{dH}$, де $B = B(H)$ – індукція магнітного поля, σ – коефіцієнт електропровідності, $T = 1/\nu$ – період коливань електромагнітної хвилі, l – товщина шару.

Зауважимо, що залежності $B = B(H)$ або $\underline{\mu} = \underline{\mu}(H)$ є нелінійними. Для сталі Е43 вони показані на рис. 1 та рис. 2 суцільними лініями.

Розв'язуючи задачу (1)-(3), ми будемо апроксимувати залежність $\underline{\mu} = \underline{\mu}(H)$ дробово-раціональною функцією вигляду

$$\underline{\mu}(H) = \mu_0 \mu_{init} \frac{1 + A_1 H^2}{1 + A_2 H^2 + A_3 H^4}. \quad (4)$$

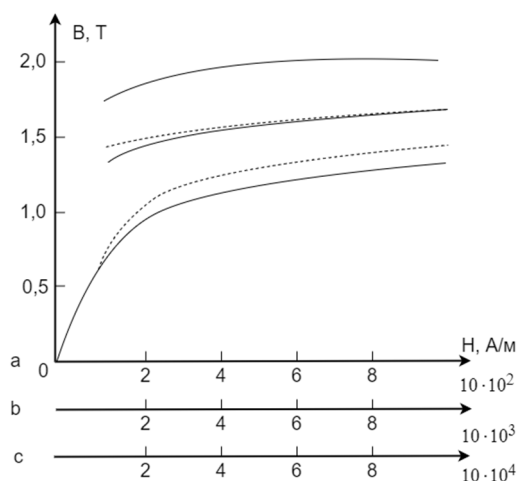


Рис. 1. Залежності індукції магнітного поля, що визначаються формулою (8) і експериментальними даними для сталі E43

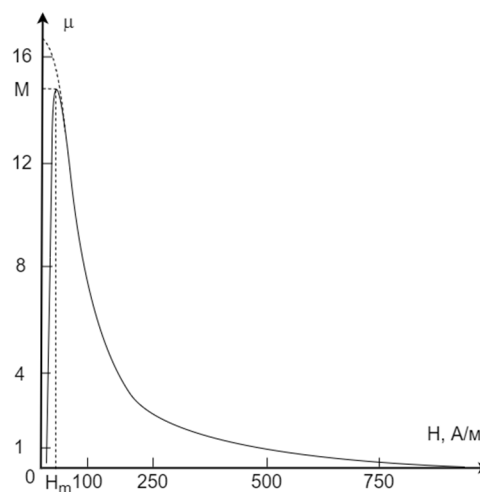


Рис. 2. Залежності напруженості магнітного поля, що визначаються формулою (7) і експериментальними даними для сталі E43

Константи A_i ($i = 1, 2, 3$) у співвідношенні (4) визначаються з умов:

$$\begin{aligned} \underline{\mu}(H_m) &= \mu_{\max} \mu_0, & \frac{d\underline{\mu}(H_m)}{dH} &= 0, \\ \underline{\mu} \frac{d^2 \underline{\mu}(H_m)}{dH^2} &< 0, & \lim_{H \rightarrow \infty} B(H) &= B_S, \end{aligned} \quad (5)$$

які відображають особливості експериментальних залежностей $\underline{\mu} = \underline{\mu}(H)$ та $B = B(H)$. Тут μ_0 – магнітна константа, μ_{init} та $\mu_{\max}$ – відповідно початкова та максимальна відносні магнітні проникності матеріалу, H_m – значення магнітного поля для максимальної магнітної проникності, B_S – індукція насичення.

При цьому отримаємо:

$$A_1 = \frac{\sqrt{K^2 - \alpha^2 G} - K}{\alpha^2}, \quad A_2 = \frac{\mu_{init} (A_1 H_m^2 + 2) - 2\mu_{\max}}{\mu_{\max} H_m^2}, \quad A_3 = \frac{\mu_{\max} - \mu_{init}}{\mu_{\max} H_m^4}, \quad (6)$$

де

$$K = \alpha^2 \sqrt{A_3} - \frac{A_3}{2M}, \quad G = A_3 (\alpha^2 - 2\sqrt{A_3} + 2H_m^2 A_3),$$

$$\alpha = \frac{\pi \mu_0 \mu_{init}}{2B_S}, \quad M = \frac{\mu_{\max}}{\mu_{init}}.$$

Зауважимо, що у випадку великих значень напруженості магнітного поля, апроксимацію (4) можна записати як

$$\underline{\mu}(H) = \frac{\mu_0 \mu_{init}^*}{1 + AH^2}. \quad (7)$$

Для цього випадку залежність індукції магнітного поля від напруженості можна описати уточненою формулою Мюллера [5]:

$$B = \beta \arctan \sqrt{AH}, \quad (8)$$

і коефіцієнти апроксимації матимуть вигляд:

$$\beta = \mu_{init}^* \mu_0 \sqrt{A}, \quad A = \frac{A_3}{A_2}, \quad \mu_{init}^* = \frac{A_1}{A_2} \mu_{init}.$$

Графік функції $\underline{\mu}(H)$ що визначається формулою (7) для сталі Е43 наведено на рис. 2 штриховою лінією.

Перейдемо в задачі (1)-(3) до безрозмірних величин:

$$t = \omega \underline{t}, \quad z = \frac{\underline{z}}{l}, \quad u = \frac{H}{H_0},$$

$$b = \frac{B}{\mu_0 \mu_{init} H_0}, \quad \mu(u) = \frac{\underline{\mu}(H)}{\mu_0 \mu_{init}}.$$

Тоді вихідне рівняння (1) набуває вигляду

$$2\gamma^2 \mu(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (9)$$

де

$$\mu(u) = \begin{cases} \frac{1 + a_1 \varepsilon u^2}{1 + a_2 \varepsilon u^2 + a_4 \varepsilon^2 u^4}, & \text{для співвідношення (4)} \\ \frac{a_1}{a_2 + a_3 \varepsilon u^2}, & \text{для співвідношення (7)} \end{cases} \quad (10)$$

Граничні умови та умова періодичності мають вигляд

$$u(0, t) = \sin(t), \quad u(1, \underline{t}) = 0, \quad (11)$$

$$u(\underline{z}, \underline{t} + 2\pi) = u(\underline{z}, \underline{t}). \quad (12)$$

Тут

$$a_1 = \frac{A_1}{\alpha^2}, \quad a_2 = \frac{A_2}{\alpha^2}, \quad a_3 = \frac{A_3}{\alpha^4},$$

$$\varepsilon = (\alpha H_0)^2, \quad \gamma^2 = \pi \sigma \mu_{init} \mu_0 \nu l^2. \quad (13)$$

Після дискретизації відносно просторової змінної, задача (9), (10), (11) зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{1 + a_2 \varepsilon u_i^2(t) + a_3 \varepsilon^2 u_i^4(t)}{1 + a_1 \varepsilon u_i^2(t)} \cdot \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{2\gamma^2 \bar{h}^2}, & \text{для (4)} \\ \frac{a_2 + a_3 \varepsilon u_i^2(t)}{a_1} \cdot \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{2\gamma^2 \bar{h}^2}, & \text{для (7)} \end{cases} \quad (14)$$

з початковою умовою

$$u_0(t) = \sin(t), \quad u_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad u_N(t) = 0, \quad (15)$$

де $\bar{h} = \frac{1}{N}$, N – число точок розбиття відрізка $[0, 1]$.

2. Методика розв'язання задачі електродинаміки.

Спочатку представимо задачу (14)-(15) у більш загальному випадку, а саме у вигляді задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x \in [x_0, x_0 + L], \quad (16)$$

де $y(x)$ – дійсний m – компонентний вектор, f – дійсна векторна функція залежної та незалежної змінних, причому припускається, що функція f володіє необхідною для викладок гладкістю.

Нелінійні двосторонні [9, 11, 12] числові алгоритми розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь (16) будуються так, щоб локальна похибка схеми в кожній вузловій точці мала вигляд:

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \omega h^p KF(f) + O(h^{p+1}), \quad (17)$$

де $y(x_{n+1})$ і y_{n+1} – відповідно точний і наближений розв'язок задачі (16), h – крок інтегрування, $F(f)$ – деякий диференціальний оператор, обчислений в точці (x_n, y_n) , K – константа, p – порядок точності методу, ω – параметр двосторонності.

Для зменшення громіздкості записів, наводимо алгоритм знаходження наближеного розв'язку задачі Коші (16) у скалярному випадку, оскільки на системи диференціальних рівнянь відповідні розрахункові формули переносяться покомпонентно.

Згідно з теорією побудови однокрокових методів [12,13], числовий розв'язок задачі (16) представимо у вигляді С-дробу [1, 9]:

$$y_{n+1}^{[k,l]} = \frac{y_n}{D_n}, \quad (18)$$

де

$$D_n = \sum_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \frac{d_{k,0}}{1 + \frac{d_{k,1}}{1 + \dots + \frac{d_{k,l-1}}{1 + d_{k,l}}}}.$$

Вирази для $d_{k,l}$ у випадку $k+l = \overline{1,4}$ ($k = \overline{1,4}$; $l = \overline{0,3}$) мають вигляд:

$$\begin{aligned} d_{0,0} &= 1, \quad d_{i,0} = - \sum_{m=1}^i d_{i-m,0} \cdot \frac{\sigma_m}{y_n}, \quad i = \overline{1,4}, \\ d_{v,1} &= - \frac{d_{v+1,0}}{d_{v,0}}, \quad v = \overline{1,3}, \quad d_{\mu,2} = d_{\mu+1,1} - d_{\mu,1}, \quad \mu = 1, 2 \\ d_{1,3} &= d_{1,2} \frac{d_{2,2}}{d_{1,2}}, \quad \sigma_m = h \sum_{i=1}^q a_{mi} k_i, \quad q = k+l, \\ k_i &= f(x_n + \alpha_i h, y_n + h \sum_{j=1}^q \beta_{ij} k_j), \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^q \beta_{ij}, \quad y_n \neq 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Тут h – крок інтегрування ($h = x_{n+1} - x_n$, $n = 0, 1, \dots$), a_{ij} , α_i , β_{ij} ($i, j = \overline{1,4}$) – параметри.

Ці формули дозволяють будувати як явні ($\beta_{ij} = 0$, при $i \leq j$), так і неявні числові методи.

Значення параметрів a_{ij} , α_i , β_{ij} зручно записувати у вигляді таблиці:

α_1	β_{11}	$\dots$	β_{1v}	a_{11}	$\dots$	a_{1v}
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
α_v	β_{v1}	$\dots$	β_{vv}	a_{v1}	$\dots$	a_{vv}

При значеннях k і l ($k = \overline{1,4}$; $l = \overline{0,3}$) отримано розрахункові формули різного порядку точності p ($p = \overline{1,4}$). Розвинувши в ряд Тейлора по степенях h розв'язок задачі (16) і її наближений розв'язок (6), а також взявши їх різницю і прирівнявши до нуля відповідні коефіцієнти при степенях h^i ($i = \overline{1,4}$), отримаємо умови, яким повинні задовольняти параметри $a_{ij}, \alpha_i, \beta_{ij}$ ($i, j = \overline{1,4}$), щоб

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{[k,l]} = O(h^5).$$

Проілюструємо побудову числового методу при $k=4$ і $l=0$. В результаті отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_{22} + a_{32} + a_{42})\alpha_2 + (a_{33} + a_{43})\alpha_3 + (a_{34} + a_{44})\alpha_4 = \frac{1}{2} \\ (a_{22} + a_{32} + a_{42})\frac{\alpha_2^2}{2} + (a_{33} + a_{43})\frac{\alpha_3^2}{2} + (a_{34} + a_{44})\frac{\alpha_4^2}{2} = \frac{1}{6} \\ (a_{22} + a_{32} + a_{42})\frac{\alpha_2^3}{6} + (a_{33} + a_{43})\frac{\alpha_3^3}{6} + (a_{34} + a_{44})\frac{\alpha_4^3}{6} = \frac{1}{24} \\ (a_{33} + a_{43})\beta_{32}\alpha_2 + (a_{34} + a_{44})(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3) = \frac{1}{6} \\ (a_{33} + a_{43})\beta_{32}\alpha_2^2 + (a_{34} + a_{44})(\beta_{42}\alpha_2^2 + \beta_{43}\alpha_3^2) = \frac{1}{12} \\ (a_{33} + a_{43})\alpha_3\beta_{32}\alpha_2 + (a_{34} + a_{44})(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3) = \frac{3}{24} \\ (a_{34} + a_{44})\beta_{43}\beta_{32}\alpha_2 = \frac{1}{24} \\ \sum_{i=1}^4 a_{4i} = 0, \sum_{i=2}^4 a_{4i}\alpha_i = 0, \sum_{i=2}^4 a_{4i}\frac{\alpha_i^2}{2} = 0, \\ a_{43}\beta_{32}\alpha_2 + a_{44}(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3) = 0, \\ \sum_{i=1}^4 a_{3i} = 0, \sum_{i=2}^4 a_{3i}\alpha_i = 0 \\ (a_{22} + a_{32})\frac{\alpha_2^2}{2} + a_{33}\frac{\alpha_3^2}{2} + a_{34}\frac{\alpha_4^2}{2} = \frac{1}{6} \\ a_{33}\beta_{32}\alpha_2 + a_{34}(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3) = \frac{1}{6} \\ a_{21} + a_{22} = 0, \quad a_{22}\alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}. \end{array} \right. \quad (20)$$

Наведемо один набір коефіцієнтів розв'язку системи (20). Поклавши $\alpha_2 = \alpha_3$; отримаємо:

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \alpha_3 = 1/2; \quad \alpha_4 = 1; \quad \beta_{21} = \frac{1}{2}; \quad \beta_{31} = \frac{(\beta_{43} - 1)}{2\beta_{43}}; \\ \beta_{32} = \frac{1}{2\beta_{43}}; \quad \beta_{41} = 0; \quad \beta_{42} = 1 - \beta_{43}; \\ a_{11} = 1; \quad a_{21} = -1; \quad a_{22} = 1; \quad a_{31} = 1/6; \\ a_{32} = -\frac{(1 + \beta_{43})}{3}; \quad a_{33} = \frac{\beta_{43}}{3}; \quad a_{34} = \frac{1}{6}; \\ (a_{1j} = 0, j = 2, 3, 4; \quad a_{23} = a_{24} = 0; \quad a_{4i} = 0, i = \overline{1, 4}), \quad \beta_{ij} = 0 \text{ при } i \leq j; \end{aligned} \quad (21)$$

де β_{43} ($\beta_{43} \neq 0$) – параметр.

Якщо у співвідношеннях (20) покласти

$$a_{42} \frac{\alpha_2^2}{2} + a_{43} \frac{\alpha_3^2}{2} + a_{44} \frac{\alpha_4^2}{2} = -\frac{\omega_1}{2},$$

$$a_{42}\beta_{32}\alpha_2 + a_{44}(\beta_{42}\alpha_2 + \beta_{43}\alpha_3) = -\frac{\omega_2}{2},$$

то

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{[4,0]} = h^4 \{ \omega_1 F_1(f) + \omega_2 F_2(f) \} + O(h^5).$$

Наведемо значення параметрів для двосторонніх формул при $\alpha_2 = \alpha_3$:

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}, \quad \beta_{21} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{31} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\beta_{43}}, \quad \beta_{32} = \frac{1}{2\beta_{43}},$$

$$\alpha_4 = 1, \quad \beta_{41} = 0, \quad \beta_{42} = 1 - \beta_{43},$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 1, \quad a_{23} = a_{24} = 0,$$

$$a_{31} = \frac{1}{6} + 2\omega_1, \quad a_{32} = 4\omega_1(\beta_{43} - 1) - 2\omega_2\beta_{43} - \frac{1}{3}(1 + \beta_{43}),$$

$$a_{33} = \frac{1}{3}\beta_{43} + 2\beta_{43}(\omega_2 - 2\omega_1), \quad a_{34} = \frac{1}{6} + 2\omega_1, \quad a_{41} = -2\omega_1,$$

$$a_{42} = 4\omega_1(1 - \beta_{43}) + 2\omega_2\beta_{43}, \quad a_{43} = 2\beta_{43}(2\omega_1 - \omega_2), \quad a_{44} = -2\omega_1, \quad (22)$$

де β_{43} – відмінний від нуля параметр.

Поклавши $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, отримаємо наступну множину параметрів:

0	0	0	0	1	0	0	0
1/2	1/2	0	0	-1	1	0	0
1/2	0	1/2	0	1/6 + 2ω	-2ω - 2/3	1/3 - 2ω	1/6 + 2ω
1	0	0	1	-2ω	2ω	2ω	-2ω

При цьому

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \omega h^4 (D^2 f + f_y \cdot Df) + O(h^5) \cong h \sum_{i=1}^4 \tilde{a}_{4i} k_i. \quad (23)$$

Зауваження 1. Якщо покласти $\omega = 0$, то отримуємо набір коефіцієнтів для методу четвертого порядку точності.

Зауваження 2. Запропоновані розрахункові формули, використовуючи лише чотири звертання до правої частини диференціального рівняння, дозволяють отримувати не тільки односторонній метод четвертого порядку точності, але і двосторонні розрахункові формули третього порядку точності з оцінкою головного члена локальної похибки. Для порівняння, відповідні двосторонні лінійні методи Рунге-Кутта третього порядку точності використовують не менше 6 звертань до правої частини диференціального рівняння [13].

3. Аналіз розв'язків.

Розрахунки напруженості магнітного поля були проведені для електротехнічної сталі Е43, характеристики якої такі:

$$\mu_{\max} = 9000, \quad B_S = 2,07, \quad H_m = 30.$$

Тоді згідно з (13) $a_1 = 713610$, $a_2 = 41238,18$, $a_3 = 10752490$. Для знайдених a_1, a_2, a_3 функція $B = B(H)$, яка відповідає залежності $\mu = \mu(H)$ згідно з формули (4), показана на рис. 1 штриховою лінією. З рис. 1 видно, що запропонована апроксимація функції $\mu = \mu(H)$ з достатньою для практики точністю апроксимує залежність $B = B(H)$ для сталі Е43.

Розв'язавши задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (14)-(15) запропонованим двостороннім методом, був проведений гармонічний аналіз. Наведемо результати дослідження розподілу амплітуд напруженості магнітного поля по товщині шару для обраних наближень (4) та (7) для $\gamma = 6$.

На рис. 3 та рис. 4 суцільними лініями показано (у випадку залежності (4)) розподіл амплітуди першої гармоніки напруженості магнітного поля відповідно для $\varepsilon = 0; 0,0001; 0,001; 0,01; 0,1$ та $\varepsilon = 0,2; 1; 10; 100; 1000$. Як видно з рисунків, при зміні ε від 0 до 0,2 розподіл поля має приповерхневий характер, а найбільший – при $\varepsilon = 0,2$. Для $\varepsilon > 0,2$ ступінь ослаблення магнітного поля зменшується, тобто розподіл стає більш лінійним.

Графіки розподілу амплітуд третьої гармоніки напруженості магнітного поля для $\varepsilon = 0; 0,0001; 0,001; 0,01; 0,1$ та $\varepsilon = 0,2; 1; 10; 100; 1000$ показані суцільними лініями на рис. 5 та рис. 6 відповідно.

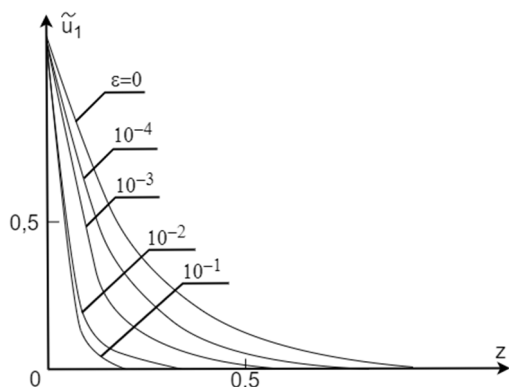


Рис. 3. Розподіл амплітуди першої гармоніки напруженості магнітного поля при $\varepsilon = 0; 10^{-4}; 10^{-3}; 10^{-2}; 10^{-1}$.

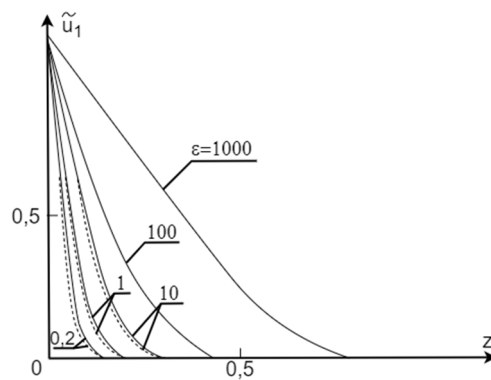


Рис. 4. Розподіл амплітуди першої гармоніки напруженості магнітного поля при $\varepsilon = 0,2; 1; 10; 10^2; 10^3$.

На рис. 4 і рис. 6 для порівняння штриховими лініями показані розподіли амплітуд першої та третьої гармоніки напруженості магнітного поля, знайдених із залежності (7) для $\varepsilon = 0,2; 1; 10; 100; 1000$. При $\varepsilon = 100$ і $\varepsilon = 1000$ ці графіки співпадають.

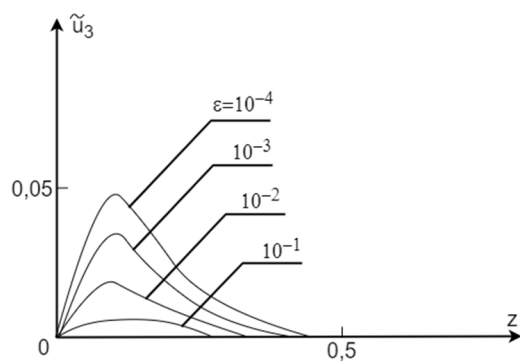


Рис. 5. Розподіл амплітуди третьої гармоніки напруженості магнітного поля при $\varepsilon = 0; 10^{-4}; 10^{-3}; 10^{-2}; 10^{-1}$.

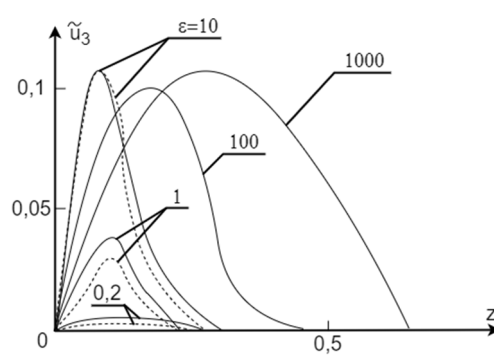


Рис. 6. Розподіл амплітуди третьої гармоніки напруженості магнітного поля при $\varepsilon = 0,2; 1; 10; 10^2; 10^3$.

З аналізу результатів видно, що різниця між розв'язками рівняння (9) при різних $\underline{\mu}$, визначених з (10), зменшується зі збільшенням ε . Так, для $\varepsilon > 0,1$ вона стає менше 3%, а для $\varepsilon > 100$ – менше 1%. Це означає, що при визначенні електромагнітного поля у феромагнітних тілах для слабких полів необхідно використовувати наближення $\underline{\mu} = \underline{\mu}(H)$, яке визначається формулою (4). У випадку сильних полів потрібно використовувати формулу (7).

Висновки. Побудовано математичну модель для визначення періодичної складової напруженості магнітного поля в шарі електротехнічної сталі. Для дослідження побудованої моделі використано нелінійний метод четвертого порядку точності та двосторонні наближення третього

порядку точності з оцінкою головного члена локальної похибки результату. Запропонований метод є вкладеним [14, 15, 16] методом порядку точності 4(3) з двосторонньою оцінкою похибки в кожній точці інтегрування. Запропоновані розрахункові формули дозволяють на кожному кроці інтегрування зменшити кількість звернень до правої частини рівняння на 25% порівняно з класичними двосторонніми методами Рунге-Кутти [13].

Із аналізу отриманих результатів слідує, що при визначенні електромагнітного поля у феромагнітних тілах для слабких полів необхідно використовувати наближення $\underline{\mu} = \underline{\mu}(H)$, яке визначається формулою (4). У випадку сильних полів потрібно використовувати формулу (7).

Результати, що випливають з дослідження математичної моделі розподілу електромагнітних полів можна використовувати для побудови раціональних режимів обробки феромагнітних елементів конструкцій типу пластин, а також при аналізі та синтезі мікроелектромеханічних систем на етапі проектування [8].

Список використаних джерел:

1. Jones W. B., Thron W. J., & Waadeland H. (1982). Analytic theory of continued fractions Lecture Notes in Mathematics, Vol. 932. Springer-Verlag.
2. Baker G. A. & Graves-Morris P. (1996). Padé approximants (2nd ed.). Cambridge University Press.
3. Butusov D., Karimov A., Tutueva A., Kaplun D & Nepomuceno E. (2019) The Effects of Padé numerical integration in simulation of conservative chaotic systems, Entropy, 21(4), pp. 362-369.
4. Hofreither C. A. (2019) Unified view of some numerical methods for fractional diffusion. RICAM. Austrian Academy of sciences. Report № 12, 21 p.
5. Pelekh Ya., Mentynskyi S., Stolyarchuk R., Fil B. & Kunynets A. (2020) Modelling and Methods for Calculating of Electromagnetic Field in a Conducting Ferromagnetic Layer. 15th International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies, CSIT-2020. Proceeding, 1, pp. 150-154.
6. Пелех Я. М., Кунинець А. В., Ментинський С. М., Філь Б. М. (2021) Моделювання нестационарних процесів дифузії водню поблизу вершини тріщини в полі неоднорідних механічних напружень // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології : науковий збірник. № 33. – С. 93–98.
7. Ігнатишин М. І., Пелех Я. М., Глинський Я. М., Пахолок Б. Б. (2021) Моделювання та анімація пружинного гасника коливань // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології: науковий збірник. – № 32. – С. 131–135.
8. Auzinger W., Stolyarchuk R., Pelekh Y., Kozar O., Mentynskyi S., Ihnatyshyn M. (2020). The Studying of Hydrogen Diffusion Non-Stationary Processes Near a Crack in the Field of Heterogeneous Mechanical Tensions for the Encapsulated MEMS Devices. International Conference on Perspective Technologies and Methods in MEMS Design, (MEMSTECH-2020), pp. 164-168.
9. Пелех Я.М., Будз І.С., Кунинець А.В., Ментинський С.М., Філь Б.М. (2019) Методи розв'язування початкової задачі з двосторонньою оцінкою локальної похибки. Науковий вісник НЛТУ України. – Т. 29, № 9. – С. 153-160.
10. Gybkina, N, Sidorov, M., Vasylyshyn K. (2021). Application of two-sided approximations method to solution of first boundary value problem for one-dimensional nonlinear heat conductivity equation. Системні дослідження та інформаційні технології. – № 4. – С. 115-127.
11. Пелех Я. М., Кунинець А. В., Пелех Р. Я. (2022) Двосторонні методи розв'язування початкової задачі для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь // Журнал обчислювальної та прикладної математики, № 2. – С. 116–121.
12. Butcher J. C. (2016) Numerical methods for ordinary differential equations. London: John Wiley & Sons.
13. Ляшко І.І., Макаров В.Л., Скоробогатько А.А. (1977) Методы вычислений. Киев: Вища школа.
14. Bogacki P., Shampine L. F. (1989) A 3(2) pair of Runge-Kutta formulas. Appl. Math. Let. – 2(4), pp. 321–325.
15. Пелех Я. М., Кунинець А. В., Пахолок Б. Б. (2023) Вкладені методи з двосторонньою оцінкою локальної похибки для розв'язування нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології : науковий збірник. – Вип. 37. – С. 62-66.
16. Пелех Я. М., Кунинець А. В., Ментинський С. М. (2023) Числові методи розв'язування початкової задачі для нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь // Вісник Львівського університету. Серія: Прикладна математика та інформатика. – Вип. 31. – С. 64–74.

Рецензент Рубіш Василь Михайлович, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач Ужгородської лабораторії матеріалів оптоелектроніки та фотоніки Інституту проблем реєстрації інформації НАН України.