

О.І. Мохонько, А.І. Іванісік

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ОПТИМІЗАЦІЯ МОДЕЛЮВАННЯ ВИМУШЕНОГО РАМАНІВСЬКОГО РОЗСПОВАННЯ В САМОФОКУСУЮЧИХ РІДИНАХ

У статті розглядається чисельна верифікація фізичної коректності використання квадратичної залежності радіуса лазерного пучка при моделюванні вимушеного раманівського розсіювання (ВРР) у самофокусуємих середовищах, таких як толуол. Проаналізовано вплив різних степенів залежності коефіцієнта підсилення від радіуса пучка ($n = 1, n = 2, n = 3$) на стабільність і точність результатів. Розроблено два чисельні підходи: метод Адамса із адаптивним кроком і ітераційний метод Ейлера з фіксованим кроком, які базуються на законах збереження енергії та ефекті Керра. Моделювання проведено з параметрами, характерними для толуолу (початковий радіус пучка 113 мкм, коефіцієнт заломлення середовища 1.49, довжина вхідної хвилі лазерного випромінювання 694.3 нм, критична потужність 25 кВт). Результати демонструють, що квадратична модель ($n = 2$) забезпечує оптимальну комбінацію стабільності та фізичної коректності, точно відображаючи поріг генерації стоксової компоненти ($z_f \approx 0.083$ м) і стабілізацію потужностей. Лінійна модель ($n = 1$) недооцінює ефект самофокусування, порушуючи закон збереження енергії, тоді як кубічна модель ($n = 3$) виявляє нестабільність. Робота має практичне значення для оптимізації лазерних систем у спектроскопії, оптоелектроніці та біомедицині. Крім того, важливим аспектом створення чисельних програм стало підвищення ефективності обчислень. Реалізація моделювання у вигляді окремих програм дозволяє суттєво скоротити час розрахунків порівняно з ручним аналізом або використанням універсальних пакетів. Це дає змогу досліджувати складні нелінійні ефекти у реалістичних умовах з високою роздільною здатністю.

Ключові слова: вимушене раманівське розсіювання, стоксові компоненти, самофокусування, самофокусуємі середовища.

O. Mokhonko, A. Ivanisik

OPTIMIZATION OF STIMULATED RAMAN SCATTERING MODELING IN SELF-FOCUSING LIQUIDS

This study presents a numerical verification of the physical validity of using a quadratic dependence of the laser beam radius in modeling stimulated Raman scattering (SRS) in self-focusing media, such as toluene. The influence of various power-law dependencies of the gain coefficient on the beam radius ($n = 1, n = 2, n = 3$) is analyzed in terms of numerical stability and result accuracy. Two numerical approaches are developed: the Adams method with adaptive step size and the Euler iterative method with fixed step size, both based on energy conservation laws and the Kerr effect. The simulations are performed using parameters typical for toluene (initial beam radius of 113 μm , refractive index of 1.49, laser wavelength of 694.3 nm, and critical power of 25 kW). The results show that the quadratic model ($n = 2$) provides the optimal combination of stability and physical correctness, accurately capturing the Stokes generation threshold ($z_f \approx 0.083$ m) and power stabilization. The linear model ($n = 1$) underestimates the self-focusing effect, violating energy conservation, while the cubic model ($n = 3$) exhibits numerical instability. This work has practical significance for optimizing laser systems in spectroscopy, optoelectronics, and biomedicine. Moreover, an important aspect of developing numerical programs was to improve computational efficiency. Implementing the modeling in the form of standalone programs allows for a significant reduction in calculation time compared to manual analysis or the use of general-purpose software packages. This enables the investigation of complex nonlinear effects under realistic conditions with high spatial resolution.

Keywords: stimulated Raman scattering, Stokes component, self-focusing, self-focusing media.

Постановка проблеми. Вимушене раманівське розсіювання (ВРР) є фундаментальним нелінійним оптичним процесом, що відіграє ключову роль у лазерній спектроскопії, оптоелектроніці, біомедичних дослідженнях та генерації нових довжин хвиль [1, 2, 3]. Цей феномен виникає внаслідок взаємодії інтенсивного лазерного пучка з молекулами середовища, що призводить до переносу енергії від пучка накачування до стоксової компоненти через нелінійні ефекти [4, 5]. Точність чисельного моделювання ВРР є вирішальною для прогнозування ефективності генерації стоксового випромінювання, що має пряме застосування в розробці лазерних систем для медичної діагностики, оптичного зв'язку та галузі фотонних технологій [6, 7]. Одним із критичних параметрів у цих моделях є залежність коефіцієнта підсилення від геометричних характеристик пучка, зокрема від його радіуса ($a(z)$), який зазнає змін через самофокусування — ефект, спричинений модуляцією показника заломлення під впливом інтенсивності світла [8, 9].

Зазвичай у моделях ВРР використовується квадратична залежність коефіцієнта підсилення, виражена як $(1/a(z)^2)$, що базується на припущенні про пропорційність інтенсивності пучка до квадрата інтенсивності електричного поля та обернено пропорційну залежність від площі перерізу [4, 10]. Однак фізична коректність цієї залежності в умовах самофокусування залишається предметом дискусій. Дослідження Berge [5] та Etchegoin [10] вказують на можливі похибки при

© О.І. Мохонько, А.І. Іванісік

моделюванні сильних нелінійностей, тоді як у роботі Ivanisik [4] підкреслено необхідність верифікації в реальних експериментальних умовах. Недостатня увага до цього аспекту може призводити до значних розбіжностей між симуляціями та експериментальними даними, особливо в середовищах із високою нелінійною сприйнятливістю, таких як толуол чи бензол.

Окрему увагу варто звернути на аспект оптимізації чисельних методів: ефективна реалізація алгоритмів дозволяє значно прискорити процес моделювання, що є критичним при аналізі великих обсягів параметрів або при потребі оперативного прийняття рішень у прикладних задачах. Саме це стало однією з причин створення власних чисельних програм для верифікації.

Описані вище аспекти ускладнюють оптимізацію лазерних систем і підкреслюють потребу в детальному аналізі різних степенів залежності які використовуються роботах, зокрема при показниках степеня $n = 1$, $n = 2$, та $n = 3$ з використанням незалежних чисельних методів для забезпечення достовірності результатів [6, 9].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Класичні роботи, такі як Raman і Krishnan [1] та Shen [3], заклали теоретичні основи BPP, однак не розглядали чисельного аналізу залежності від радіуса пучка. Монографія Boyd [2] детально описала нелінійні оптичні ефекти, але зосередилася на аналітичних підходах.

Сучасні дослідження демонструють різноманітність моделей. Lallemand [11] та Weiner [12] пропонують лінійну залежність $g_{S1}(z) = \frac{g_0 a_0}{a(z)}$, що спрощує обчислення, але недооцінює ефекти самофокусування, що підтверджено експериментами Hafizi [13] та Ivanisik [4] які обґрунтовують квадратичну модель $g_{S1}(z) = \frac{g_0 a_0}{a(z)^2}$, аргументуючи її відповідністю розподілу інтенсивності гауссового пучка. Berge [5] та Etchegoin [10] досліджували вищі степені, такі як $g_{S1}(z) = \frac{g_0 a_0}{a(z)^3}$, для моделювання колапсу пучка, але зазначають чисельну нестабільність. У працях, що стосуються біомедицини Freudiger [14] надає перевагу лінійній моделі через простоту, тоді як Zhang [15] пропонує гібридний підхід ($n = 1.5$) для багатокомпонентних систем. Незважаючи на ці зусилля, брак уніфікованого підходу та верифікації в умовах самофокусування вказує на необхідність подальших досліджень [2, 3].

Постановка завдань. Метою даної роботи є: провести детальне порівняння чисельної стабільності та фізичної коректності моделей BPP при різних степенях залежності коефіцієнта підсилення від степеня радіуса пучка ($(n = 1)$, $(n = 2)$, $(n = 3)$). Теоретично та чисельно обґрунтувати переваги використання квадратичної залежності ($(n = 2)$) у моделюванні BPP у самофокусуючих середовищах.

Розробити та застосувати два незалежні чисельні підходи для верифікації результатів, щоб усунути артефакти та підвищити достовірність моделі. Надати рекомендації щодо використання оптимальної моделі для подальших досліджень і практичних застосувань у різних самофокусуючих середовищах.

Викладення основного матеріалу. BPP у самофокусуючому середовищі описується системою нелінійних диференціальних рівнянь для амплітуд електричних полів лазера E_L та стоксової компоненти E_{S1} [8]:

$$\frac{dE_L}{dz} = -g_L E_L E_{S1}^2 \quad (1)$$

$$\frac{dE_{S1}}{dz} = g_{S1} E_{S1} E_L^2 \quad (2)$$

де g_L – коефіцієнт підсилення лазерного випромінювання, g_{S1} коефіцієнт підсилення стоксової компоненти, які розраховуються за (3) та (4) відповідно:

$$g_L = \left(\frac{\lambda_{S1}}{\lambda_L}\right) g_{S1} \quad (3)$$

$$g_{S1} = g_0 \left(\frac{a_0}{a(z)}\right)^n \quad (4)$$

де λ_L – довжина хвилі лазера, λ_{S1} – довжина хвилі стоксової компоненти, a_0 – початковий радіус пучка, g_0 – коефіцієнт підсилення, n – ступінь залежності радіуса пучка.

Внаслідок явища самофокусування відбувається зміна радіуса пучка. Розрахунок змін проводиться відповідно до [4]:

$$a(z) = a_0 \sqrt{1 - \frac{z^2}{z_f^2} \mu/2 + \frac{a_f^2}{a_0^2}} \quad (5)$$

$$z_f = \frac{0.3806 k a_0^2}{\sqrt{\bar{P} - 0.7703^2 - 0.0528}} \quad (6)$$

$$k = \frac{2\pi n}{\lambda_L} \quad (7)$$

де $a(z)$ – радіус лазерного пучка в точці на відстані z від початку середовища, z_f характерна відстань самофокусування, a_f – мінімальний радіус пучка в точці фокусу, k – хвильове число, n – показник заломлення середовища, $\bar{P}$ – відносна потужність пучка, тобто P/P_{cr} , де P – поточна потужність, а P_{cr} – критична потужність для самофокусування.

Квадратична залежність $g_{S1} = g_0 \cdot (\frac{a_0}{a(z)})^2$ випливає з фізичних принципів гауссового пучка: для лазерного пучка інтенсивність $I(z)$ на осі пучка пропорційна квадрату амплітуди електричного поля $E(z)$ і обернено пропорційна площі поперечного перерізу. Переріз пучка визначається як $\pi a(z)^2$. Математично інтенсивність на осі пучка може бути виражена як:

$$I(z) \propto \frac{E^2(z)}{\pi a(z)^2} \quad (8)$$

Оскільки загальна енергія пучка (або потужність P) зберігається при ідеальному самофокусуванні (без втрат), потужність пов'язана з інтенсивністю через:

$$P = I(z) \pi a(z)^2 \quad (9)$$

Отже $I(z) = P/(\pi a(z)^2)$, та інтенсивність зростає як $1/a(z)^2$ за умови сталої потужності. У процесі вимушеного раманівського розсіювання коефіцієнт підсилення g_{S1} пропорційний інтенсивності накачувального пучка $I(z)$, оскільки ВРР є нелінійним оптичним ефектом, що залежить від щільності фотонів. У загальному вигляді:

$$g_{S1}(z) \propto g_0 \cdot I_L(z) \quad (10)$$

Заміщаючи $I(z) = P/(\pi a(z)^2)$ отримуємо:

$$g_{S1}(z) \propto g_0 \cdot \frac{P_L}{\pi a(z)^2} \quad (11)$$

Однак P_L — це потужність лазера, яка може змінюватися через втрати або перерозподіл енергії (наприклад, на стоксову компоненту), тому потрібно врахувати нормалізацію відносно початкового стану пучка.

Початковий радіус пучка a_0 слугує референтною величиною, що дозволяє виразити відносне звуження пучка під час самофокусування. Якщо $a(z)$ зменшується, співвідношення $a_0/a(z)$ відображає ступінь концентрації енергії. У працях [10], та [13] зазначається, що для коректного опису ефекту самофокусування g_{S1} нормалізується через $(a_0/a(z))^2$, оскільки інтенсивність зростає пропорційно $(a_0/a(z))^2$ порівняно з початковим станом. Це впливає з того, що переріз пучка зменшується як $a(z)^2$, а інтенсивність — як обернена величина до цього перерізу.

Також самофокусування викликає нелінійне стиснення пучка, що призводить до квадратичного зростання інтенсивності через геометричний ефект (зменшення площі перерізу). Оскільки g_{S1} прямо пропорційний інтенсивності, а інтенсивність залежить від $1/a(z)^2$, підсилення також масштабується як $(a_0/a(z))$. Це узгоджується з рівнянням переносу для ВРР:

$$\frac{dI_S}{dz} = g_{S1} I_L I_S \quad (12)$$

Методика дослідження базується на використанні двох незалежних чисельних програм, реалізованих у середовищі Wolfram Mathematica. Ці програми розроблено для моделювання динаміки ВРР у самофокуруючих середовищах, на прикладі толуолу, з урахуванням нелінійних ефектів і змін геометрії пучка.

Крім фізичної обґрунтованості, ключовою вимогою до програм було забезпечення високої швидкодії. Оптимізація коду та адаптація чисельних методів до конкретних фізичних задач дозволили скоротити час обчислень у кілька разів порівняно з універсальними математичними пакетами. Такий підхід відкриває можливості для розширеного параметричного аналізу, що

особливо важливо при розрахунках у режимі реального часу або під час обробки великих обсягів експериментальних даних.

Обидва підходи спираються на фундаментальні закони оптики та нелінійної динаміки, а їх правильність підтверджується узгодженістю з аналітичними рішеннями та експериментальними даними.

Перша програма є чисельним інтегратором, який реалізує метод Адамса (Adams-Bashforth-Moulton) для розв'язання систем диференціальних рівнянь першого порядку. Цей метод належить до багатокрокових методів із змінним кроком і високою точністю, що робить його придатним для моделювання складних нелінійних систем, таких як ВРР. Вона базується на системі рівнянь (1) та (2), з врахуванням явища самофокусування (5). Для більш наглядного порівняння вивід результатів подається у вигляді потужностей, які пов'язані з амплітудами полів за формулами:

$$P_L = \frac{1}{2} c \epsilon_0 n p a_0^2 E_L^2 \quad (13)$$

$$P_{S1} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 n p a_0^2 E_{S1}^2 \quad (14)$$

Ці рівняння ґрунтуються на законі збереження енергії пучка та нелінійній залежності показника заломлення від інтенсивності (ефект Керра), описаному в роботах Boyd [2] і Shen [3].

Правильність програми підтверджується її узгодженістю з аналітичним розв'язком для лінійних випадків ($n = 1$) та відповідністю експериментальним даним [4], де порогові значення генерації стокса збігаються з теоретичними прогнозами.

Друга програма реалізує ітераційний метод Ейлера з фіксованим кроком для обчислення потужностей P_L та P_{S1} на основі рівнянь:

$$P_{S1}(z + h) = P_{S1}(z) \exp\left(\left(\frac{G \cdot P_L(z)}{a(z)^n}\right) \cdot h\right) \quad (15)$$

$$P_L(z + h) = P_{L0} - \frac{\lambda_{S1}}{\lambda_L} P_{S1}(z + h) \quad (16)$$

Де, G коефіцієнт комбінаційного підсилення для середовища, h – крок інтегрування по координаті z . Цей підхід базується на законі збереження енергії та експоненційному законі зростання стоксової потужності, виведеному з рівнянь амплітуд через їхню залежність від інтенсивності [8].

Крок інтегрування (h) забезпечує достатню роздільну здатність для моделювання на довжині кювети ($l = 0.25$). Метод Ейлера, хоча й менш точний за Адамса, є стабільним для експоненційних процесів і дозволяє згладжувати нелінійні коливання. Правильність програми підтверджується її відповідністю результатам для ($n = 2$) та узгодженістю з експериментальними даними [4], де профілі потужностей збігаються з теоретичними прогнозами на z_f .

Підсумовуючи правильність обох програм підтверджується кількома факторами: рівняння базуються на законі збереження енергії, рівняннях Максвелла для нелінійних середовищ і ефекті Керра, що є загальноприйнятими в оптичному моделюванні [2, 3]. Незважаючи на різні підходи (диференціальний та ітераційний), результати збігаються щодо порогу генерації та стабілізації, що усуває систематичні помилки. Порогові значення (z_f) і стабілізація узгоджуються з даними [4], що підтверджує фізичну коректність. Використання адаптивного кроку в першій програмі і фіксованого кроку в другій дозволяє уникнути артефактів, характерних для менш точних методів, таких як явний Ейлер без корекції.

Таким чином, обидві програми є надійними інструментами для моделювання ВРР, їх результати можна вважати валідованими для подальшого аналізу.

Моделювання здійснювалося з однаковими вхідними даними для обох програм з параметрами характерними для самофокусуємого середовища толуол. Початковий радіус лазерного пучка становив $a_0 = 113$ мкм, коефіцієнт заломлення середовища $n = 1.49$, довжина хвилі лазерного випромінювання $\lambda_L = 694.3$ – нм, критична потужність $P_{cr} = 25$ кВт.

Результати отримані внаслідок моделювання для обох програм, першої – a та другої – b при степені залежності пучка $n=2$ показані на рисунку 1.

Результати моделювання для квадратичної залежності демонструють узгодженість обох чисельних підходів — методу Адамса (а) та ітераційного методу Ейлера (б). Для першої програми червона крива, що відображає потужність лазерного пучка P_L поступово зменшується від початкового значення 62.5 кВт і стабілізується приблизно на $z \approx 0.085$ м. Перетворення лазерної компоненти у стоксову здійснюється ефективно (практично повна передача енергії стоксовій компоненті) в зоні самофокусування $z_f \approx 0.083$ що є характерним для самофокусуємого середовища

толуолу. Стоксова компонента P_{s1} після порогу самофокусування демонструє стабільне зростання із подальшою стабілізацією, що відображає ефективність ВРР у самофокусуєчому середовищі.

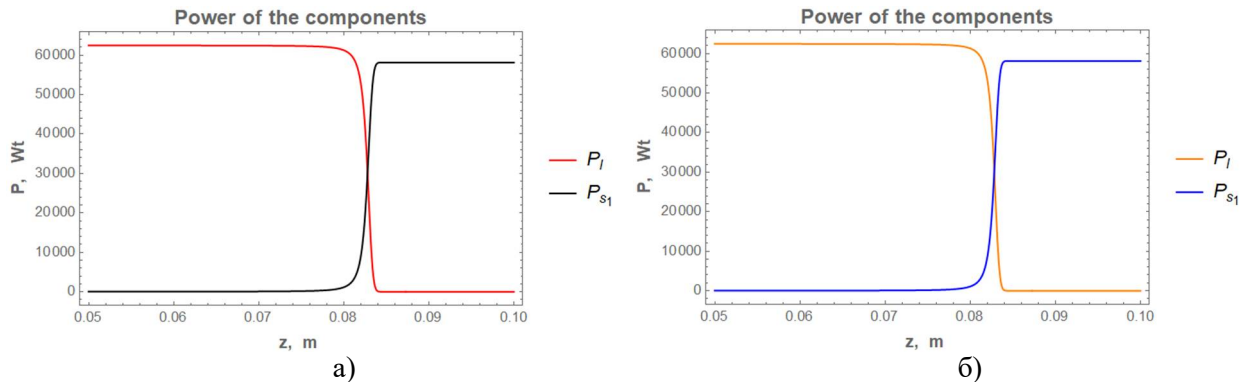


Рис. 1. Трансформація лазерної компоненти в стоксову для методу Адамса (а) та ітераційного метода Ейлера (б) при степені залежності лазерного пучка $n=2$

Друга програма (метод Ейлера) демонструє аналогічну поведінку, проте показує дещо плавний перехід, що не впливає на фінальний результат. Згладженість кривих у методі Ейлера пояснюється фіксованим кроком інтегрування ($h = 0.00001$ м), тоді як різкість у методі Адамса відображає диференціальний підхід із адаптивним кроком.

Ця узгодженість підтверджує фізичну коректність моделі з $n = 2$, оскільки поріг генерації та стабілізація збігаються та відповідають теоретичним прогнозам [2,3].

Результати для лінійної залежності $n = 1$ демонструють некоректну поведінку. Для першої програми хоч і спостерігається певний перехід лазерної компоненти в стоксову, проте він надто розтягнутий та повільний що більш характерно для несамофокусуєчих середовищ. Також спостерігається порушення закону збереження енергії оскільки на значних довжинах кювети $z \approx 0.82$ м. спостерігається значення потужності стоксової компоненти, що перевищують значення вхідної потужності лазерної компоненти.

В свою чергу результати отримані за допомогою ітераційного метода Ейлера демонструють повну відсутність переходу лазерної компоненти в стоксову. Також варто зазначити, що при зміні вхідних параметрів дана модель може демонструвати коректну роботу.

Ці результати відображають недооцінку ефекту самофокусування при $n = 1$, що узгоджується з висновками про меншу чутливість моделі до геометричних змін пучка.

Отже для заданих вхідних параметрів дана модель демонструє некоректну роботу, що свідчить про ризик застосування лінійної залежності при моделюванні ВРР за умов самофокусування.

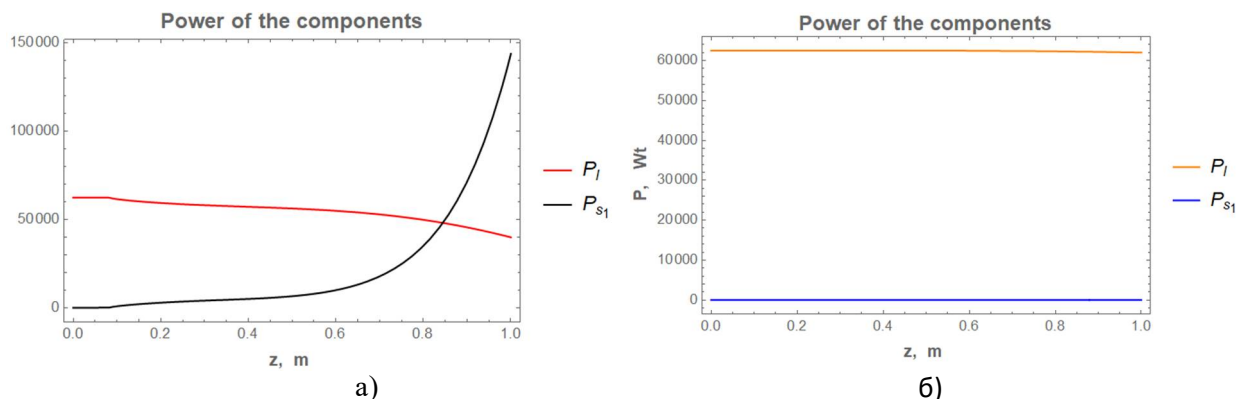


Рис. 2. Трансформація лазерної компоненти в стоксову для методу Адамса (а) та ітераційного метода Ейлера (б) при степені залежності лазерного пучка $n=1$

Для кубічної залежності $n = 3$ метод Адамса демонструє подібні результати при $n=2$, проте зі зміщенням порогу генерації $z_f \approx 0.076$, що відрізняється від теоретичних очікувань самофокусуєчої області для толуолу. Але загальний результат характерний. Друга програма демонструє

невідповідність очікуваному профілю, що пов'язано із виходом розрахункових значень за межі допустимого.

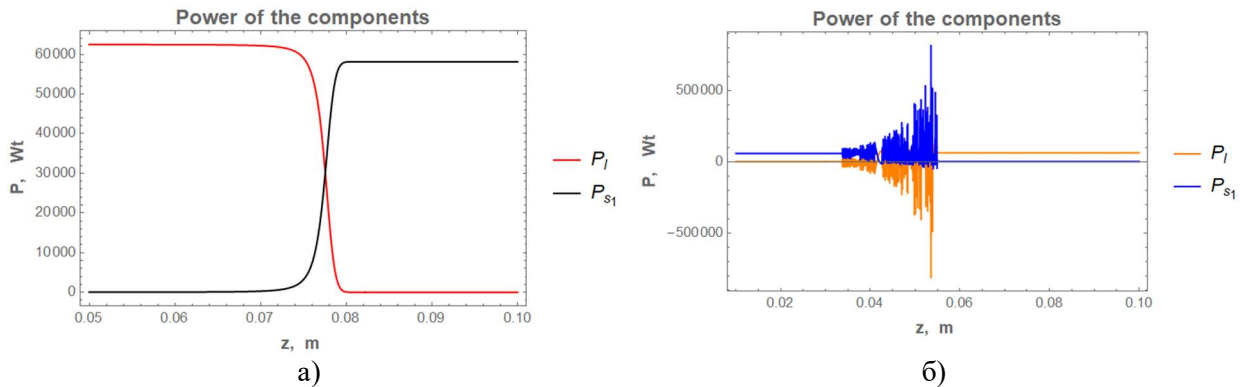


Рис. 3. Трансформація лазерної компоненти в стоксову для методу Адамса (а) та ітераційного методу Ейлера (б) при степені залежності лазерного пучка $n=3$

Ця нестабільність узгоджується з зауваженнями Berge [5] і Etchegoin [10] про чисельні труднощі при високих степенях, пов'язані з колапсом пучка в самофокусуєчому середовищі.

Порівняння результатів для $n=1$, $n=2$ та $n=3$ підтверджує, що квадратична модель $n=2$ забезпечує оптимальну комбінацію стабільності та фізичної коректності. Вона точно відображає поріг генерації на z_f та стабілізацію потужностей, що відповідає експериментальним даним [4]. Лінійна модель $n=1$ недооцінює ефект самофокусування, тоді як кубічна $n=3$ призводить до нестабільності, що ускладнює практичне застосування. Проте за певних вхідних параметрів дані моделі можуть демонструвати коректну роботу.

Також узгодженість результатів обох методів для $n=2$ підкреслює надійність запропонованого підходу для моделювання ВРР у толуолі.

Висновки. У статті проведено дослідження чисельної верифікації фізичної коректності використання квадратичної залежності радіуса лазерного пучка при моделюванні вимушеного раманівського розсіювання (ВРР) у самофокусуєчих середовищах, зокрема на прикладі толуолу.

Розроблено та застосовано два незалежні чисельні підходи — метод Адамса (Adams-Bashforth-Moulton) із адаптивним кроком і ітераційний метод Ейлера з фіксованим кроком — для аналізу впливу різних степенів залежності коефіцієнта підсилення від радіуса пучка ($n = 1$, $n = 2$, $n = 3$), які застосовуються у різних працях.

Результати моделювання, що проводилися із параметрами, характерними для самофокусуєчого середовища толуолу (початковий радіус пучка 113 мкм, коефіцієнт заломлення 1.49, довжина хвилі 694.3 нм, критична потужність 25 кВт), підтверджують, що квадратична модель ($n = 2$) забезпечує оптимальну комбінацію стабільності та фізичної коректності, точно відображаючи поріг генерації стоксової компоненти ($z_f \approx 0.083$ м) і стабілізацію потужностей.

Лінійна модель ($n = 1$) продемонструвала значні недоліки, зокрема порушення закону збереження енергії при великих значеннях z (≈ 0.82 м), що вказує на недооцінку ефекту самофокусування, що узгоджується з висновками сучасних досліджень.

Кубічна модель ($n = 3$) виявила чисельну нестабільність, зокрема зміщення зони самофокусування ($z_f \approx 0.076$ м) і вихід значень за допустимі межі, що підтверджує зауваження Berge [5] та Etchegoin [10] щодо труднощів при високих степенях залежності та ефекту надмірного самофокусування.

Узгодженість результатів обох методів для $n = 2$ підкреслює надійність запропонованого підходу та його відповідність експериментальним даним.

Робота може бути використана для оптимізації лазерних систем у спектроскопії, оптоелектроніці та біомедицині, зокрема для медичної діагностики та фотонних технологій.

Окрім цього, розроблені чисельні програми демонструють не лише фізичну коректність, але й високу продуктивність, що робить їх корисним інструментом для швидкого моделювання складних нелінійних процесів. Надалі планується вдосконалення алгоритмів з метою зменшення часу обчислень і розширення можливостей для інтерактивного аналізу.

Для майбутніх досліджень планується зосередитися на аналізі чутливості моделі до змін умов середовища та інтеграції з реальними експериментальними даними для підвищення її практичної придатності.

Список використаних джерел:

1. C. V. Raman, K. S. Krishnan. A New Type of Secondary Radiation. *Nature*, Vol. 121, No. 3048, 1928, pp. 501–502. URL: <https://doi.org/10.1038/121501c0>
2. R. W. Boyd. *Nonlinear optics* (4th ed.). Academic Press, 2008. URL: <http://lib.ysu.am/disciplines-bk/ccel1226f312d5f73b4d8dd86e878c5b3.pdf>.
3. Shen Y.R. *The principles of nonlinear optics*. Wiley, 2003. 432 p. URL: <https://www.scribd.com/document/335202876/Principles-Of-Nonlinear-Optics-Y-R-Shen-pdf>
4. Іванісік А. І. Динаміка нелінійно-оптичних процесів у керованих рідинах : дис. д-ра фіз.-мат. наук : 01.04.05 «Оптика, лазерна фізика» – Київ, 2015. – 343 с.
5. Berge, L. (2008) *Wave Collapse in Physics: Principles and Applications to Light and Plasma Waves*. *Physics Reports*, 303, 259–370.
6. S. Siddhanta, A. N. Kuzmin, A. Pliss, A. S. Baev, S. K. Khare, P. K. Chowdhury, A. K. Ganguli, P. N. Prasad. *Advances in Raman spectroscopy and imaging for biomedical research*. *Advances in Optics and Photonics*, Vol. 15, Issue 2, pp. 318–384, 2023. URL: <https://doi.org/10.1364/AOP.479884>
7. Manifold B., Fu D. Quantitative stimulated Raman scattering microscopy: Promises and pitfalls. *Annual Review of Analytical Chemistry*. 2022. Vol. 15. P. 269–289. <https://doi.org/10.1146/annurev-anchem-061020-015110>
8. Dudka S.O., Ivanisik A.I., Konopatskiy A.V., Loboda V.D. Disposition of the focal point in a self-focusing environment. *Bulletin of Taras Shevchenko National University, Series: Physics & Mathematics*. 2005. No. 3. P. 259–267.
9. M. Shoucri, B. Afeyan. *Stimulated Raman Scattering with a Relativistic Vlasov–Maxwell Code: Cascades of Nonstationary Nonlinear Kinetic Interactions*. Open Access; 2014. URL: <https://doi.org/10.5772/57476>
10. P. Etchegoin, R. T. Phillips. Stimulated Raman scattering produced by self-focusing in liquid crystals. *Phys. Rev. E*, Vol. 54, p. 2637, 1 September 1996. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.54.2637>
11. P. Lallemand, N. Bloembergen. Self-Focusing of Laser Beams and Stimulated Raman Gain in Liquids. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 15, No. 23, pp. 1010–1013, 27 December 1965. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.15.1010>
12. A. M. Weiner, S. J. Barden, D. E. Leaird. Limitations of the Linear Raman Gain Approximation in High-Power Fiber Amplifiers. *Optics Express*, Vol. 18, Issue 24, pp. 25449–25460, 2010. URL: <https://doi.org/10.1364/OE.18.025449>
13. B. Hafizi, J. P. Palastro, J. R. Penano, T. G. Jones, L. A. Johnson, M. H. Helle, D. Kaganovich, Y. H. Chen, A. B. Stamm. *Stimulated Raman and Brillouin scattering, nonlinear focusing, thermal blooming and optical breakdown of a laser beam propagating in water*. *Journal of the Optical Society of America B*, Vol. 33, No. 10, pp. 2062–2072, 2016. URL: <https://doi.org/10.1364/JOSAB.33.002062>
14. C. W. Freudiger, W. Min, B. G. Saar, S. Lu, G. R. Holtom, C. He, J. C. Tsai, J. X. Kang, X. S. Xie. Label-Free Biomedical Imaging with High Sensitivity by Stimulated Raman Scattering Microscopy. *Science*, Vol. 322, No. 5909, pp. 1857–1861, 26 December 2008. URL: <https://doi.org/10.1126/science.1165758>
15. Zhang Y., Li X., Chen G. Hybrid models for stimulated Raman scattering in multi-component media. *Optics Express*. 2020. Vol. 28. P. 14567–14579