УДК 004.032.2:629.7.014 DOI 10.36910/775.24153966.2022.73.37

Є. Б. Козак

магістр в галузі комп'ютерних наук, розробник програмного забезпечення, інженер-програміст GAN Inc.

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ КУБІЧНИМ СПЛАЙНОМ ПРИ АВТОМАТИЗАЦІЇ АЕРОНАВІГАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ

У статті розглянуто принципи застосування математичної моделі інтерполяції кубічним сплайном при автоматизації аеронавігаційної системи. Підкреслено, що на відміну від дискретного рівняння, що описує стан і вимірювання в дискретній моделі, еволюція випадкового процесу і вимірювань в часі у стохастичній диференціальній моделі може бути описана диференціальним рівнянням стану і дискретним рівнянням вимірювання. Зазначено, що стохастичні диференціальні рівняння мають два методи аналізу: сильні рішення і слабкі рішення, і тільки деякі типи стохастичних диференціальних рівнянь відносяться до замкнутих рішень з сильним рішенням; в той час як слабке рішення є розподіленим рішенням, тобто ймовірністю в безперервному функціональному просторі. Наголошується, що у стохастичних диференціальних рівняннях броунівський рух являє собою лише рушійну силу мікроскопічних випадкових флуктуацій, а не появу у властивості макроскопічного середнього. Слабке рішення стохастичного диференціального рівняння визначається функцією передачі. Обґрунтовано алгоритм кубічного сплайна, який є одновимірним випадком, щільність ймовірності сегментована для апроксимації апріорної щільності ймовірності стану системи, він безпосередньо вирішує функцію щільності ймовірності стану системи, щоб більш чітко зрозуміти різні можливості стану. Шляхом побудови умов інтерполяції кубічним сплайном, у статті дана функція використовується для апроксимації рішення прямого рівняння Колмогорова, щоб перетворити завдання в рішення системи звичайних диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів в кусковій функції. Математично доведено, що оптимальне рішення оцінки стану можна отримати за формулою Байєса, але перш за все необхідно знати попередню функцію щільності ймовірності стану системи та дослідити доцільність використання методу кубічного сплайну для його вирішення. Запропоновано алгоритм інтерполяції кубічного сплайну, який перетворює часткові диференціальні рівняння щільності ймовірності стану в часі в рішення звичайного диференціала рівняння кускової функції та розв'язує стан системи в одновимірному просторі функцій.

Ключові слова: *математична модель, інтерполяція, кубічний сплайн, автоматизація, аеронавігаційна система.*

Е.Б. Козак

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ КУБИЧЕСКИМ СПЛАЙНОМ ПРИ АВТОМАТИЗАЦИИ АЭРОНАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

В статье рассмотрены принципы применения математической модели интерполяции кубическим сплайном при автоматизации аэронавигационной системы. Подчеркнуто, что в отличие от дискретного уравнения, описывающего состояние и измерения в дискретной модели, эволюция случайного процесса и измерений во времени в стохастической дифференциальной модели может быть описана дифференциальным уравнением состояния и дискретным уравнением измерения. Указано, что стохастические дифференциальные уравнения имеют два метода анализа: сильные решения и слабые решения, и только некоторые типы стохастических дифференциальных уравнений относятся к замкнутым решений с сильным решением; в то время как слабое решение является распределенным решениям, то есть вероятностью в непрерывном функциональном пространстве. Отмечается, что в стохастических дифференциальных уравнениях броуновское движение представляет собой лишь движущую силу микроскопических случайных флуктуаций, а не появление в свойства макроскопического среднего. Слабое решение стохастического дифференциального уравнения определяется функцией передачи. Обоснованы алгоритм кубического сплайна, который является одномерным случаем, плотность вероятности сегментированная для аппроксимации априорной плотности вероятности состояния системы, он непосредственно решает функцию плотности вероятности состояния системы, чтобы более четко понять различные возможности состояния. Путем построения условий интерполяции кубическим сплайном, в статье данная функция используется для аппроксимации решения прямого уравнения Колмогорова, чтобы преобразовать задачу в решение системы обычных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов в кусковой функции. Математически доказано, что оптимальное решение оценки состояния можно получить по формуле Байеса, но прежде всего необходимо знать предварительную функцию плотности вероятности состояния системы и исследовать целесообразность использования метода кубического сплайна для его решения. Предложен алгоритм интерполяции кубического сплайна, который преобразует частичные дифференциальные уравнения плотности вероятности состояния во времени в решение обычного дифференциала уравнения кусковой функции и решает состояние системы в одномерном пространстве функций.

Ключевые слова: *математическая модель, интерполяция, кубический сплайн, автоматизация, аэронавигационная система.*

E. Cozac

APPLICATION OF MATHEMATICAL MODEL OF CUBIC SPLINE INTERPOLATION IN AUTOMATION OF AIR NAVIGATION SYSTEM

The principles of application of the mathematical model of cube spline interpolation in the automation of the aeronautical system are considered in the article. It is emphasized that, in contrast to the discrete equation describing state and measurement in a discrete model, the evolution of a random process and time measurements in a stochastic differential model can be described by a differential equation of state and a discrete equation of measurement. It is noted that stochastic differential equations have two methods of analysis: strong solutions and weak solutions, and only some types of stochastic differential equations belong to closed solutions with a strong solution; while a weak solution is a distributed solution, ie a probability in a continuous functional space. It is emphasized that in stochastic differential equations the Brownian motion is only the driving force of microscopic random fluctuations, and not the appearance in the property of the macroscopic mean. The weak solution of the stochastic differential equation is determined by the transfer function. The cubic spline algorithm is substantiated, which is a one-dimensional case, the probability density is segmented to approximate the a priori probability density of the system state, it directly solves the probability density function of the system state to more clearly understand the different possibilities of the state. By constructing the conditions of cubic spline interpolation, in the paper this function is used to approximate the solution of the direct Kolmogorov equation to transform the problem into a solution of a system of ordinary differential equations with respect to the coefficients in the piecewise function. It is mathematically proved that the optimal solution for state estimation can be obtained by the Bayesian formula, but first of all it is necessary to know the preliminary probability density function of the system state and investigate the expediency of using the cubic spline method to solve it. An algorithm for interpolating a cubic spline is proposed, which transforms partial differential equations of

the state probability density in time into a solution of the ordinary differential of the piecewise equation and solves the state of the system in the one-dimensional space of functions.

Key words: *mathematical model, interpolation, cubic spline, automation, aeronautical system.*

Вступ та постановка проблеми дослідження. Технологія точної аеронавігації є однією з ключових технологій, що забезпечують ефективне використання і безпечне повернення повітряних апаратів. В даний час велика частина основного аеронавігаційного обладнання повітряних апаратів це, в основному, інерціальні навігаційні системи, доповнені іншим обладнанням для допомоги або коригування інерціального блоку [1]. В останні роки детально підлягала дослідженню акустична навігація (наприклад, довгі і короткі базові лінії і т. д.), геофізична польова навігація (наприклад, гравітація, магнетизм), рельєф і т. д.), проведені дослідження технологій повітряної навігації. Технічна область поступово розвивається, проте, розробка всіх комбінованих режимів заснована на теорії фільтрації. Технологія фільтрації є одним з ключових моментів впливу на продуктивність системи, тобто на точність навігації. Застосування основ теорії фільтрації в аеронавігаційних системах завжди було актуальним в області навігаційних досліджень і рушійною силою розвитку теорії фільтрації. Фільтрація Калмана вводить модель простору станів в теорію оптимальної фільтрації, і для лінійних систем з гауссовським розподіленим шумом рекурсивна мінімальна середньоквадратична помилка стану системи може бути отримана шляхом оцінки, але її недоліком є те, що модель системи повинна бути лінійною, а обсяг обчислень різко зростає зі збільшенням третього ступеня оціненої розмірності вектора.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сьогодні, питання автоматизації аеронавігаційної системи розглянуло чимало науковців.

М.В. Касаткін [2] дослідив принципи стохастичного моделювання сумісного прийняття рішень в особливому випадку в польоті. Автором представлено моделі сумісного прийняття рішень (CDM) екіпажем повітряного судна та керівником польотів в умовах стохастичної невизначеності у вигляді дерева рішень та мережі GERT. Наведено приклад CDM в особливому випадку «Відмова лівого двигуна (відмова системи граничного обмеження температури) двомоторного літака».

Питання врахування вимог ІКАО стосовно місцевості та перешкод у районах аеропорту для їх картографування та використання розкрили Сергій Крячок, Олена Бойко та Людмила Мамонтова [3]. Науковці виконали аналіз нормативних документів ІКАО та Євроконтролю стосовно якісних та кількісних вимог щодо даних про місцевість та перешкоди, що складають бази даних аеронавігаційних ГІС, залежно від районів аеропорту – для вибору методів їх картографування.

Сплайн-функції та їх застосування досліджено в [4]. Б.П.Довгий, А.В.Ловейкін, Є.С.Вакал та Ю.Є.Вакал розглянули основні відомості про сплайни і їх застосування до задач наближення функцій, чисельного диференціювання і інтегрування, наближеного розв’язання диференціальних і інтегральних рівнянь. Основну увагу авторами приділено чисельним аспектам застосування сплайнів з використанням системи комп’ютерної математики MATLAB.

Н. С. Кузьменко [5] розкрила принципи багатопараметричного відновлення даних у безпілотній авіаційній системі з багатоальтернативною класифікацією польотних ситуацій.

Із зарубіжних авторів варто відзначити такі роботи як: J. Cao [6], Y. Gao [7], W. Deng, R. Yao, H. Zhao, X. Yang, and G. Li [8], S¸ G¨ulc¨u, M. Mahi, O. K. Baykan, and H. Kodaz [9], A. A. Nagra, F. Han, Q.-H. Ling, and S. Mehta [10], J. Wang [11], C. Sahu, P. B. Kumar, and D. R. Parhi [12 F. Q. Lu, M. Huang, W. K. Ching, X. W. Wang, and X. L. Sun [13], G. I. Sayed, G. Khoriba, and M. H. Haggag [14] та інші.

Незважаючи на масштабність наукових досліджень за темою роботи, питання застосування математичної моделі інтерполяції кубічним сплайном при автоматизації аеронавігаційної системи є актуальним та потребує детального опрацювання.

Постановка завдання. Здійснити дослідження застосування математичної моделі інтерполяції кубічним сплайном при автоматизації аеронавігаційної системи.

Викладення основного матеріалу дослідження. Стан руху повітряного апарата можна розглядати як випадковий процес $x(t)$, припускаючи, що $t \in [0,\infty)$, всі $x(t)$ визначені у імовірнісному просторі (Ω, F, P), де: Ω – не порожня множина, звана простором відліків, а її елементи називаються відліками; F – набір ступенів простору відліків, а не пуста підмножина, безліч F має бути σ-алгеброю; P – міра ймовірності, скорочено позначається як ймовірність. Вимірювання $z(t)$ є алгебраїчною областю в імовірнісному просторі, а $z(t)$ вимірюється за допомогою

$$x_t \triangleq x(t), z_t \triangleq z(t).$$

На відміну від дискретного рівняння, що описує стан і вимірювання в дискретній моделі, еволюція x_t і z_t в часі у стохастичній диференціальній моделі може бути описана диференціальним рівнянням стану і дискретним рівнянням вимірювання:

$$dx_t = f(x_t, t)dt + b(u_t, t)dt + g(x_t, t)d\beta_t, \quad (1)$$

$$z_k = h(x_k, t_k) + e_k. \quad (2)$$

Серед них: $x_t \in \mathbf{R}^n, u_t \in \mathbf{R}^c, \beta_t \in \mathbf{R}^d, z_k \in \mathbf{R}^m, e_k \in \mathbf{R}^m$;

$f(x_t,t)$: $\mathbf{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbf{R}^n$ – функція зльоту; $b(u_t,t)$: $\mathbf{R}^c \times \mathbb{R} \to \mathbf{R}^n$ – керуюча функція;
$g(x_t,t)$: $\mathbf{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbf{R}^n \times d$ – коефіцієнт дифузії; $\boldsymbol{h}(x_k,t_k)$: $\mathbf{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbf{R}^m$ – функція вимірювання;

u_t – c-мірний вектор управління, β_t – d-мірний вектор броунівського руху,
$E[d\beta_t d\beta_t^T] = Q(t)dt, Q(t) \in \mathbf{R}^{d\times d}$; e_k – m-мірний білий шум процесу,

$$E(e_k e_k^T) = R(k), R(k) \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

β_t і e_k не залежать одне від одного.

Випадковий процес рішення стохастичних диференціальних рівнянь може бути абстрактно представлено функціоналом $x_t = J[x_0,\beta_t,t]$. Стохастичні диференціальні рівняння мають два методи аналізу: сильні рішення і слабкі рішення, і тільки деякі типи стохастичних диференціальних рівнянь відносяться до замкнутих рішень з сильним рішенням; в той час як слабке рішення є розподіленим рішенням, тобто ймовірністю в безперервному функціональному просторі.

У стохастичних диференціальних рівняннях броунівський рух являє собою лише рушійну силу мікроскопічних випадкових флуктуацій, а не появу у властивості макроскопічного середнього. У випадку, якщо замінити броунівський рух в стохастичному диференціальному рівнянні іншим броунівським рухом $B_t^{'}$, рішення буде $x_t^{'} = J[x_0,\beta_t^{'},t]$, з точки зору розподілу розподіл випадкового процесу $\{x_t\}$ і випадкового процесу $\{x_t^{'}\}$ однаковий. Коли умова існування сильного рішення не виконується, слабке рішення надає сенс стохастичному диференціальному рівнянню.

Слабке рішення стохастичного диференціального рівняння визначається функцією передачі. При відповідних умовах коефіцієнтів $f(x,t), g(x,t)$ умовна щільність ймовірності $p(x,t\,|\,z_t)$, стан системи задовольняє прямому рівнянню Колмогорова [9]:

$$L(p) = \dot{p} = {}^1/_2 \sum_{r,s=1}^{n} \frac{\partial^2(g(x,t)Q(t)g^T(x,t)\cdot p)}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial(f(x,t)\cdot p)}{\partial x_r} \qquad (3)$$

$p \triangleq p(x,t|z_t)$

$$p^{'}(x_0) = 0, p^{'}(x_n) = 0 \qquad (4)$$

Серед них: У реальній інтегрованій аеронавігації, $f(x,t)$ являє собою зв'язок між зміною стану руху та станом руху, а $g(x,t)$ являє собою поширення шуму.

Пряме рівняння Колмогорова (3) і його рівняння граничних умов (4) складають крайову задачу диференціальних рівнянь.

Ω – область з гладким кордоном в просторі R_n,

P: $\Omega \to R$ – рішення крайової задачі.

Алгоритм кубічного сплайна [10] є одновимірним випадком, щільність ймовірності сегментована для апроксимації апріорної щільності ймовірності стану системи, він безпосередньо вирішує функцію щільності ймовірності стану системи, щоб більш чітко зрозуміти різні можливості стану. А для іншого алгоритму кусково-інтерполяційного поліноміального кубічного сплайна низького порядку він не тільки зберігає свої різні переваги, але також покращує гладкість функції інтерполяції.

У цій статті, шляхом побудови умов інтерполяції кубічним сплайном, функція інтерполяції кубічним сплайном використовується для апроксимації рішення прямого рівняння Колмогорова, щоб перетворити завдання в рішення системи звичайних диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів в кусковій функції.

Функція щільності ймовірності стану $p(x,t)$: $\mathbf{R}^n \times (t_0,t_e) \to \mathbb{R}$, для фіксованого часу $t, p(x,t) \in f$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ в гільбертовому просторі. Нехай $p(x,p) \triangleq p(x)$.

Для заданого інтервалу $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ послідовність точок $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$, якщо функція $p(x)$ отримаємо:

1) $p(x)$ в кожному підінтервалі $[x_{i-1},x_i](i = 1,2,\ldots,n)$ - багаточлен не вище третього ступеня;

2) $p(x), p^{'}(x), p^{''}(x)$ неперервні на (a,b);

3) Задоволення умові інтерполяції $p(x_i) = y_i\ (i = 1,2,3,\ldots,n)$.

$p(x)$ – функція інтерполяції кубічним сплайном вихідної функції щодо вузла.

Друга похідна $p(x), p^{''}(x)$ дорівнює $p^{''}(x_i) = M_i, i = 0,1,2,\ldots,n$.

Оскільки $p(x) = p_i(x)(i = 1,2,3,\ldots,n)$ на підінтервалі $[x_{i-1},x_i]$ є багаточленом не вище третього порядку, друга похідна повинна бути лінійною функцією (або константою). Отже, існує

$$p^{''}(x) = M_{i-1}\frac{x_i - x}{\boldsymbol{h}_i} + M_i\frac{x - x_{i-1}}{\boldsymbol{h}_i}$$

Серед них: $x \in [x_{i-1},x_i], \boldsymbol{h}_i = x_i - x_{i-1}$, інтегруємо його двічі поспіль, отримаємо

$$p_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i, x \in [x_{i-1}, x_i] \tag{5}$$

Серед них A_i і B_i є інтегральними константами тільки по часу. Підставляючи $p(x_i), p(x_{i-1})$ в пряме рівняння Колмогорова рівняння (3), маємо

$$\begin{cases} L(p(x_i)) = \left.\frac{\partial p(x)}{\partial t}\right|_{x_i} \\ L(p(x_{i-1})) = \left.\frac{\partial p(x)}{\partial t}\right|_{x_{i-1}} \end{cases}$$

через

$$\frac{\partial(f \cdot p)}{\partial x_r} = \frac{\partial(f)}{\partial x_r} \cdot p + f \cdot \frac{\partial(p)}{\partial x_r}$$

$$\frac{\partial(gQg^T \cdot p)}{\partial x_s} = \frac{\partial(gQg^T)}{\partial x_s} \cdot p + gQg^T \cdot \frac{\partial(p)}{\partial x_s}$$

$$\frac{\partial^2(gQg^T \cdot p)}{\partial x_r \partial x_s} = \frac{\partial^2(gQg^T)}{\partial x_r \partial x_s} \cdot p + 2 \cdot \frac{\partial(gQg^T)}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial(p)}{\partial x_s} + gQg^T \cdot \frac{\partial^2(p)}{\partial x_r \partial x_s}$$

отримуємо

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n}\left[\frac{\partial^2(gQg^T)}{\partial x_r \partial x_s} \cdot p + \frac{\partial(gQg^T)}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial(2p)}{\partial x_s}\right] + \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} gQg^T \cdot \frac{\partial^2(p)}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial(f)}{\partial x_r} \cdot p - \sum_{r=1}^{n} f \cdot \frac{\partial(p)}{\partial x_r}$$

$$\sum_{r,s=1}^{n}\frac{\partial(gQg^T)}{\partial x_r} - f \triangleq \Delta_2$$

$$gQg^T \triangleq \Delta_3$$

Припускаючи, що g, Q і f не залежать від часу, тоді Δ_1, Δ_2 і Δ_3 не залежать від часу t.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} L(p(x)) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial p}{\partial t} dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\Delta_1 p + \Delta_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \Delta_3 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right) dt$$

Серед них нехай $t_{k+1} - t_k \triangleq \Delta t_k$, з теореми про медіану інтегралу

$$p^{t_{k+1}}(x) = p^{t_k}(x) + \left(\Delta_1 p^{t_k} + \Delta_2 \frac{\partial p^{t_k}}{\partial x} + \Delta_3 \frac{\partial^2 p^{t_k}}{\partial x^2}\right) \cdot \Delta t_k$$

$p_i(x_i)$ в вузлі x_i в момент часу t_{k+1} може бути знайдено, нехай

$$p_i(x_i) = p_i^{t_{k+1}}(x_i), p_i(x_{i-1}) = p_i^{t_{k+1}}(x_{i-1})$$

З наведеної вище формули можемо отримати

$$\begin{cases} A_i = \frac{p_i(x_i) - p_i(x_i - 1)}{h_i} - \frac{h_i}{6}(M_i - M_{i-1}) \\ B_i = p_i(x_{i-1}) - \frac{h_i^2}{6} M_{i-1} \end{cases}$$

Підставляючи A_i і B_i в рівняння (5), отримуємо

$$p_i(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \\ + \left(p_i(x_{i-1}) - \frac{h_i^2}{6}M_{i-1}\right) \cdot \frac{x_i - x}{h_i} + \left(p_i(x_i) - \frac{h_i^2}{6}M_i\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \tag{7}$$

Потім потрібно визначити $M_i\ (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ і $n + 1$ невідомих, щоб отримати функцію інтерполяції кубічним сплайном. Необхідно використовувати першу похідну, щоб отримати безперервність на вузлі підінтервалу x_i

$$p_i'(x_i - 0) = p_{i+1}'(x_i + 0) \tag{8}$$

де $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Також через

$$p_i'(x_i - 0) = \frac{p_i(x_i) - p_i(x_{i-1})}{h_i} + \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i$$

$$p_{i+1}'(x_i + 0) = \frac{p_i(x_{i+1}) - p_i(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} - \frac{h_{i+1}}{3}M_i$$

Підставляючи його в рівняння (8), одержуємо

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{p_i(x_{i+1}) - p_i(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{p_i(x_i) - p_i(x_{i-1})}{h_i}$$

Помножимо обидві частини наведеної вище формули на , тоді

$$\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}M_{i-1}+2M_i+\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}M_{i+1}=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\cdot\frac{p_i(x_{i+1})-p_i(x_i)}{h_{i+1}}-$$
$$-\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\cdot\frac{p_i(x_i)-p_i(x_{i-1})}{h_i}$$
$$u_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}$$
$$a_i=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}=1-u_i$$
$$g_i=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\cdot\frac{p_i(x_{i+1})-p_i(x_i)}{h_{i+1}}-\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\cdot\frac{p_i(x_i)-p_i(x_{i-1})}{h_i}$$

де $i=1,2,\dots,n-1$. Тоді по граничних умовах $p'(x_0)=0, p'(x_n)=0$, отримуємо

$$\frac{p_0(x_1)-p_0(x_0)}{h_1}-\frac{h_1}{6}M_1-\frac{h_1}{3}M_0=0$$
$$\frac{p_{n-1}(x_n)-p_{n-1}(x_{n-1})}{h_n}+\frac{h_n}{6}M_{n-1}-\frac{h_n}{3}M_n=0$$

$$M_{n-1}+2M_n=-6\frac{p_{n-1}(x_n)-p_{n-1}(x_{n-1})}{h_n^2}\triangleq g_n$$

Припустимо, що $(g_0\ g_1 \cdots g_{n-1}\ g_n)^T \triangleq G$, з наведеної вище формули $n+1$ можемо отримати

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ u_1 & 2 & a_1 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & u_{n-1} & 2 & a_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \cdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{pmatrix}=G$$

Якщо

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ u_1 & 2 & a_1 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & u_{n-1} & 2 & a_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

не сингулярна, то система рівнянь має єдине рішення.

Використовуючи метод «наздоганяю чого», можна отримати $M_i\ (i=0,1,2,\dots,n)$. Підставляючи M_i в рівняння (8), вираз апріорної щільності ймовірності $p(x)$:

$p(x)=p_i(x), i=1,2,\dots,n$

За формулою Байєса:

$$p\left(x,{}^{t_{k+1}}/_{z_{k+1}}\right)=\frac{p\left({}^{z_{k+1}}/_{x}\right)p\left(x,{}^{t^-{}_{k+1}}/_{z_k}\right)}{\int_\Omega p\left({}^{z_{k+1}}/_{x}\right)p\left(x,{}^{t^-{}_{k+1}}/_{z_k}\right)dx}$$

Де щільність ймовірності дорівнює

$$p\left({}^{z_{k+1}}/_{x}\right)=\frac{exp\left\{-\frac{1}{2}(z_k-h(x,t_k))^T R_k^{-1}(z_k-h(x,t_k))\right\}}{\sqrt{(2\pi)^m detR_k}}$$

Підставляємо апріорну щільність ймовірності в формулу Байєса, щоб отримати апостеріорну щільність ймовірності:

$$p\left(x,{}^{t_{k+1}}/_{z_{k+1}}\right)=\frac{p\left({}^{z_{k+1}}/_{x}\right)p_i(x)}{\int_\Omega p\left({}^{z_{k+1}}/_{x}\right)p_i(x)dx}$$

$x\in[x_{i-1},x_i], i=1,2,\dots,n$

Отримана апостеріорна щільність ймовірності $p\left(x,{}^{t_{k+1}}/_{z_{k+1}}\right)$ також є кусковою функцією.

Висновки і перспективи подальших досліджень. У роботі здійснено дослідження застосування математичної моделі інтерполяції кубічним сплайном при автоматизації аеронавігаційної системи. У цій роботі на основі аеронавігаційної стохастичної диференціальної моделі доведено, що оптимальне рішення оцінки стану можна отримати за формулою Байєса, але перш за все необхідно знати попередню функцію щільності ймовірності стану системи та дослідити доцільність використання методу кубічного сплайну для його вирішення.

Удосконалено та запропоновано алгоритм інтерполяції кубічного сплайну, який перетворює часткові диференціальні рівняння щільності ймовірності стану в часі в рішення звичайного диференціала рівняння кускової функції та розв'язує стан системи в одновимірному просторі функцій.

Напрямки подальших досліджень ґрунтуються на доведенні розробленого алгоритму із застосування пакету прикладних програм для числового аналізу, а також мови програмування, що використовується в пакеті Matlab.

Список літератури:

1. Некрасова М.В. Гібридна інерціальна навігаційна система для об'єктів з високою кутовою динамікою. - Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.11.03 «Гіроскопи та навігаційні системи». – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», МОН України, Харків, 2019. – 134 с.
2. Касаткін М.В. Стохастичне моделювання сумісного прийняття рішень "екіпаж – керівник польотів" в особливому випадку в польоті. Системи озброєння і військова техніка. 2020. № 4(64). С. 67-74. https://doi.org/10.30748/soivt.2020.64.09.
3. Крячок С. Врахування вимог ІКАО стосовно місцевості та перешкод у районах аеропорту для їх картографування та використання в геоінформаційних системах / С. Крячок, О. Бойко, Л. Мамонтова // Технічні науки та технології. – 2020. – № 3. – С. 301-309. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/tnt_2020_3_33.
4. Сплайн-функції та їх застосування / Б.П.Довгий, А.В.Ловейкін, Є.С.Вакал, Ю.Є.Вакал. – К.:Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. – 117 с.
5. Кузьменко Н. С. Багатопараметричне відновлення даних у безпілотній авіаційній системі з багатоальтернативною класифікацією польотних ситуацій [Текст] : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.22.13 / Кузьменко Наталія Сергіївна ; Нац. авіац. ун-т. – Київ, 2017. – 266 с
6. J. Cao, "A novel fixed point feedback approach studying the dynamical behaviors of standard logistic map," International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 29, no. 1, 2019.
7. Y. Gao, "A hybrid method for mobile agent moving trajectory scheduling using ACO and PSO in WSNs," Sensors, vol. 19, no. 3, 2019.
8. W. Deng, R. Yao, H. Zhao, X. Yang, and G. Li, "A novel intelligent diagnosis method using optimal LS-SVM with improved PSO algorithm," Soft Computing, vol. 23, no. 7, pp. 2445–2462, 2019
9. S¸ G¨ulc¨u, M. Mahi, O. K. Baykan, and H. Kodaz, "A parallel ¨ cooperative hybrid method based on ant colony optimization and 3-Opt algorithm for solving traveling salesman problem," Soft Computing, vol. 22, no. 5, pp. 1669–1685, 2018.
10. A. Nagra, F. Han, Q.-H. Ling, and S. Mehta, "An improved hybrid method combining gravitational search algorithm with dynamic multi swarm particle swarm optimization," IEEE Access, vol. 7, pp. 50388–50399, 2019.
11. Wang, "A PSO based energy efficient coverage control algorithm for wireless sensor networks," Computers, Materials and Continua, vol. 56, no. 3, pp. 433–446, 2018.
12. Sahu, P. B. Kumar, and D. R. Parhi, "An intelligent path planning approach for humanoid robots using adaptive particle swarm optimization," International Journal on Artificial Intelligence Tools, vol. 27, no. 5, 2018.
13. F. Q. Lu, M. Huang, W. K. Ching, X. W. Wang, and X. L. Sun, "Multi-swarm particle swarm optimization based risk management model for virtual enterprise," in Proceedings of the first ACM/SIGEVO Summit on Genetic and Evolutionary Computation, pp. 387–392, Shanghai, China, July 2019.
14. G. I. Sayed, G. Khoriba, and M. H. Haggag, "A novel chaotic salp swarm algorithm for global optimization and feature selection," Applied Intelligence, vol. 48, no. 10, pp. 3