

УДК 539.3

DOI 10.36910/775.24153966.2022.73.1

Н.В. Шинкарчук¹, В.В. Кот²¹Рівненський державний гуманітарний університет²Відокремлений структурний підрозділ «Рівненський фаховий коледж Національного університету біоресурсів і природокористування України»**ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З ВПАЯНИМ КРУГЛИМ ПРУЖНИМ ДИСКОМ**

Проведено розрахунок коефіцієнтів інтенсивності напружень однорідної ізотропної пластинки з коловим розрізом на лінії розмежування матеріалів за умови контактування його берегів при дії зосередженої сили в центрі круглого пружного диска. Побудовано систему з чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій, через які виражаються контактні зусилля на контурі отвору ізотропної пластинки і пружного диска. Використано числовий метод механічних квадратур і колокації для дослідження напруженого стану пластинчастої конструкції. Наведено результати числових розрахунків в межах поставленої задачі.

Ключові слова: коефіцієнти інтенсивності напружень, коловий розріз, однорідна пластинка, пружний диск, напружений стан, сингулярні рівняння.

Н.В. Шинкарчук, В.В. Кот**ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С ВПАЯННЫМ КРУГЛЫМ УПРУГИМ ДИСКОМ**

Произведен расчет коэффициентов интенсивности напряжений однородной изотропной пластинки с круговым разрезом на линии разграничения материалов при контакте его берегов за действия сосредоточенной силы в центре круглого упругого диска. Построена система из четырех сингулярных интегральных уравнений с логарифмическими ядрами для определения функций, через которые выражаются контактные усилия на контуре отверстия изотропной пластинки и упругого диска. Использован числовой метод механических квадратур и коллокации для исследования напряженного состояния пластинчатой конструкции. Приведены результаты числовых расчетов в пределах поставленной задачи.

Ключевые слова: коэффициенты интенсивности напряжений, круговой разрез, однородная пластинка, упругий диск, напряженное состояние, сингулярные уравнения.

N.V. Shynkarchuk, V.V. Kot**CALCULATION OF STRESS INTENSITY COEFFICIENTS FOR THE ISOTROPIC PLATE WITH A SOLDERED CIRCULAR ELASTIC DISK**

Improving the reliability of machine parts designed in the form of piecewise homogeneous plates is one of the important problems of mechanical engineering. Their durability largely depends on the presence on the line of demarcation of materials defects such as cuts or cracks that may occur during manufacture, and during operation significantly reduce the allowable external load on the part.

By the action of concentrated power load applied at the center of the elastic disk, the banks cut lamellar structure partially in contact. We consider that the area of contact plate and drive no friction. Solution of this problem involves identifying the components of stress state on the contour of the hole of the plate, calculation of stress intensity coefficients and set the size and position of the contact zone. Boundary conditions of the problem in the area smooth frictionless contact elected as equality normal displacement of the plate and disk, as in the area of junction in the form of equal displacement of contour points.

Dependencies between the components of the displacement vector contour points of the plate and the elastic disk and contact stresses recorded in the form of integral relations with logarithmic kernels. By substituting these expressions into the boundary conditions, obtained a system of four singular integral equations for determining the functions, which an expressed through the normal and tangent force on the contact area and the junction.

For approximate solution of this problem the structure of the desired functions in the vicinity of the ends of sections of smooth frictionless contact zone and junction. Approximate solution of the problem is realized mechanical quadrature and collocation. The numerical example is considered. The calculation of normal and tangent force and calculation of stress intensity coefficients is conducted. The resulting table shows the values of the stress intensity coefficients around the vertices of the section and the values of the contact zones.

Keywords: coefficients intensity of stress, circular incision, homogeneous plate, elastic disc, stress state, singular equations.

Постановка проблеми. Елементи конструкцій і пластинчасті деталі з отворами, які спроектовані у вигляді однорідних та кусково-однорідних ізотропних пластин, широко використовуються в інженерно-конструкторській практиці. Тривалість їх роботоздатності та

функціонування, у більшості випадків, залежить від наявності на лінії поділу матерів дефектів типу тріщин (розрізів). Їхне зародження може призвести до передчасного руйнування деталі чи споруди. Тому значний теоретичний і практичний інтерес становить дослідження та оцінка напруженого стану і коефіцієнтів інтенсивності напружень в околі вершин тріщини (розрізу, зокрема колового).

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботах [1,2] здійснено постановку контактних задач для однорідних і кусково-однорідних ізотропних пластин з коловим розрізом на лінії поділу матеріалів, які перебувають в умовах плоского напруженого стану. Використовуючи метод лінійного спряження [3] розв'язано низку таких задач.

Дослідження розподілу напружень в однорідних і кусково-однорідних пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов проведено в [4].

Розрахунок коефіцієнтів інтенсивності напружень однорідної ізотропної пластинки з коловим розрізом на лінії поділу матеріалів при її моментному навантаженні в центрі пружного круглого диска здійснено в [5].

Числово-аналітичний розв'язок задачі про передачу зосередженого силового навантаження прикладеного в центрі абсолютно жорсткого диска до контуру криволінійного отвору ізотропної пластинки за наявності на лінії поділу матеріалів зон спаю, гладкого без тертя контакту і відставання реалізовано в [6].

Мета статті. Дослідити напружений стан на межі поділу матеріалів однорідної ізотропної пластинки з коловим розрізом, береги якого контактують частково або по всій довжині за дії зосередженої сили в центрі круглого пружного диска і визначити коефіцієнти інтенсивності напружень у вершинах розрізу.

Постановка задачі. Допустимо, що круговий отвір одиничного радіуса нескінченної ізотропної пластинки товщиною $2h$, обмежений гладким контуром γ . Середню площину пластинки віднесемо до системи прямокутних (x, y) і полярних (ρ, λ) координат та оберемо так, щоб початок відліку співпадав з центром отвору, а полярна вісь співпадала з віссю абсцис.

Нехай в круговий отвір, одиничного радіуса, ізотропної пластинки вставлено круглий ізотропний пружний диск без зазору і натягу. На симетричній ділянці $\gamma_3 = [\pi - \beta_0, \pi + \beta_0]$ контуру γ диск спаяний з пластинкою. На іншій частині цього контуру між ними наявний наскрізний розріз (тріщина). У центрі диска прикладена зосереджена сила P_0 , внаслідок чого диск вступає у гладку контактну взаємодію з пластинкою на ділянці $\gamma_1 = [\alpha_1, \beta_1]$. На проміжку γ_2 контакт між пластинкою і диском – відсутній. Розрахункова схема задачі наведена на рис. 1.

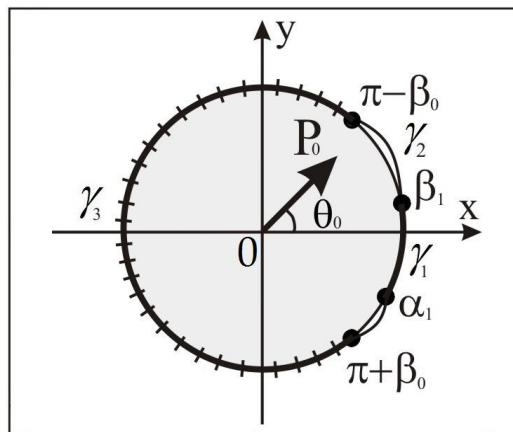


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Розв'язок поставленої задачі полягає у визначенні напруженого стану на контурі отвору пластинки, величини зони контакту і розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах розрізу по дузі кола.

Виклад основного матеріалу. Граничні умови задачі в зоні контакту $[\alpha_1, \beta_1]$ приймаємо у вигляді рівності нормальних зміщень пластинки і диска. За відсутності сил тертя їх можна записати так [6, 7]

$$\cos \lambda (U - U^{(1)}) + \sin \lambda (V - V^{(1)}) = 0;$$

$$S_{\rho\lambda} = S_{\rho\lambda}^{(1)} = 0, \quad T_\rho = T_\rho^{(1)}, \quad \lambda \in \gamma_1, \quad (1)$$

а в зоні спаю $[\pi - \beta_0, \pi + \beta_0]$ пластинки і диска граничні умови записуємо у вигляді рівності зміщень їх контурних точок [3, 7]

$$\begin{aligned} U - U^{(1)} &= 0, & V - V^{(1)} &= 0; \\ S_{\rho\lambda} &= S_{\rho\lambda}^{(1)}, & T_\rho &= T_\rho^{(1)}, \quad \lambda \in \gamma_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, $T_\rho^{(1)}$, $S_{\rho\lambda}^{(1)}$ – нормальні та дотичні зусилля на контурі отвору ізотропної пластинки і круглого пружного диска.

Шляхом підстановки виразів для визначення компонентів вектора зміщення (при заданому навантаженні) контурних точок пластинки і круглого пружного диска (покладаючи $E^{(1)} = E$, $\nu^{(1)} = \nu$, $h^{(1)} = h$), отриманих у роботі [8], в граничні умови (1), (2) та використавши наступне позначення:

$$\begin{aligned} f_1'(\lambda) + if_2'(\lambda) &= f_1^{\circ'}(\lambda) + if_2^{\circ'}(\lambda), & \lambda &\in [\alpha_1, \beta_1]; \\ f_1'(\pi + \tilde{\lambda}) + if_2'(\pi + \tilde{\lambda}) &= \tilde{f}_1'(\tilde{\lambda}) + i\tilde{f}_2'(\tilde{\lambda}), & \tilde{\lambda} &\in [-\beta_0, \beta_0], \end{aligned} \quad (3)$$

одержимо систему з чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій $f_1^{\circ'}$, $f_2^{\circ'}$, \tilde{f}_1' , \tilde{f}_2'

$$\begin{aligned} &\cos \lambda \left[\frac{4}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_2^{\circ'}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + T^0 \cos \lambda - \\ &- \frac{1 + \nu}{2\pi} (P_0 \cos \theta_0 \cos 2\lambda + P_0 \sin \theta_0 \sin 2\lambda) \left. \right] + \sin \lambda \left[-\frac{4}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1^{\circ'}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \right. \\ &\left. + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] - \frac{1 + \nu}{2\pi} (P_0 \cos \theta_0 \sin 2\lambda - P_0 \sin \theta_0 \cos 2\lambda) + T^0 \sin \lambda \left. \right] = \\ &= \tilde{c}_1 \cos \lambda + \tilde{c}_2 \sin \lambda; \quad f_1^{\circ'}(\lambda) \cos \lambda + f_2^{\circ'}(\lambda) \sin \lambda = 0, \quad \lambda \in [\alpha_1, \beta_1]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &\frac{4}{\pi} \left[\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_2^{\circ'}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + T^0 \cos \lambda - \\ &- \frac{1 + \nu}{2\pi} (P_0 \cos \theta_0 \cos 2\lambda + P_0 \sin \theta_0 \sin 2\lambda) = \tilde{c}_1, \\ &- \frac{4}{\pi} \left[\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1^{\circ'}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + T^0 \sin \lambda - \\ &- \frac{1 + \nu}{2\pi} (P_0 \cos \theta_0 \sin 2\lambda - P_0 \sin \theta_0 \cos 2\lambda) = \tilde{c}_2, \quad \lambda \in [\pi - \beta_0, \pi + \beta_0]; \quad \tilde{\lambda} \in [-\beta_0, \beta_0]. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут $\tilde{c}_1 = c_1^{(1)} - c_1$, $\tilde{c}_2 = c_2^{(1)} - c_2$, $f_1 + if_2 = i \int_{\alpha_1}^{\lambda} (T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*) e^{it} dt$, $T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^* = (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\sigma)$,

$\omega(\sigma) = e^{i\lambda}$, $T^0 = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} (f_2'(t) \cos t - f_1'(t) \sin t) dt$, E , $E^{(1)}$, ν , $\nu^{(1)}$ – модулі Юнга і коефіцієнти

Пуассона матеріалів ізотропної пластинки і круглого пружного диска; c_1 , c_2 , $c_1^{(1)}$, $c_2^{(1)}$ – дійсні сталі.

До цієї системи рівнянь потрібно доєднати умови силової рівноваги диска [3, 6]

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_2'(t) dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) d\tilde{t} = -P_0 \cos \theta_0,$$

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1'(t) dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) d\tilde{t} = P_0 \sin \theta_0, \quad (6)$$

які служать для визначення сталих \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 .

Нормальні і дотичні зусилля на контурі отвору пластинки, через функції $f_1'(\lambda), f_2'(\lambda)$, з врахуванням позначення (3), визначаються за формулою [6]

$$T_\rho + iS_{\rho\lambda} = (f_2'(\lambda) - if_1'(\lambda))(\cos \lambda - i \sin \lambda), \quad \lambda \in \gamma. \quad (7)$$

Якщо значення контактних зусиль T_ρ і $S_{\rho\lambda}$ стануть відомі, то для розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень можна використати подання функцій $T_\rho(\tilde{x}), S_{\rho\lambda}(\tilde{x})$ у вигляді [9]

$$T_\rho(\tilde{x}) = T_\rho(\cos \tilde{\varphi}) = \sum_{n=1}^M T_\rho(\tilde{\varphi}_n) \frac{(-1)^{n+1} \cos M\tilde{\varphi}}{M(\cos \tilde{\varphi} - \cos \tilde{\varphi}_n)} \frac{\sin^2 \tilde{\varphi}_n}{\sin \tilde{\varphi}};$$

$$S_{\rho\lambda}(\tilde{x}) = S_{\rho\lambda}(\cos \tilde{\varphi}) = \sum_{n=1}^M S_{\rho\lambda}(\tilde{\varphi}_n) \frac{(-1)^{n+1} \cos M\tilde{\varphi}}{M(\cos \tilde{\varphi} - \cos \tilde{\varphi}_n)} \frac{\sin^2 \tilde{\varphi}_n}{\sin \tilde{\varphi}}, \quad (8)$$

та обчислюючи в

$$K_1(\pi \mp \beta_0) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow \mp 1 \pm 0} \sqrt{2\pi \sin \beta_0} \sqrt{1 \pm \tilde{x}} T_\rho(\tilde{x}),$$

$$K_2(\pi \mp \beta_0) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow \mp 1 \pm 0} \sqrt{2\pi \sin \beta_0} \sqrt{1 \pm \tilde{x}} S_{\rho\lambda}(\tilde{x}),$$

відповідні границі при $\tilde{x} = \cos \tilde{\varphi}$, знаходимо розрахункові формули для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах розрізу по дузі кола

$$K_1(\pi - \beta_0) = \sqrt{\pi \sin \beta_0} \sum_{n=1}^M T_\rho(\tilde{\varphi}_n) (-1)^{n+M} \frac{1 - \cos \tilde{\varphi}_n}{M},$$

$$K_2(\pi - \beta_0) = \sqrt{\pi \sin \beta_0} \sum_{n=1}^M S_{\rho\lambda}(\tilde{\varphi}_n) (-1)^{n+M} \frac{1 - \cos \tilde{\varphi}_n}{M},$$

$$K_1(\pi + \beta_0) = \sqrt{\pi \sin \beta_0} \sum_{n=1}^M T_\rho(\tilde{\varphi}_n) (-1)^{n+1} \frac{1 + \cos \tilde{\varphi}_n}{M},$$

$$K_2(\pi + \beta_0) = \sqrt{\pi \sin \beta_0} \sum_{n=1}^M S_{\rho\lambda}(\tilde{\varphi}_n) (-1)^{n+1} \frac{1 + \cos \tilde{\varphi}_n}{M}. \quad (9)$$

Тут $\tilde{x} = \cos \tilde{\varphi}$, а M – кількість точок колокації.

Наближений розв'язок задачі. Одержати точний розв'язок системи рівнянь (4) – (6) не вдається. Для знаходження наближеного розв'язку, потрібно використати числові методи та встановити структуру шуканих функцій $f_1', f_2', \tilde{f}_1', \tilde{f}_2'$ на кінцях зони контакту і спаю.

У роботі [10], встановлено, що нормальні та дотичні зусилля на кінцях ділянки контакту дорівнюють нулю, а на кінцях зони спаю мають кореневу особливість на яку накладається локальна осциляція, причому в задачах визначення концентрації зусиль її впливом можна знехтувати. З огляду на це, розв'язок системи рівнянь (4) – (6) на ділянці спаю обраємо в класі функцій, що мають кореневу особливість на її кінцях, а на ділянці контакту – в класі функцій, обмежених на її кінцях.

Оскільки одержана система рівнянь має таку ж характеристичну частину, як і в [6, 10], то на підставі [6-8, 10], числовий розв'язок задачі потрібно реалізувати методом механічних квадратур і колокації.

Також необхідно зауважити, що при зведенні несиметричного проміжку інтегрування $[\alpha_1, \beta_1]$ до проміжку $[-1, 1]$ використовується така заміна:

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2} x + \frac{b_1 + a_1}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2},$$

де $a_1 = \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}$, $b_1 = \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2}$.

Результати числового розрахунку. Для однорідної ізотропної пластинки з коловим розрізом $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$, досліджено вплив дії сили P_0 , за різних величин θ_0 ($\theta_0 = 0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2}{3}\pi; \frac{5}{6}\pi; \pi$), на розподіл коефіцієнтів інтенсивності напружень і розмір зони контакту при $\nu = 0.3$.

У таблиці 1 подано значення коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах розрізу і полярних кутів межових точок зони контакту пластинки та пружного диска.

Табл. 1.

Результати розрахунку величин $K_{1,2}(\pi - \beta_0)$, $K_{1,2}(\pi + \beta_0)$, α_1 , β_1

θ_0 (град)	$K_1(\pi - \beta_0)$	$K_1(\pi + \beta_0)$	$K_2(\pi - \beta_0)$	$K_2(\pi + \beta_0)$	α_1 (град)	β_1 (град)
0	0	0	0.0181	-0.0181	-30.00	30.00
30	0	0	-0.1029	-0.1342	-30.00	30.00
60	0	0.0780	-0.1987	-0.2116	-7.11	30.00
90	0	0.2156	-0.2523	-0.2198	9.07	30.00
120	0	0.3164	-0.2524	-0.1552	25.21	30.00
150	0.1212	0.3268	-0.1911	-0.0442	0	0
180	0.2587	0.2587	-0.0848	0.0848	0	0

Висновки. У роботі розглянуто задачу про контакт берегів розрізу між ізотропною пластинкою з гладким круговим отвором і пружним диском за умов дії зосередженого силового навантаження в центрі диска. Побудовано систему з чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь із логарифмічними ядрами для знаходження функцій, через які визначаються компоненти напруженого стану на контурі отвору пластинки. Встановлено структуру шуканих функцій на кінцях ділянок гладкого контакту і спаю пластинки та диска.

На основі результатів числових розрахунків, виявлено, що напрямок дії сили P_0 суттєво впливає на значення коефіцієнтів інтенсивності напружень у вершинах розрізу та величину і положення зони контакту. При цьому, значення коефіцієнтів інтенсивності напружень $K_1(\pi - \beta_0)$ і $K_1(\pi + \beta_0)$ плавно зростають зі збільшенням величини кута θ_0 . Також збільшення величини кута θ_0 призводить до зменшення розмірів зони контакту або ж взагалі до її не утворення.

Список використаних джерел:

1. Гриліцький Д.В. Про деякі випадки пружної рівноваги ізотропної пластинки з впаяною круглою ізотропною шайбою. Доп. АН УРСР. 1960. Вип. 2. С. 164 – 167.
2. Гриліцький Д.В. Основні граничні задачі теорії пружності для безмежної ізотропної пластинки з впаяною круглою ізотропною шайбою з розрізами на лінії спаю. Питання механіки і математики ЛДУ. 1962. Вип. 9. С. 79 – 86.
3. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М: Наука, 1966. 708 с.
4. Гриліцький Д.В., Луцишин Р.М. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов. Л: Вища школа, 1975. 115 с.
5. Шинкарчук Н.В., Кот В.В. Розрахунок коефіцієнтів інтенсивності напружень однорідної ізотропної пластинки з коловим розрізом. Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія «Технічні науки». 2020. Вип. 2 (90). С. 120 – 126.

6. Сяський А.О., Шинкарчук Н.В. Мішана контактна задача для пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска. Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. 2010. Вип. 7 (16). С. 199 – 209.
7. Сяський А., Шинкарчук Н., Кот В. Напружений стан кусково-однорідної ізотропної пластинки з коловим розрізом. Вісник Тернопільського національного технічного університету. 2014. Вип. 4 (76). С. 63 – 70.
8. Шинкарчук Н. Мішана контактна задача для ізотропної пластинки з круговим отвором і пружного диска. Наукові нотатки: Міжвузівський збірник наукових праць «Наукові нотатки» за галузями знань «Фізико-математичні науки» та «Технічні науки». 2020. Вип. 70. С. 6 – 11.
9. Саврук М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. К: Наукова думка, 1981. 324 с.
10. Сяський А.О., Шинкарчук Н.В. Кусково-однорідна ортотропна пластинка з еліптичним розрізом за умови контактування його берегів. Наукові нотатки : Міжвузівський збірник. 2011. Вип. 30. С. 168 – 174.

Рецензенти:

к.ф.-м.н., професор кафедри інформаційних технологій та моделювання Рівненського державного гуманітарного університету Шахрайчук Микола Іович;

к.т.н., доцент кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування Гаврилюк Володимир Іванович.