

УДК 539.3

DOI 10.36910/775.24153966.2021.72.28

Б.С.Окрепкий¹, І.Я.Новосад¹, Т.Б.Пиндус², Б.Г.Шелестовський²Західноукраїнський національний університет¹Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя²

КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ГАРЯЧОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ШТАМПА З ПРУЖНИМ ШАРОМ ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ

В статті розглянуто розв'язок задачі про контактну взаємодію циліндричного штампа з пружним шаром з врахуванням температури на вільному торці штампа. Тепловий контакт між штампом і шаром неідеальний і здійснюється через тонкий проміжковий шар. Побудовано метод знаходження температури у штампі та шарі та визначення контактних напружень внаслідок дії сили і температурного поля. Температура і нормальні напруження отримано у вигляді ряду по функціях Чебишева, коефіцієнти якого визначаються як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Побудовано графіки температури та контактних напружень у шарі.

Ключові слова: штамп, шар, температура, неідеальний тепловий контакт, коефіцієнти теплопровідності, контактні напруження.

Б.С.Окрепкий¹, І.Я.Новосад¹, Т.Б.Пиндус², Б.Г.Шелестовський²

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГОРЯЧЕГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ШТАМПА С ПРУЖНЫМ СЛОЕМ ПРИ НЕИДЕАЛЬНОМ ТЕПЛОВОМ КОНТАКТЕ

В статье рассмотрено решение задачи о контактной взаимодействии цилиндрического штампа с упругим слоем с учетом температуры на свободном торце штампа. Тепловой контакт между штампом и слоем неидеален и осуществляется через тонкий промежуточный слой. Построен метод нахождения температуры в штампе и слое и определение контактных напряжений в результате действия силы и температурного поля. Температура и нормальные напряжения получены в виде ряда по функциям Чебишева, коэффициенты которого определяются как решение системы линейных алгебраических уравнений. Построены графики температуры и контактных напряжений в слое.

Ключевые слова: штамп, слой, температура, неидеальный тепловой контакт, коэффициенты теплопроводности, контактные напряжения.

B. Okrepkyi¹, I. Novosad¹, T. Pyndus², B. Shelestovs'kyi²

CONTACT INTERACTION OF A HOT CYLINDRICAL PUNCH WITH A SPRING BALL WITH AN INCIDENTAL THERMAL CONTACT

The article considers the solution of the problem of contact interaction of a cylindrical punch with an elastic layer taking into account the temperature at the free end of the punch. Thermal contact between the punch and the layer is not ideal and is carried out through a thin intermediate layer. The method of finding the temperature in the punch and layer and determining the contact stresses due to force and temperature field is constructed. Temperature and normal stresses are obtained as a series of Chebyshev functions, the coefficients of which are defined as the solution of a system of linear algebraic equations. Graphs of temperature and contact stresses in the layer are constructed.

Key words: punch, layer, temperature, imperfect thermal contact, thermal conductivity coefficients, contact stresses.

Постановка проблеми. Визначення напружено-деформівного стану при контактній взаємодії елементів конструкцій та деталей механізмів і машин необхідне для розрахунку їх міцності і несучої здатності. Актуальним є дослідження впливу температурних полів на розподіл контактних напружень при взаємодії тіл.

Аналіз останніх досліджень. У працях [1-6] досліджено вплив температурних факторів на характер контактних напружень. Зокрема в статтях [2-3] побудовано розв'язки задач про контактну взаємодію гарячого пружного штампа з ізотропним півпростором. Визначення температурних полів у півпросторі та шарі досліджується у працях [4,5]. Тиск гарячого штампу на півпростір із урахуванням неідеального теплового контакту через тонкий проміжний шар досліджено в [6]. Задача про тиск гарячого штампу на пружний шар ще не розглядалась.

Мета роботи. Розвинути метод знаходження контактних напружень і деформацій при взаємодії нагрітого кругового циліндра з плоскою основою із шаром при неідеальному тепловому контакті через тонкий проміжковий шар та знайти формули для визначення температури і нормальних контактних напружень. Дослідити вплив коефіцієнтів теплопровідності проміжкового шару на контактні напруження в шарі.

Постановка задачі. Розглянемо пружний круговий циліндр скінченної довжини L і радіусом R з плоскою основою, який втискується силою P в пружний шар скінченної товщини H . Матеріали тіл вважаємо ізотропними. Усі точки торця циліндра під дією зовнішнього

навантаження зміщуються на однакове значення ε . Зовні штамп на поверхні шару зовнішні зусилля не діють. В шарі під штампом дотичні напруження $\tau_{rz} = 0$. На верхньому торці циліндра підтримується стала температура T_0 . Тепловий контакт між тілами здійснюється через тонкий проміжковий шар [7,8]. Бічні поверхні циліндра теплоізовані. Теплообмін із зовнішнім середовищем на поверхнях вільного шару відбувається згідно закону Ньютона. Необхідно розробити аналітико-числовий метод визначення температури і контактних напружень.

Скористаємось циліндричною системою координат r, θ, z , центр якої знаходиться на границі шару, а вісь Oz напрямлена вздовж осі циліндра. Температура, напруження і деформації, які позначені верхнім індексом "1", відносяться до шару, без індексів – до циліндра.

Граничні умови задачі мають вигляд:

$$T = T_c, \quad (z = L, \quad 0 \leq r \leq R). \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (r = R, \quad 0 \leq z \leq L). \quad (2)$$

$$\lambda_0^* \Delta(T^1 + T) + 2 \left(\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} - \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0, \quad (z = 0; \quad 0 \leq r < R). \quad (3)$$

$$\lambda_0^* \Delta(T^1 - T) - 6 \left(\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} + \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - 12h_0(T^1 - T) = 0.$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(T^1 + T)}{\partial r} + \frac{\alpha_0^*}{\lambda_0^*} \left(\frac{T^1 + T}{2} - T_c \right) = 0, \quad (z = 0; \quad r = R). \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(T^1 - T)}{\partial r} + \frac{\alpha_0^*}{\lambda_0^*} \left(\frac{T^1 - T}{2} - T_c^* \right) = 0, \quad (z = 0; \quad r = R).$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} + H_2^1 T^1 = 0, \quad (R \leq r < \infty; \quad z = 0). \quad (5)$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} - H_1^1 T^1 = 0, \quad (0 \leq r \leq \infty; \quad z = -H). \quad (6)$$

$$u_z^1 = -\varepsilon, \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0, \quad (z = 0; \quad 0 \leq r \leq R). \quad (7)$$

$$\sigma_z^1 = 0, \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0, \quad (z = 0; \quad R \leq r < \infty). \quad (8)$$

$$u_z^1 =, \quad \tau_{rz}^{(1)} = 0, \quad (z = -H; \quad 0 \leq r < \infty). \quad (9)$$

тут λ_z, λ_z^1 – коефіцієнти теплопровідності;

H_1^1, H_2^1 – коефіцієнти теплообміну;

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ – оператор Лапласа;

$T_c = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} T_c^0 d\gamma, \quad T_c^* = \frac{3}{2\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} \gamma T_c^0 d\gamma, \quad 2\delta$ товщина проміжкового шару;

$\lambda_0^* = 2\lambda_0 \delta, \quad h_0 = \frac{\lambda_0}{2\delta}, \quad \alpha_0^* = 2\alpha_0 \delta, \quad \lambda_0^*, \alpha_0^*$ – коефіцієнти теплопровідності й теплообміну проміжкового шару; h_0 – контактна провідність; T_c^0 – температура зовнішнього середовища; ε – величина вертикального переміщення штамп.

Розв'язок крайових задач для рівнянь теплопровідності і термпружності. Відомо [9], що термпружний потенціал та температура задовольняють рівняння:

$$\nabla^2 \varphi = \alpha_T \frac{1+\sigma}{1-\sigma} T, \quad \nabla^2 T = 0, \quad (10)$$

а температурні напруження і переміщення знаходять за формулами:

$$u_z^{(\Gamma)} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \sigma_z^{(\Gamma)} = -2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right), \quad \tau_{rz}^{(\Gamma)} = 2\mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z}, \quad (11)$$

де α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення; μ, σ – модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона.

Введемо трансформанту Ганкеля функції $T^1(r, z)$ нульового порядку

$$\overline{T^1(\xi, z)} = \int_0^\infty r T^1(r, z) J_0(\xi, z) dr. \quad (12)$$

Застосувавши до другого рівняння (10) інтегральне перетворення Ганкеля і використовуючи його властивості, визначимо $T^1(r, z)$ через довільні функції $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$:

$$T^1(\rho, \zeta) = \int_0^\infty [\varphi_1(\eta) e^{\lambda \zeta} + \varphi_2(\eta) e^{-\lambda \zeta}] J_0(\eta \rho) d\eta, \quad (13)$$

де $J_0(\eta \rho)$ – функція Бесселя дійсного аргументу першого роду; $\rho = \frac{r}{R}$; $\zeta = \frac{z}{R}$; $\eta = \xi R$.

Застосовуючи метод відокремлення змінних, температуру в шарі подамо у вигляді:

$$T(r, z) = A_0 z + B_0 + D_0(r^2 - 2z^2) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\beta_k r) (A_k \operatorname{sh} \beta_k z + B_k \operatorname{ch} \beta_k z) + \sum_{k=1}^{\infty} I_0(\gamma_k r) (C_k \sin \gamma_k z + D_k \cos \gamma_k z) \quad (14)$$

де A_k, B_k, C_k, D_k , ($k = 0, \infty$) – довільні постійні; $I_0(\gamma_k r)$ – функція Бесселя I-го роду уявного аргументу; β_k, γ_k – власні значення, які визначаються із граничних умов.

Термопружний потенціал φ визначається із першого рівняння (10) у вигляді:

$$\varphi(\rho, \zeta) = \frac{1+\sigma}{2(1-\sigma)} \alpha_T \zeta \int_0^\infty \frac{1}{\eta} [\varphi_1(\eta) e^{\lambda \zeta} + \varphi_2(\eta) e^{-\lambda \zeta}] J_0(\eta \rho) d\eta \quad (15)$$

Компоненти температурних напружень і переміщень обчислюються за формулами (11). Отримані температурні напруження і переміщення дають можливість задовольнити всі граничні умови задачі. Для цього до температурних напружень і переміщень (11) додамо компоненти напружень і переміщень від бігармонічного потенціалу [1].

Таким чином отримуємо співвідношення для визначення переміщень і напружень в ізотропному шарі:

$$\begin{aligned} u_z^{(1)} &= - \int \frac{1}{\eta} \left\{ \left[\frac{1}{b_1^1 R} \eta F_1(\eta) + \left(2 + \frac{1}{b_1^1 R} \eta \zeta \right) F_2(\eta) \right] e^{-\eta \zeta} + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{b_1^1 R} \eta F_3(\eta) + \left(-2 + \frac{1}{b_1^1 R} \eta \zeta \right) F_4(\eta) \right] \right\} J_0(\eta \rho) d\eta + \\ &\quad + \frac{1+\sigma}{2(1-\sigma)} \alpha_T R \int_0^\infty \frac{1}{\eta} [\varphi_1(\eta) (1 + \eta \zeta) e^{\eta \zeta} - \varphi_2(\eta) (1 - \eta \zeta) e^{-\eta \zeta}] J_0(\eta \zeta) d\eta \\ \sigma_z^{(1)} &= \frac{2b_3^1}{R} \int_0^\infty \left\{ \left[\frac{\eta}{R} F_1(\eta) + (b_1^1 + \eta \zeta) F_2(\eta) \right] e^{-\eta \zeta} + \left[-\frac{\eta}{R} F_3(\eta) + (b_1^1 - \eta \zeta) F_4(\eta) \right] e^{\eta \zeta} \right\} \times \\ &\quad \times J_0(\eta \rho) d\eta + \mu^1 \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \alpha_T \zeta \int_0^\infty \eta [\varphi_1(\eta) e^{\eta \zeta} - \varphi_2(\eta) e^{-\eta \zeta}] J_0(\eta \rho) d\eta \\ \tau_{rz}^{(1)} &= 2b_3^1 \int_0^\infty \left\{ [F_1(\eta) + (-b_2^1 + \eta \zeta) F_2(\eta)] e^{-\eta \zeta} + \left[\frac{\eta}{R} F_3(\eta) + (b_2^1 + \eta \zeta) F_4(\eta) \right] e^{\eta \zeta} \right\} \times \\ &\quad \times J_1(\eta \rho) d\eta - \mu^1 \frac{1+\sigma}{1-\sigma} \alpha_T \int_0^\infty [\varphi_1(\eta) (1 + \eta \zeta) e^{\eta \zeta} - \varphi_2(\eta) (1 - \eta \zeta) e^{-\eta \zeta}] J_1(\eta \rho) d\eta \end{aligned} \quad (16)$$

тут $b_1^1 = \frac{\mu^1}{\lambda^1 + \mu^1}$, $b_2^1 = \frac{\lambda^1}{\lambda^1 + \mu^1}$, $b_3^1 = \lambda^1 + \mu^1$; λ^1, μ^1 – коефіцієнти Ламе; $u_z^1, \sigma_z^1, \tau_{rz}^1$ – компоненти вектора переміщень і тензора напружень у пружному шарі; $F_i(\eta)$ ($i = \overline{1,4}$) – довільні функції.

Розв'язок задачі теплопровідності приведений у праці [5].

Температурне поле в зоні контакту двох тіл знаходиться за формулами:

a) для циліндричної області:

$$T(\rho, 0) = T_0 - A_0 R l - \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k \rho) th \mu_k l \cdot A_k \quad (\rho < 1) \quad (17)$$

b) для шару:

$$T^1(\rho, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \beta_k(\rho) \quad (\rho < 1)$$

де $a_k = X_k T_0$ ($k = \overline{0, N}$); Y_0, Y_1 знаходяться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь [5].

$$A_0 R = \left(l + \frac{1}{3h_0^1} \right)^{-1} T_0 \left[1 - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_{0,k}^{(1)} X_k - \frac{2}{b_1} I_1(b_1) Y_0 \right];$$

$$A_n R = - \frac{2T_0}{J_0^2(\mu_n)} \frac{1}{\Delta^2(\mu_n, b_1)} \left[\sum_{k=0}^N \varepsilon_{n,k}^{(1)} X_k + \frac{b_1 J_0(\mu_n) I_1(b_1)}{\mu_n^2 + b_1^2} Y_0 \right];$$

$$\sum_{k=0}^N A_{n,k}^{(1)} X_k + B_{n,0}^{(1)} Y_0 + B_{n,1}^{(1)} Y_1 = D_n^{(1)} \quad (n = \overline{0, N}) \quad (19)$$

$$\sum_{k=0}^N A_{n,k}^{(2)} X_k + B_{0,0}^{(2)} Y_0 = D_n^{(2)} \quad (n = \overline{0, N})$$

$A_{n,k}^{(1)}, A_{n,k}^{(2)}, B_{n,0}^{(1)}, B_{n,1}^{(1)}, B_{0,0}^{(2)}, D_n^{(1)}, D_n^{(2)}$ – відомі величини.

Задовольнивши граничну умову (9), для напруження $\sigma_z^{(1)}(\rho, 0)$ і переміщення $u_z^{(1)}(\rho, 0)$ на поверхні шару маємо формули:

$$u_z^{(1)}(\rho, 0) = \frac{1 + b_1^1}{b_1^1} R \int [1 - G(2\eta h)] \Phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta - \alpha_{T^1} R \delta \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \frac{Q_2(\eta) \varphi(\eta)}{Q(\eta) Q_1(\eta)} J_0(\eta \rho) d\eta, \quad (20)$$

$$\sigma_z^1(\rho, 0) = 2b_3^1 \int_0^{\infty} \eta \Phi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta,$$

$$\eta \Phi(\eta) = \frac{\eta}{R} F_1(\eta) + b_1^1 F_2(\eta) - \frac{\eta}{R} F_3(\eta) + b_1^1 F_4(\eta)$$

$$Q_1(\eta) = sh 2\eta h + 2\eta h, \quad Q_2(\eta) = -(\eta sh \eta h ch \eta h + K_1^1 sh^2 \eta h + \eta^2 h) sh \eta h,$$

$$G(2\eta h) = \frac{1 + 2\eta h - e^{-2\eta h}}{Q_1(\eta)}, \quad \delta = \frac{1 + \sigma^1}{1 - \sigma^1} (1 + b_1^1)$$

$$\text{де } h = \frac{H}{R}; \quad K_1^1 = H_1^1 R; \quad K_2^1 = H_2^1 R; \quad h_0^1 = h_0 \frac{R}{\lambda_0}; \quad l_z = \frac{\lambda_0 R}{\lambda_0}; \quad l_z^1 = \frac{\lambda_0^1}{\lambda_0^1};$$

$$\varphi_1(\eta) = \frac{1}{2} (\eta + K_1^1) e^{\eta h} \frac{\varphi(\eta)}{Q(\eta)}, \quad \varphi_2(\eta) = \frac{1}{2} (\eta - K_1^1) e^{-\eta h} \frac{\varphi(\eta)}{Q(\eta)};$$

$$Q(\eta) = (\eta^2 + K_1^1 K_2^1) sh \eta h + \eta (K_1^1 + K_2^1) ch \eta h.$$

Вимагаючи виконання граничних умов (7), (8) прийдемо до системи інтегральних рівнянь відносно функцій $\Phi(\eta)$ і $\varphi_1(\eta)$:

$$\int_0^{\infty} \Phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = -\frac{\varepsilon}{R} + \int_0^{\infty} G(2\eta h \Phi(\eta) J_0(\eta\rho)) d\eta - \alpha_{T^{\pm}} \delta \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \frac{Q_2(\eta)}{Q(\eta)Q_1(\eta)} J_0(\eta\rho) d\eta$$

$$(0 \leq \rho < 1) \quad (21)$$

$$\int_0^{\infty} \eta \Phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta = 0$$

$$(\rho > 1) \quad (22)$$

Якщо ввести функцію $f(t)$ співвідношенням:

$$\Phi(\eta) = \frac{b_1^{\frac{1}{2}}}{1+b_1^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 f(t) \cos \eta t dt, \quad (23)$$

то рівняння (22) задовольняється тотожно, а рівняння (21) зводиться до інтегрального рівняння Абеля.

$$\int_0^{\rho} \frac{f(x) dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2}} = g(\rho), \quad (24)$$

розв'язок якого згідно [10] визначається формулою

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{\rho g(\rho)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho, \quad (25)$$

де

$$g(\rho) = -\frac{\varepsilon}{R} + \int_0^{\infty} G(2\eta h) \Phi(\eta) J_0(\eta\rho) d\eta + \alpha_{T^{\pm}} \delta \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \frac{Q_2(\eta) \varphi(\eta)}{Q_1(\eta) Q(\eta)} J_0(\eta\rho) d\eta. \quad (26)$$

Підставивши вираз (26) у формулу (25), враховуючи при цьому (23), одержимо функцію $f(t)$:

$$f(t) = -\frac{2\varepsilon}{\pi R} + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^{\infty} G(2\eta h) \cos \eta x \cos \eta t d\eta + \frac{2}{\pi} \delta \alpha_{T^{\pm}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \frac{Q_2(\eta) \varphi(\eta)}{Q_1(\eta) Q(\eta)} \cos \eta t d\eta. \quad (27)$$

Використовуючи умову рівноваги штампу $P = -2\pi R^2 \int_0^1 \rho \sigma_z^{(1)}(\rho) d\rho$ і формули (20), (23), рівняння (27) приводиться до вигляду:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(x) dx \int_0^{\infty} G(2\eta h) \cos \eta x \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta + \frac{2}{\pi} \delta \alpha_{T^{\pm}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta} \frac{Q_2(\eta) \varphi(\eta)}{Q_1(\eta) Q(\eta)} \left(\cos \eta t - \frac{\sin \eta}{\eta} \right) d\eta = -\frac{P}{2\pi R^2 x_0}, \quad (28)$$

$$x_0 = \frac{2b_1^{\frac{1}{2}} b_2^{\frac{1}{2}}}{1+b_1^{\frac{1}{2}}}$$

Представимо функцію $f(t)$ співвідношенням:

$$f(t) = -\frac{P}{2\pi R x_0} \sum_{k=0}^{N_1} (2k+1) P_k(1-2t^2) y_k^{(1)} + \alpha_{T^{\pm}} T_0 \sum_{k=0}^{N_2} (2k+1) P_k(1-2t^2) y_k^{(2)}, \quad (29)$$

де

$y_k^{(1)}$ ($k = \overline{0, N_1}$) – невідомі коефіцієнти;

$P_k(1-2t^2)$ – функція Лежандра.

Підставивши функцію $f(t)$ з (29) і $\varphi(\eta) = X_0 J_1(\eta) + \eta^2 J_1(\eta) \sum_{k=1}^N \frac{J_0(\mu_k)}{\eta^2 - \mu_k^2} X_k$ в рівняння (28), з врахуванням умов ортогональності функцій Лежандра $P_k(1-2t^2)$ на інтервал (0,1),

одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження постійних $Y_k^{(1)}, Y_k^{(2)}$ ($k = \overline{0, N_1}$):

$$\sum_{\kappa=0}^{N_1} A_{n,\kappa} Y_{\kappa}^{(1)} = P_n \quad (n = \overline{0, N_1}) \tag{30}$$

$$\sum_{\kappa=0}^{N_1} A_{n,\kappa} Y_{\kappa}^{(2)} = t_n \quad (n = \overline{0, N_1})$$

де

$$P_0 = 1; \quad P_n = 0 \quad (n = \overline{0, N_1}); \tag{31}$$

$$t_n = \frac{4}{\pi} \delta \sum_{\kappa=0}^N X_{\kappa} t_{n,\kappa} \quad (n = \overline{0, N_1});$$

$$A_{0,0} = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} G(2\eta h) \tau_0(\eta) \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta,$$

$$A_{0,\kappa} = 2(-1)^{\kappa+1} \left(2\kappa + 1 \int_0^{\infty} G(2\eta h) \tau_0(\eta) J_{\kappa+\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right) J_{-\kappa-\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right) d\eta \right),$$

$$A_{n,0} = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} G(2\eta h) \tau_n(\eta) \frac{\sin \eta}{\eta} d\eta,$$

$$A_{n,\kappa} = \begin{cases} A_{n,\kappa}^{(1)}, & \kappa \neq n \\ 1 + A_{n,\kappa}^{(1)}, & \kappa = n \end{cases}.$$

$$A_{n,\kappa}^{(1)} = 2(-1)^{\kappa+1} \int_0^{\infty} G(2\eta h) \tau_n(\eta) J_{\kappa+\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right) J_{-\kappa-\frac{1}{2}}\left(\frac{\eta}{2}\right) d\eta$$

$$t_{n,0} = \int_0^{\infty} \frac{J_1(\eta) Q_2(\eta) \tau_n(\eta)}{\eta Q(\eta) Q_1(\eta)} d\eta \quad (n = \overline{0, N_1})$$

$$t_{n,\kappa} = J_0(\mu_{\kappa}) \int_0^{\infty} \frac{\eta J_1(\eta) Q_2(\eta) \tau_n(\eta)}{(\eta^2 - \mu_{\kappa}^2) Q(\eta) Q_1(\eta)} d\eta \quad (n = \overline{0, N_1}; \kappa = \overline{0, N_1})$$

$$\tau_0(\eta) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\cos \eta}{\eta} - \frac{1}{\eta} + \frac{1}{2} \sin \eta \right),$$

$$\tau_n(\eta) = \frac{1}{4} \eta Y_n \left(\frac{\eta}{2} \right) \left[Y_{n-1} \left(\frac{\eta}{2} \right) - Y_{n+1} \left(\frac{\eta}{2} \right) \right] - \frac{(-1)^n \sin \eta}{\Gamma(1+\eta) \Gamma(1-\eta) \eta}, \quad (n = \overline{1, N_1}).$$

$Y_n(x)$ – сферичні функції.

Для визначення контактних напружень під штапом, з урахуванням формул (20), (23), (29), отримано наступні вирази:

$$\sigma_z^{(1)}(\rho, 0) = \sigma_z^{(p)}(\rho, 0) + \sigma_z^{(r)}(\rho, 0), \tag{32}$$

$$\sigma_z^{(p)}(\rho, 0) = -\frac{P}{2\pi R^2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[Y_0^{(1)} + \frac{1}{\rho} \sum_{\kappa=1}^{N_1} (2\kappa + 1) (-1)^{\kappa} T_{2\kappa+1}(\rho) Y_{\kappa}^{(1)} \right], \tag{33}$$

$(\rho < 1)$

$$\sigma_z^{(r)}(\rho, 0) = \alpha_T T_0 \frac{x_0}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[Y_0^{(2)} + \frac{1}{\rho} \sum_{\kappa=1}^{N_1} (-1)^{\kappa} (2\kappa + 1) T_{2\kappa+1}(\rho) Y_{\kappa}^{(2)} \right], \tag{34}$$

$(\rho < 1)$

де $T_{2k+1}(\rho)$ – функція Чебишева; $\sigma_z^{(p)}(\rho, 0)$ – силова складова напружень; $\sigma_z^{(T^1)}(\rho, 0)$ – температурна складова напружень в півпросторі.

Аналіз розв'язку. Температурна задача зводиться до системи алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів $X_k (k = \overline{0, N})$, Y_0, Y_1 , які входять у формули для температури в циліндрі і шарі.

Розглянуто числовий приклад, в якому знайдено температуру і температурну складову контактного напруження при:

$$l = 1; h = 2; \alpha_0^* = 0, T_0^* = 0, K_1^1 = H_1^1 R = 0,5; K_2^1 = H_2^1 R = \infty; \sigma = 0,3.$$

На рисунку 1 і 2 наведено графіки безрозмірної температурної складової нормального напруження $\bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z^T(\rho, 0)}{\alpha_{T_1} T_0}$ в зоні контакту при різних значеннях коефіцієнтів теплопровідності та величини контактної провідності.

Висновки. Задача теплопровідності в шарі розв'язується застосуванням інтегрального перетворення Ганкеля, а в циліндрі методом Фур'є. Формули для температури і напружень отримано у вигляді рядів по функціях Чебишева з коефіцієнтами, які знаходяться із системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Дослідження показують, що нульова температура на бічній поверхні проміжкового шару призводить до зменшення температури в зоні контакту. Це пояснюється тим, що частина тепла виходить через бічну поверхню проміжкового шару. В результаті цього температурна складова нормального напруження значно зменшується. На рисунках 1, 2 показано вплив коефіцієнтів теплопровідності, теплообміну та контактної провідності на температурну складову контактних напружень. Збільшення коефіцієнтів теплопровідності та величини контактної провідності приводить до збільшення контактних напружень.

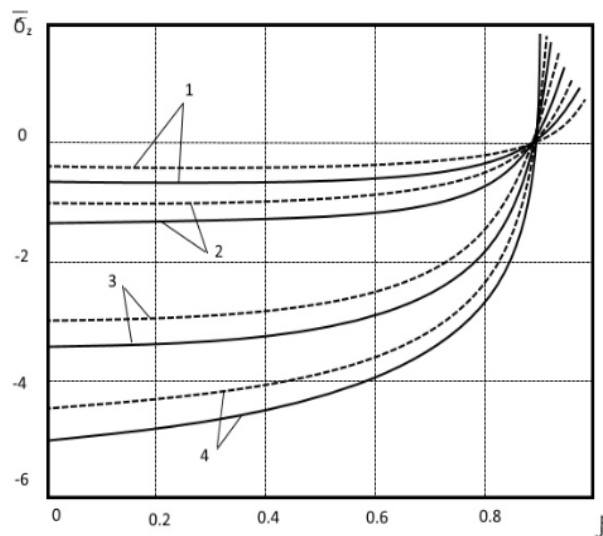


Рис. 1. Розподіл температурної складової контактних напружень для $l_z = l_z^1$ (пунктирні лінії для півпростору) і (суцільні лінії для шару): крива 1 – $h_0^1 = 0,1$; 2 – $h_0^1 = 2$;

$$3 - h_0^1 = 5; 4 - h_0^1 = \infty.$$

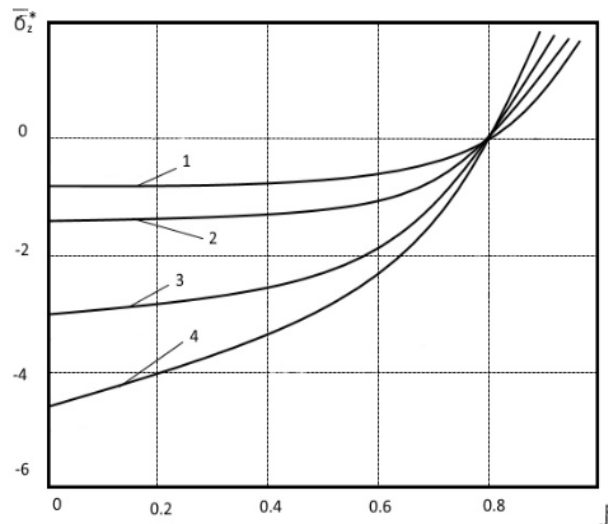


Рис.2. Розподіл температурної складової контактних напружень при:

$$h_0^I = 1, l_z = l_z^I \text{ крива } 1 - l_z = 0,1; 2 - l_z = 0,5; 3 - l_z = 1; 4 - l_z = 5$$

Список використаної джерел:

1. Грилицкий Д.В., Кизима Я.А. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов:Выща школа. Изд.-во Львовського університета, 1981, 135 ст.
2. Окрепкий Б.С., Шелестовська М.Я. Осесимметрична контактна задача термопружності про тиск пружного циліндра на пружний півпростір з урахуванням неідеального теплового контакту. Вісник ТДТУ, 2014, №2. С-65-76.
3. Окрепкий Б.С., Шелестовський Б.Г. Осесимметрична контактна задача термопружності про тиск пружного циліндра на пружний шар з урахуванням неідеального теплового контакту. Вісник ТНТУ, 2019, №1, с.19-31.
4. Окрепкий Б.С., Шелестовська М.Я. Визначення температурного поля в системі циліндр-півпростір при неідеальному тепловому контакті через проміжковий шар. Вісник ТДТУ, 2013, №1, с.253-252.
5. Окрепкий Б.С., Шелестовський Б.Г. Визначення температурного поля в системі тіл циліндр-шар. Вісник ТНТУ, 2015, №1, с.288-299.
6. Окрепкий Б.С., Пиндус Т., Шелестовський Б.Г. Тиск гарячого штампа на пружний півпростір з урахуванням неідеального теплового контакту через тонкий проміжковий шар. Вісник ТНТУ, 2019, №4, с.13-22.
7. Подстригач Я.С. Условия теплового контакта твёрдых тел. ДАН УССР, серия А, 1963, №7, с.188-192.
8. Подстригач Я.С. Температурное поле в системе твердых тел, соприкасаемых с помощью тонкого промежуточного слоя. ИФЖ, 1963, т.6, №10, с.129-136.
9. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. Киев:Наук.думка, 1970, 304с.
10. Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа. М:Физ.мат.; 1963, с.343.

Рецензент: Доктор технічних наук, професор, професор кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету А.О.Сяський