

УДК 621.9048.6

DOI 10.36910/775.24153966.2021.72.1

**О. Ярошевич**

Луцький НТУ

ORCID ID: 0000-0003-2594-3323

**ПОВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ДЕБАЛАНСНОГО ВІБРОЗБУДНИКА  
ПРИ ПРОХОДЖЕННІ ЗОНИ РЕЗОНАНСУ ВІБРОМАШИНИ**

*Методом прямого розділення рухів розв'язано задачу про виникнення повільних коливань швидкості дебалансного віброзбудника при проходженні зони резонансу; при цьому, враховано вплив на коливання ротора віброзбудника моменту сил ваги дебаланса. Отримано вираз, який описує коливання швидкості віброзбудника в області ефекту Зоммерфельда. Показано, що повільні коливання віброзбудника викликані резонансним зростанням величини гальмівного вібраційного моменту.*

*Ключові слова:* вібраційна машина, ефект Зоммерфельда, інерційний віброзбудник, повільні коливання.

**О. Ярошевич****МЕДЛЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДЕБАЛАНСНОГО ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЯ ПРИ  
ПРОХОЖДЕНИИ ЗОНЫ РЕЗОНАНСА ВИБРОМАШИНЫ**

*Методом прямого разделения движений решена задача о возникновении медленных колебаний скорости дебалансного вибровозбудителя при прохождении зоны резонанса; при этом, учтено влияние на колебания ротора вибровозбудителя момента сил тяжести дебаланса. Получено выражение которое описывает колебания скорости вибровозбудителя в области эффекта Зоммерфельда. Показано, что медленные колебания вибровозбудителя вызваны резонансным возрастанием величины тормозного вибрационного момента.*

*Ключевые слова:* вибрационная машина, эффект Зоммерфельда, инерционный вибровозбудитель, медленные колебания.

**О. Yaroshevych****SLOW OSCILLATIONS OF UNBALANCED VIBRATION EXCITER WHEN PASSING  
THROUGH THE RESONANCE ZONE OF VIBRATION MACHINE**

*The problem of occurrence of slow oscillations of velocity of the unbalanced vibration exciter during the passage through the resonance zone is solved by the method of direct separation of motions; in addition, it is taken into account the effect on the oscillation of the vibration exciter rotor of the moment of gravity of the imbalance. It is also obtained the expression describing oscillations of the vibration exciter velocity in the zone of the Sommerfeld effect. It is shown that slow oscillations of the vibration exciter are caused by a resonant increase in value of braking vibration moment. It was found out that amplitudes of slow oscillations of the rotor velocity in cases of taking into account the action of the moment of gravity and neglecting it, will be approximately the same. Computer simulation confirms the obtained results.*

*Keywords:* vibration machine, Sommerfeld effect, inertial vibration exciter, slow oscillations.

**Постановка проблеми.** Вібраційні машини широко використовуються у багатьох галузях промисловості. Одномасним вібромашинам з інерційним приводом при роботі в далеко зарезонансному режимі притаманна достатньо висока стабільність. Проте, якщо приводний електродвигун не має достатнього запасу потужності, то при пуску такої машини може виникнути стійкий резонансний режим коливань. Резонансні коливання можуть викликати поломки деталей та вузлів конструкції вібромашини. Звичайно, застосування двигунів завищеної потужності є економічно недоцільним. Отже, аналіз динаміки інерційних вібромашин з приводом від двигуна обмеженої потужності становить актуальну прикладну задачу.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Дослідження коливних систем з обмеженим збудженням (неідеальним джерелом енергії) розглядається в низці класичних праць [1-4]. Огляд більш пізніх публікацій з даної тематики наведено, наприклад, у роботах [5, 6].

Серед останніх публікацій відзначимо статті [7, 8]. У [8], зокрема, розглянуто стаціонарні режими у неідеальній системі, в якій відбувається взаємодія між джерелом енергії (електродвигуном) та лінійно-пружною підсистемою; аналізується стійкість режимів руху; чисельно-аналітичними методами досліджено ефект Зоммерфельда.

В [3] продемонстровано ефективність застосування методу прямого розділення рухів для аналізу ефекту Зоммерфельда. Продемонстровано, що основні закономірності ефекту можна порівняно просто пояснити з позицій вібраційної механіки. В статті [9] стверджується, що при дослідженнях динаміки машинного агрегату з додатковими ступенями вільності, доцільно перейти від вихідних рівнянь руху до рівняння вібраційної механіки; звертається увага, що це рівняння

відрізняється від класичного рівняння машинного агрегату наявністю додаткового члена – гальмівного вібраційного моменту.

Можливість збудження двухчастотної вібрації кульковим автобалансиром у вібраційних грохотах з використанням ефекту Зоммерфельда обґрунтовується в роботі [10]. В статті [11] показано, що двомасова вібраційна система з ексцентрико-маятниковим приводом у режимі резонансних коливань характеризується миттєвим пуском і зупинкою приводу, без тривалих перехідних процесів. Проте, очевидно, що запропонований привод не може конкурувати з інерційним.

Питанням пуску вібромашин з інерційними збудниками присвячені роботи [12-15]. В [12] за результатами досліджень робиться висновок, що послідовний пуск двигунів дозволяє істотно зменшити амплітуди резонансних коливань при проходженні резонансу вібромашини. При цьому, коливні процеси, що виникають в зоні резонансу, у роботі не аналізуються.

В монографії [3] звертається увага на те, що поведінка вібромашин з інерційним збудниками при проходженні резонансу характеризується низкою важливих закономірностей. Зокрема, показано, що в зоні резонансу виникають коливання віброзбудника з частотою, істотно нижчою за частоту обертання. Такі коливання в деяких роботах названі напівповільними або повільними [3, 14-17]. При цьому, у відомих роботах досліджуються тільки усталені коливання незрівноваженого ротора в області ефекту Зоммерфельда. Проте, звичайно, саме у перехідних режимах можливі максимальні коливання.

У статті [17] встановлено що, повільні коливання частоти збудника являють собою перехідний процес при встановленні стаціонарного режиму в області ефекту Зоммерфельда.

Прикладне використання повільних коливань незрівноваженого ротора для полегшення пуску вібромашини з інерційним приводом продемонстровано у роботах [15].

Проте, у відомих дослідженнях виникнення повільних коливань розглядається без урахування впливу на цей процес моменту сил ваги дебалансу. Водночас, у вібромашинах з дебалансним приводом цей момент є досить великим. Дана робота присвячена подальшому розвитку результатів праці [17].

**Постановка завдання.** Дослідити вплив моменту сил ваги дебаланса на коливні процеси у приводі вібраційної машини при «повільному» проходженні зони її власних частот.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Опис системи та рівняння руху. Основні особливості динаміки незрівноваженого ротора при проходженні зони резонансу несучої системи можна уявити на простішому прикладі, зображеному на рис. 1.

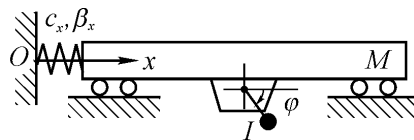


Рис. 1. Динамічна модель вібраційної машини з інерційним приводом

Динамічну модель вібраційної машини прийнято у вигляді жорсткої платформи (твердого несучого тіла) масою  $M$  на якій закріплено дебалансний віброзбудник. Платформа зв'язана з нерухомою основою лінійними пружними та демпфуючими елементами. Припускається, що вона може зміщуватися тільки в одному фіксованому напрямку  $Ox$ , тобто має лише одну ступінь вільності. Привод віброзбудника має також одну ступінь вільності, він здійснюється від електродвигуна асинхронного типу. Рівняння руху такої системи подамо у вигляді

$$I\ddot{\varphi} = L - R + m\varepsilon(\ddot{x} \sin \varphi + g \cos \varphi), \quad (1)$$

$$M\ddot{x} + \beta_x \dot{x} + c_x x = m\varepsilon(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi), \quad (2)$$

де  $\varphi$  – кут повороту ротора віброзбудника;  $x$  – переміщення платформи від положення, яке відповідає недеформованим пружним елементам;  $I$  – зведений момент інерції віброзбудника;  $m, \varepsilon$  – маса віброзбудника та його ексцентриситет;  $c_x, \beta_x$  – коефіцієнти жорсткості та в'язкого тертя пружного-демпфуючих елементів;  $L$  – крутний момент електродвигуна, рахується заданим

його статичною характеристикою,  $L = L(\dot{\varphi})$ ;  $R$  – момент сил опору обертання двигуна, обумовлений, як правило, опором у підшипниках,  $R = R(\dot{\varphi})$ ;  $g$  – прискорення вільного падіння.

Розв'язування рівнянь руху за допомогою методу прямого розділення рухів. Для дослідження динаміки обертання ротора дебалансного віброзбудника в стаціонарних (навколостаціонарних) режимах використано підхід вібраційної механіки [3, 6, 16]. Розглядається «повільне» проходження ротором зони резонансу вібромашини з двигуном обмеженої потужності. Зазначимо, що режим «повільного» проходження віброзбудником зони резонансу, під час якого спостерігається «застрягання» його швидкості, є цікавим як максимально навантажений режим роботи вібромашини.

Рух системи (1), (2) може бути поданий у вигляді

$$\dot{\varphi} = \omega(t) + \dot{\psi}(t, \omega t), \quad x = x(t, \omega t), \quad (3)$$

де  $\omega(t)$  – повільна, а  $\dot{\psi}$  і  $x$  – швидкі  $2\pi$ -періодичні по  $\tau = \omega t$  функції, при цьому їх середні значення за період дорівнюють нулю; приймаємо також, що  $\dot{\psi} \ll \omega$ .

Використовуючи вибраний метод дослідження від системи рівнянь (1), (2), переходимо до інтегро-диференціальних рівнянь повільних та швидких рухів [3]

$$I\dot{\omega} = L(\omega) - R(\omega) + \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Phi(\ddot{x}, \varphi) d\tau, \quad (4)$$

$$I\ddot{\psi} + k\dot{\psi} = \Phi(\ddot{x}, \varphi) - \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Phi(\ddot{x}, \varphi) d\tau,$$

$$M\ddot{x} + \beta_x \dot{x} + c_x x = m\varepsilon \left( (\dot{\omega} + \dot{\psi}) \sin(\omega + \psi) + (\omega + \psi)^2 \cos(\omega + \psi) \right), \quad (5)$$

де  $\Phi(\ddot{x}, \varphi) = m\varepsilon (\ddot{x} \sin(\omega + \psi) + g \cos(\omega + \psi))$ .

Вище враховано, що при дослідженні режимів, близьких до рівномірного обертання, робочі характеристики двигуна та машини можна лінеаризувати поблизу стаціонарних значень  $\dot{\varphi} = \omega$ . Для цього розкладемо їх в ряд Тейлора; при цьому, збережемо у розкладі перші два члени. Для моментів двигуна  $L(\dot{\varphi})$  та сил опору обертання  $R(\dot{\varphi})$ , відповідно, отримано:  $L(\dot{\varphi}) = L(\omega) - k_1 \dot{\psi}$ ,  $R(\dot{\varphi}) = R(\omega) + k_2 \dot{\psi}$ , де  $k_1, k_2$  – коефіцієнти демпфірування, причому  $k_1 + k_2 = k$  [3]. Згідно (3), вираз для координати  $\varphi$  має вигляд  $\varphi = \omega(t)t + \alpha(t) + \psi(t, \omega t)$ , де  $\alpha(t)$  деяка повільна функція  $t$ ; в рівнянні (5) та нижче кутом  $\alpha(t)$  нехтуємо.

Таким чином, в загальному, основне рівняння вібраційної механіки приймає вигляд

$$I\dot{\omega} = L(\omega) - R(\omega) + V(\omega), \quad (6)$$

отриманий у монографії [3]. Отже, висновки зроблені в [3] стосовно можливих стаціонарних режимів обертання віброзбудника та їх стійкості, залишаються в силі також й у розглядуваному випадку більш повних вихідних рівнянь руху.

В правій частині рівняння повільних рухів (4) останній доданок являє собою так званий, вібраційний момент  $V(\omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Phi(\ddot{x}, \varphi) d\tau$  – середнє значення додаткового динамічного навантаження на двигун, обумовлене коливаннями несучого тіла, на якому закріплено віброзбудник. Визначення вібраційного моменту є важливою практичною задачею вібротехніки [3, 6].

Беручи до уваги, що обертання ротора у розглядуваних стаціонарних режимах мало відрізняється від рівномірного руху, у вихідному наближенні приймаємо  $\psi = \psi^{(0)} = 0$ ,  $\varphi = \varphi^{(0)} = \omega t$ . В [17] вираз для вібраційного моменту у розглядуваному наближенні було подано у вигляді

$$V(\omega) = -0,5k_d^2 A_{st}^2 \beta_x p_x, \quad (7)$$

де  $A_{st} = \frac{m\varepsilon}{M}$  – амплітуда коливань платформи в робочому зарезонансному режимі;  $k_d$  – коефіцієнт динамічності;  $p_x = \sqrt{\frac{c_x}{M}}$  – частота власних коливань платформи.

Згідно виразу (7), при повільному проходженні зони резонансу платформи, зростання величини вібраційного моменту є пропорційним квадрату коефіцієнту динамічності. Звичайно, що в момент такого стрімкого зростання моменту можна очікувати збудження значних нестационарних коливань незрівноваженого ротора. Для дослідження коливань ротора віброзбудника розглянемо рівняння його швидких рухів. У першому наближенні ( $\varphi = \omega t + \psi$ ) отримуємо

$$I\ddot{\psi} + k\dot{\psi} = m\varepsilon \left( \ddot{x} \sin(\omega t + \psi) + g \cos(\omega t + \psi) - \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \ddot{x} \sin \omega t d\tau \right). \quad (8)$$

Враховуючи припущення, що  $\psi \ll \omega$ , лінеаризуємо праву частину (8) по  $\psi$ . Далі підставимо в (8) розв'язок рівняння (5) за умови рівномірного обертання віброзбудника з сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . У підсумку отримуємо рівняння швидких рухів дебалансного віброзбудника у вигляді

$$\ddot{\psi} + 2b_\psi \dot{\psi} + p_\psi^2 \psi = \Phi_x \sin(2\omega t - \gamma_x) + \Phi_g \cos \omega t, \quad (9)$$

де  $b_\psi = \frac{k}{2I}$ ;  $p_\psi^2 = \frac{c_\psi}{I}$ ;  $c_\psi = V_{\max} \cos \gamma_x$ ;  $V_{\max} = \frac{m\varepsilon \omega^2 A_x}{2}$ ;  $A_x = A_{st} k_d$ ;  $\Phi_x = -\frac{V_{\max}}{I}$ ;  $\Phi_g = -\frac{m\varepsilon g}{I}$ ;

$\gamma_x$  – кут між коливаннями та збурюючою силою.

Значимо, що при отриманні рівняння (8) враховано оцінки доданків рівнянь швидких рухів, виконані в [3, 17].

Згідно (9), рівняння швидких рухів віброзбудника набуває вигляду рівняння малих вимушених коливань. Порівняно з рівнянням, отриманим у [17], права частина (9) містить додаткове гармонічне збурення з частотою  $\omega$ ; при цьому, амплітуди обох збурюючих моментів у правій частині (9) мають однаковий порядок.

Загальний розв'язок рівняння (9) поза зоною резонансу без урахування опору подамо у вигляді ( $\psi_{20} = 0$ ,  $\dot{\psi}_{20} = -V_{\max}/I\omega$ ):

$$\psi_2 \approx A_p \sin(p_\psi t - \alpha_1) - A_x \sin(2\omega t - \alpha_x) - A_g \cos(\omega t - \alpha_g), \quad (10)$$

де  $A_p = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ;  $A_x = -\frac{V_{\max}}{I(p_\psi^2 - 4\omega^2)}$ ;  $A_g = -\frac{m\varepsilon g}{I(p_\psi^2 - \omega^2)}$ ;  $C_2 = -\frac{2\omega A_x \cos \gamma_x}{p_\psi} - \frac{V_{\max}}{I p_\psi \omega}$ ;

$C_1 = A_x \sin \gamma_x - A_g$ .

Порівняння розв'язку (10) та розв'язку рівняння швидких рухів віброзбудника, отриманого у [17], свідчить, що амплітуди коливань швидкості ротора при встановленні стаціонарного режиму руху в області резонансу вібромашини у випадках урахування дії моменту сил ваги та нехтування нею, будуть приблизно однаковими. Водночас, у стаціонарному режимі у разі дії моменту сил ваги, амплітуди коливання швидкості віброзбудника будуть помітно більшими.

Комп'ютерне моделювання коливань дебалансного віброзбудника. Моделювання динамічних процесів в зоні резонанса вібромашини зводилося до чисельного інтегрування диференціальних рівнянь руху електромеханічної системи, рівнянь (1), (2) та рівнянь динамічної моделі асинхронного двигуна [18] з використанням програмного продукту Maple. Параметри системи рівнянь (1), (2) вибрано згідно параметрів експериментальної вібраційної установки, описаної в [2]:  $M = 40 \text{ кг}$ ;  $m = 3 \text{ кг}$ ;  $\varepsilon = 0,03 \text{ м}$ ;  $I = 0,006 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ ;  $c_x = 7,5 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$ ;  $\beta_x = 135 \text{ кг/с}$ ; передбачається, що у вібромашині встановлено трифазний асинхронний

електродвигун серії 4А з короткозамкненим ротором потужністю  $P = 0,6 \text{ кВт}$  та частотою обертання  $n_c = 1500 \text{ об/хв}$ .

На рис. 2 наведені графіки зміни швидкості віброзбудника для випадку дії на ротор збудника моменту сил ваги дебалансу та за її відсутності.

Згідно отриманим графікам в обох досліджуваних випадках при «застряганні» віброзбудника виникають складні коливання швидкості ротора з порівняно низькою (відносно частоти обертання  $\omega \approx 41 \text{ с}^{-1}$ ) основною частотою  $p_\psi \approx 15 \text{ с}^{-1}$ ; амплітуди перехідного процесу є підвищеними та практично однакові за величиною. Таким чином, дія моменту сил ваги дебаланса на незрівноважений ротор не змінює частоту його повільних коливань в зоні резонансу. Водночас, в подальшому при встановленні усталеного режиму руху для випадку дії моменту сил ваги, амплітуди коливань швидкості віброзбудника є істотно більшими ( $12 \text{ с}^{-1}$  і  $6 \text{ с}^{-1}$ ). Звичайно, при цьому вони являють собою бігармонічні коливання (гармоніки  $\omega$  та  $2\omega$ ), в той час як в іншому розглядуваному випадку – моногармонічні коливання з частотою  $2\omega$ .

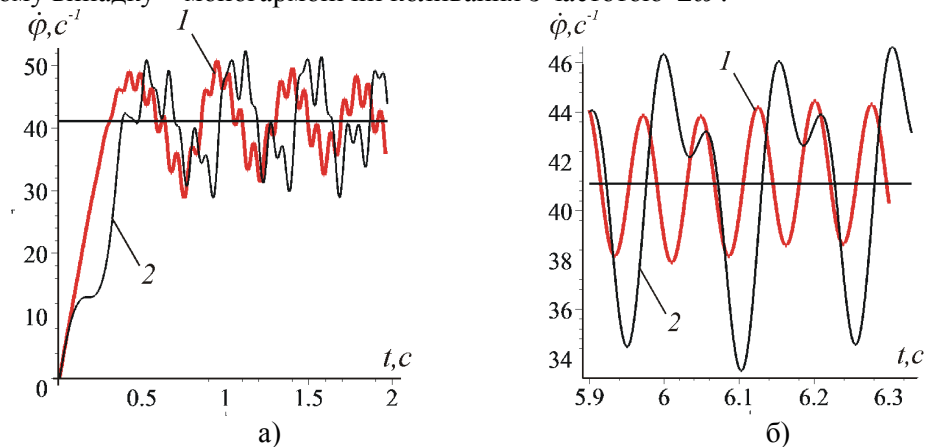


Рис. 2. Зміни швидкості віброзбудника при її «застряганні» у зоні резонансу вібромашини: а) з початку руху; б) в усталеному режимі: 1 – без урахування моменту сил ваги; 2 – з урахуванням моменту сил ваги

**Висновки і перспективи подальших досліджень.** У разі «застрягання» швидкості ротора віброзбудника при «повільному» проходженні зони власних частот вібромашини (стрімкому зростанню гальмівного вібраційного моменту) виникають повільні коливання швидкості ротора.

Встановлено, що дія моменту сил ваги дебалансу практично не впливає на перехідний процес виникаючий в області ефекту Зоммерфельда. Частота та амплітуди повільних коливань швидкості ротора в зоні резонансу вібромашини в обох досліджуваних випадках є практично однаковими.

Водночас, у стаціонарному режимі руху в області власних частот вібромашини наслідком дії моменту сил ваги дебалансу є істотне зростання амплітуди коливань швидкості ротора. Звичайно робота розглядуваного класу вібромашин у такому режимі є неприпустимою.

Виконані дослідження можуть бути корисними при розробці алгоритмів керування пуском вібраційних машин з інерційним приводом.

#### Література:

1. Кононенко В.О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. М.: Наука, 1964. 254с.
2. Алифов Ф.Ф., Фролов К.В. Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. М.: Наука, 1985. 328 с.
3. Блехман И.И. Вибрационная механика. М.: Физматлит, 1994. 400с.
4. Balthazar, J.M. Mook D.T., Weber H.I. and all. An overview on non-ideal vibrations / J. M. Balthazar, // *Mechanica*. 2003. Vol. 38(6). P. 613–621.
5. Краснопольська Т.С. Ефект Зоммерфельда-Кононенка та його дослідження. Проблеми вычислительной механики и прочности конструкций. 2018. Вып. 8. С. 89-109.
6. Блехман И.И. Вибрационная механика и вибрационная реология (теория и приложения).

– М.: Физматлит, 2018. 752с.

7. Аврамов К.В., Михлин Ю.В. Нелинейная динамика упругих систем. М.: Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2010. 704 с.

8. Перепелкин Н.В., Михлин Ю.В. О нелинейной динамике систем с ограниченным возбуждением. Вестник Нац. техн. ун-та "ХПИ" : сб. науч. тр.: Динамика и прочность машин. Харьков : НТУ "ХПИ", 2008. № 36. С. 153-163.

9. Blekhman, I., Kremer, E. The dynamics of a complex machine assembly: Vibration-induced drag on the rotation. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. Т. 46. № 4.

10. Филимоныхин, Г.Б., Яцун В.В. Исследование процесса возбуждения двухчастотных вибраций шаровым автобалансиром грохота Гил 42. Восточно-Европейский журнал передовых технологий. 2016. № 1/7(79). С.17–23.

11. Ланець О.С., Гурський В.М., Ланець О.В., Шпак Я.В. Обґрунтування конструкції та моделювання роботи резонансного двомасового вібростола з інерційним приводом. Динаміка, міцність та проектування машин і приладів: Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». Львів, 2014. № 788. С. 28–37.

12. Ярошевич М.П., Силивонюк А.В. Про деякі особливості динаміки розбігу вібраційних машин зі збудниками, що само синхронізуються. Науковий вісник НГУ. Дніпропетровськ. 2013. №4. С. 37-45.

13. N. Yaroshevich, I. Zabrodets, S. Shymchuk, T. Yaroshevich. Influence of elasticity of unbalanced drive in vibration machines on its oscillations. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, №5, 2018, pp.17–23.

14. Нелинейные проблемы теории колебаний и теории управления. – Вибрационная механика. Пол ред. В.В. Белецкого, Д.А. Индейцева, А.Л. Фрадкова. ИПМаш РАН. СПб.: Наука, 2009. 528 с.

15. Ярошевич М.П., Ярошевич Т.С. Динаміка розбігу вібраційних машин с де балансним приводом. Луцьк. ЛНТУ, 2010.220с.

16. Blekhman I.I Blekhman L.I Dresig H. and others. Selected Topics in Vibrational Mechanics. World Scientific, New Jersey, London, 2004, 409p.

17. Yaroshevich, N., Puts, V., Yaroshevich, T., Herasymchuk, O. (2020). Slow oscillations in systems with inertial vibration exciters. Vibroengineering Procedia, 32, pp. 20–25.

18. Чабан В. Й. Математичне моделювання електромеханічних процесів. Львів: вид-во держ. ун-ту «Львівська політехніка», 1997. 342 с.