

**В.В. Кот<sup>1</sup>, Н.В. Шинкарчук<sup>2</sup>**

*Відокремлений структурний підрозділ «Рівненський фаховий коледж<sup>1</sup>  
Національного університету біоресурсів і природокористування України»  
Рівненський державний гуманітарний університет<sup>2</sup>*

**РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ІЗОТРОПНОЇ  
ПЛАСТИНКИ З КРИВОЛІНІЙНИМ ОТВОРОМ КОНТУР ЯКОГО  
ЧАСТКОВО ПІДСИЛЕНИЙ ТОНКИМ ПРУЖНИМ КІЛЬЦЕМ**

*Пропонується розв'язок задачі про підсилення замкненим пружним ребром контуру криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці, яка перебуває в умовах циліндричного згину на нескінченності, за наявності на межі поділу матеріалів міжфазної тріщини (розрізу), береги якої в процесі деформації не контактують. Математична модель задачі побудована у вигляді системи сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта. Наближений розв'язок задачі реалізовано методом механічних квадратур і колокації.*

*Ключові слова:* нескінченна пластинка, підсилювальне ребро, міжфазна тріщина, контактні моменти, сингулярні інтегральні рівняння, ядра Гільберта.

**В.В. Кот, Н.В. Шинкарчук**

**РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗОТРОПНОЙ  
ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ ОТВЕРСТИЕМ КОНТУРА КОТОРОГО  
ЧАСТИЧНО УСИЛЕННЫЙ ТОНКИМ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ**

*Предлагается решение задачи об усилении замкнутым упругим ребром контура криволинейного отверстия в бесконечной изотропной пластинке, которая находится в условиях цилиндрического изгиба на бесконечности, при наличии на границе раздела материалов межфазной трещины (разреза), берега которой в процессе деформации не контактируют. Математическая модель задачи построена в виде системы сингулярных интегрально-дифференциальных уравнений с ядрами Гильберта. Приближенное решение задачи реализовано методом механических квадратур и колокации.*

*Ключевые слова:* бесконечная пластинка, усиливающее ребро, межфазная трещина, контактные моменты, сингулярные интегральные уравнения, ядра Гильберта.

**V.V. Kot, N.V. Shynkarchuk**

**CALCULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF ISOTROPIC  
PLATE WITH A CURVILINEAR OPENING, THE CONTOUR OF WHICH HAS BEEN  
PARTIALLY REINFORCED BY A THIN ELASTIC RING**

*The article constructs an approximate solution of the problem of partial amplification of the contour of a curvilinear opening of an infinite isotropic plate by a closed elastic edge. The plate at infinity is in conditions of cylindrical bending evenly distributed moments. It is believed that under such a load, a closed isotropic rib of constant thickness and width does not come into contact with the plate in the area that is not attached to it.*

*Modeling an edge with an elastic line endowed with bending and torsional rigidity, the mathematical model of the problem is in the form of a system of singular integral equations with Hilbert kernels.*

*Finding the exact solution of the system is associated with significant mathematical difficulties. To find an approximate solution, the type of functions sought at the junction was set. Numerical implementation of the problem is carried out using the method of mechanical squaring and collocation, which on a specific example, the influence of physical characteristics of the reinforcement and the plate on their stress-strain state has been investigated.*

*Keywords:* infinite plate, reinforcing rib, interphase fracture, contact moments, singular integral equations, Hilbertian kernels.

**Постановка проблеми.** В машинобудуванні та будівництві в якості складових елементів деталей машин і споруд широкого використовуються пластинчасті деталі з отворами. Щоб вони задовольняли вимогам міцності та жорсткості, які до них ставляться, отвір підсилюють тонким пружним кільцем (замкненим пружним ребром). Однак на етапі виготовлення чи експлуатації такої конструкції на межах поділу матеріалів пластинки і замкненого ребра можуть виникнути тріщини. Їх наявність може призвести до передчасного руйнування як пластинчастої деталі так і всього механізму чи споруди в цілому. Тому виникає необхідність ще на стадії проектування попередньо здійснювати розрахунки міцності і жорсткості окремих пластинчастих ланок механізмів машин і споруд при згинальних навантаженнях.

Задачі про підсилення контуру отвору в ізотропних та анізотропних пластинках замкненими пружними ребрами за відсутності міжфазних розрізів добре досліджені і давно відомі в науковій літературі [1-3].

В роботах [4-6], побудовано наближений розв'язок задач згину пластинок з отворами, контури яких підсилені розімкненими пружними ребрами. Досліджено вплив форми отвору, матеріалу пластинки та відносної жорсткості підсилювальних ребер на розподіл компонент напруженого стану на контурі отвору пластинки.

Задачі про часткове підсилення контуру отвору в пластинці замкненим пружним ребром, за наявності між матеріалами пластинки і ребра міжфазного розрізу малої ширини, береги якого в процесі деформації не контактують, розглянуто в роботах [7-9] для випадку плоского напруженого стану. Побудовано математичні моделі задач у вигляді систем сингулярних інтегральних рівнянь для визначення моментних напружень на контурі отвору пластинки, методом колокації здійснено їх наближений розв'язок.

Задачу циліндричного згину пластинки з частково підсиленим отвором, замкненим пружним ребром розглянуто тільки для випадку кругового отвору в [10], для криволінійного отвору така задача не розглядалася.

В даній статті запропоновано розв'язок задачі про підсилення контуру криволінійного отвору нескінченної ізотропної пластинки замкненим пружним ребром за наявності на межі поділу матеріалів міжфазного розрізу при дії зовнішнього згинального навантаження прикладеного на нескінченності.

**Постановка задачі.** Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною  $2h$  з криволінійним отвором, контур якого  $L$  обмежений гладкою циліндричною поверхнею. В отвір без зазору та натягу вставлене пружне кільце такої ж форми. На ділянці  $L_1 = [\alpha_0^*, \beta_0^*]$  вони сполучені між собою, а на решті контуру між ними наявний наскрізний міжфазний розріз. Систему декартових  $(x, y)$  і полярних  $(\rho, \lambda)$  координат у спільній серединній площині пластинки і замкненого ребра (кільця) з полюсом в центрі отвору оберемо так, як показано на рис. 1. На нескінченності пластинка згинається рівномірно розподіленими моментами  $M_1$  та  $M_2$ , які діють у напрямках координатних осей. Вважатимемо, що при такому навантаженні береги розрізу не контактують між собою.

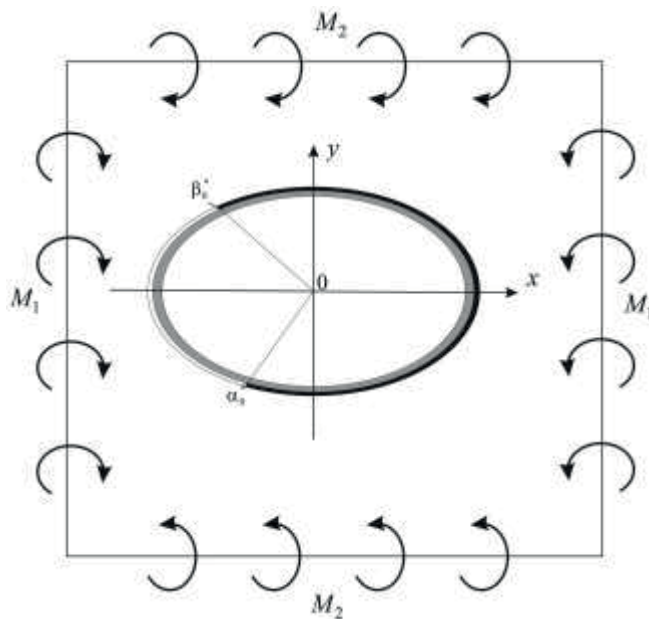


Рис. 1. Розрахункова схема пластинки

Для розв'язання задачі необхідно визначити компоненти напружено-деформованого стану на контурі отвору пластинки і в замкненому ребрі.

**Виклад основного матеріалу.** Умовно відділимо ребро від пластинки, замінивши їх взаємодію невідомими контактними моментами  $M_p$  і  $P$ . Розглянемо окремо пружну рівновагу кожного з отриманих тіл.

*Нескінченна пластинка* перебуває в рівновазі під дією зовнішнього моментного навантаження та контактних моментів, які передаються до контуру  $L$  криволінійного отвору з

боку підсилювального ребра. На підставі [4-6, 10], деформації кривини та кручення контуру  $L$  визначаються за співвідношеннями:

$$X = \frac{k}{(3+\nu)(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))} \left[ (1+\nu)(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))M_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} M_\rho(t)S_1(\lambda, t)dt - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} P(t)S_2(\lambda, t)dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} M_\rho(t)S_2(\lambda, t)ctg \frac{\lambda-t}{2} dt - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} P(t)S_1(\lambda, t)ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + X_0^* \alpha(\lambda) + Y_0^* \beta(\lambda) \right]; \quad (1)$$

$$Y = -\frac{k}{(3+\nu)(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))} \left[ (1+\nu)(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))P(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} P(t)S_1(\lambda, t)dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} M_\rho(t)S_2(\lambda, t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} M_\rho(t)S_1(\lambda, t)ctg \frac{\lambda-t}{2} dt - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} P(t)S_2(\lambda, t)ctg \frac{\lambda-t}{2} dt - X_0^* \beta(\lambda) + Y_0^* \alpha(\lambda) \right],$$

де  $\alpha(\lambda) + i\beta(\lambda) = \omega'(\sigma)$ ,  $\sigma = e^{i\lambda}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .  $z = \omega(\xi) = R_0 \left( \varepsilon + \frac{\varepsilon_1}{\xi} + \frac{\varepsilon_2}{\xi^2} + \frac{\varepsilon_3}{\xi^3} \right)$  – функція, що здійснює конформне відображення зовнішності одиничного кола в площині  $\xi = \rho e^{i\lambda}$  на область  $z = x + iy$ , яку займає середня площа пластинки;  $R_0$  – характерний розмір отвору (не порушуючи загальності, приймаємо  $R_0 = 1$ );  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – параметри, які визначає відхилення форми контуру  $L$  від кола ( $|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| \leq 1$ );  $[\alpha_0, \beta_0]$  образи ділянок  $[\alpha_0^*, \beta_0^*]$  при даному відображенні;  $k = \frac{1}{D(1-\nu)}$ ;  $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$  – циліндрична жорсткість пластинки на згин;  $E, \nu$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки;  $S_1(\lambda, t) = \alpha(t)\alpha(\lambda) + \beta(t)\beta(\lambda)$ ;  $S_2(\lambda, t) = \beta(t)\alpha(\lambda) - \alpha(t)\beta(\lambda)$ ;

$$X_0^* = -\frac{3+\nu}{1-\nu}(M_1 + M_2) - 2(M_2 - M_1)\cos 2\lambda + (1-\nu)\beta(\lambda)\tilde{C}_1 + 4\frac{\varepsilon_3}{k}(\tilde{\alpha}_1 \cos 2\lambda - \tilde{\beta}_1 \sin 2\lambda) + \\ + \frac{1-\nu}{1+\nu}(M_1 + M_2)[1 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \cos 2\lambda - \alpha(\lambda)]; \\ Y_0^* = 2(M_2 - M_1)\sin 2\lambda - \frac{1-\nu}{1+\nu}(M_1 + M_2)[\beta(\lambda) + \varepsilon_1 \varepsilon_3 \sin 2\lambda - \alpha(\lambda)] + \tilde{C}_1[4 - (1-\nu)\alpha(\lambda)] - \\ - 4\frac{\varepsilon_3}{k}(\tilde{\beta}_1 \cos 2\lambda + \tilde{\alpha}_1 \sin 2\lambda).$$

Сталі  $\tilde{C}_1, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1$  визначаються з співвідношень:

$$(\chi - \varepsilon_3)\frac{\tilde{\beta}_1}{k} - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} (M_\rho^*(t) \sin 2t + P^*(t) \cos 2t) dt - \tilde{C}_1 \varepsilon_1 = 0; \\ (\chi + \varepsilon_3)\frac{\tilde{\alpha}_1}{k} - \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} (M_\rho^*(t) \cos 2t - P^*(t) \sin 2t) dt - \frac{M_2 - M_1}{2} + \frac{M_1 + M_2}{4(1+\nu)}(1-\nu)(\varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\chi}{2\pi} \int_{\gamma} P^*(t) dt - \frac{\varepsilon_1}{2\pi} \int_{\gamma} (M_{\rho}^*(t) \sin 2t + P^*(t) \cos 2t) dt - \frac{\varepsilon_2}{2\pi} \int_{\gamma} (M_{\rho}^*(t) \sin 3t + P^*(t) \cos 3t) dt - \\ - \frac{\varepsilon_3}{2\pi} \int_{\gamma} (M_{\rho}^*(t) \sin 4t + P^*(t) \cos 4t) dt - \varepsilon_1 \varepsilon_3 \frac{\tilde{\beta}_1}{k} + \tilde{C}_1 (\chi + \varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2 + 3\varepsilon_3^2) = 0.$$

$$\text{Тут } M_{\rho}^* + iP^* = (M_{\rho} + iP) \omega'(\sigma); \quad \chi = -\frac{3+\nu}{1-\nu}.$$

Пружне кільце перебуває у рівновазі внаслідок дії на нього контактних моментів прикладених з боку пластинки. Задача розрахунку напруженого стану такого кільця статично невизначена. Щоб виправити це, умовно розріжемо його площиною  $\theta = \theta_0$  і до кожного з торців перерізу прикладемо крутний  $L_{\lambda}^0$  і згинальний  $L_{\rho}^0$  моменти (рис. 2).

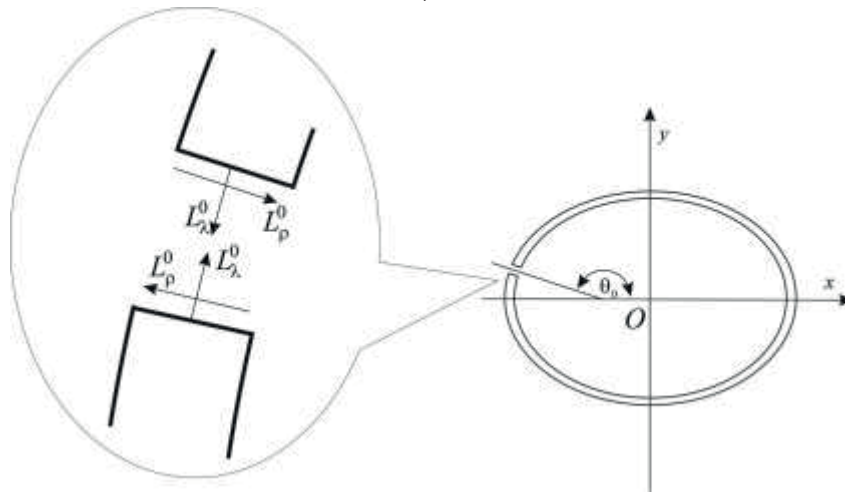


Рис. 2. Розрахункова схема розіркненого кільця

В результаті отримаємо статично визначене розіркнене кільце, яке перебуває у рівновазі під дією контактних моментів і торцьового навантаження. Моделюючи його пружною лінією, яка наділена жорсткостями на згин  $g_1$  і кручення  $g_2$  на підставі [10] деформації кривини і кручення осі кільця можна подати наступними залежностями:

$$X^c = -\frac{1}{g_1} [L_x^0 \cos \theta - L_y^0 \sin \theta + \tilde{L}_{\rho}(\theta)]; \quad (3)$$

$$Y^c = -\frac{1}{g_2} [L_x^0 \sin \theta + L_y^0 \cos \theta + \tilde{L}_{\lambda}(\theta)].$$

Тут введено позначення

$$\tilde{L}_{\rho}(\theta) - i\tilde{L}_{\lambda}(\theta) = i \int_{\theta_0}^{\theta} (M_{\rho} + iP) \rho e^{i(\theta_1 - \theta)} d\theta_1; \quad L_x - iL_y = (L_{\rho}^0 - iL_{\lambda}^0) e^{i\theta_0}; \quad \theta - \text{кут між нормаллю і}$$

додатнім напрямом осі  $Ox$ .

**Математична модель задачі.** Крайові умови задачі формулюємо у вигляді рівності деформації на межі сполучення пластинки і підсилювального кільця

$$X^c = X; \quad Y^c = Y; \quad \lambda \in [\alpha_0, \beta_0]. \quad (4)$$

Підставляючи в (4) співвідношення (1) і (3) отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення невідомих контактних моментів:

$$\tilde{L}_{\rho}(\theta) + \frac{g_1 k}{(3+\nu)(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))} \left[ (1+\nu)(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)) M_{\rho}(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} M_{\rho}(t) S_1(\lambda, t) dt - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} P(t) S_2(\lambda, t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} M_\rho(t) S_2(\lambda, t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt - \\
 & \left. -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} P(t) S_1(\lambda, t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt + X_0^* \alpha(\lambda) + Y_0^* \beta(\lambda) \right] + L_x^0 \cos \theta - L_y^0 \sin \theta = 0;
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 & -\tilde{L}_\lambda(\theta) - \frac{g_2 k}{(3+\nu)(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda))} \left[ (1+\nu)(\alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)) P(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} P(t) S_1(\lambda, t) dt + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} M_\rho(t) S_2(\lambda, t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} M_\rho(t) S_1(\lambda, t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} P(t) S_2(\lambda, t) ctg \frac{\lambda-t}{2} dt - X_0^* \beta(\lambda) + Y_0^* \alpha(\lambda) \right] - L_x^0 \sin \theta - L_y^0 \cos \theta = 0.
 \end{aligned}$$

Для сумісності даної системи її необхідно доповнити:

- умовами (2), які слугують для визначання сталих  $\tilde{C}_1, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1$ ;
- умовами зв'язку між функціями  $M_\rho, P, \tilde{L}_\rho, \tilde{L}_\lambda$  [10]:

$$P(\lambda) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{L}_\rho(\theta)}{d\theta} - \frac{1}{\rho} \tilde{L}_\lambda(\theta), \quad M_\rho(\lambda) = -\frac{1}{\rho} \frac{d\tilde{L}_\lambda(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{\rho} \tilde{L}_\rho(\theta);
 \tag{6}$$

- умовами однозначності кутів повороту поперечних перерізів ребра [1, 10], які для даної задачі матимуть вигляд:

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)} \left[ \tilde{L}_\lambda(\theta) \cos \theta - \frac{g_2}{g_1} \tilde{L}_\rho(\theta) \sin \theta \right] dt - \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)} [L_x^0 I_1(\theta) + L_y^0 I_2(\theta)] dt = 0;
 \tag{7}$$

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} \sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)} \left[ \tilde{L}_\rho(\theta) \cos \theta + \frac{g_2}{g_1} \tilde{L}_\lambda(\theta) \sin \theta \right] dt + \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)} [L_x^0 I_3(\theta) + L_y^0 I_1(\theta)] dt = 0.$$

Тут  $I_1(\lambda) = \left(1 - \frac{g_2}{g_1}\right) \cos \theta \sin \theta$ ,  $I_2(\lambda) = \frac{g_2}{g_1} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ ,  $I_3(\lambda) = \frac{g_2}{g_1} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ .

Співвідношення (2), (5) – (7) визначають математичну модель поставленої задачі і слугують для визначення функцій  $M_\rho(\lambda), P(\lambda), \tilde{L}_\rho(\theta), \tilde{L}_\lambda(\theta)$  та сталих  $L_x^0, L_y^0, \tilde{C}_1$ . Якщо ці величини стануть відомі, то кільцеві  $M_\lambda$ , крутні  $H_{\rho\lambda}$  моменти на контурі отвору пластинки і згинальні  $L_\rho$  та крутні  $L_\lambda$  моменти в ребрі визначаються за формулами [4-6, 10]

$$\begin{aligned}
 L_\rho - iL_\lambda &= \tilde{L}_\rho(\theta) - i\tilde{L}_\lambda(\theta) + (L_x - iL_y) e^{-i\theta}; \\
 M_\lambda &= \nu M_\rho - \frac{1+\nu}{k} X, \quad H_{\rho\lambda} = -\frac{Y}{k}.
 \end{aligned}$$

**Чисельний розв'язок задачі.** Точний розв'язок системи (2), (5) – (7) знайти не вдається. Розв'яжемо її наближено методом механічних квадратур та колокації [4-10]. Для застосування цього методу необхідно встановити структуру шуканих функцій на кінцях ділянки сполучення пластинки і замкнутого ребра. Контактні моменти, що діють на замкнене ребро з боку пластинки визначають зрівноважену систему сил, тому на підставі позначень із (3) функції  $\tilde{L}_\rho$  і  $\tilde{L}_\lambda$  на ділянці  $\lambda \in [\alpha_0, \beta_0]$  обмежені і неперервні, а на її кінцях дорівнюють нулю. Структуру контактних моментів визначає характеристична частина системи (5), яка така сама що й для задач часткового підсилення контурів криволінійних отворів в пластинках, які перебувають в умовах циліндричного

згину [4-6, 10]. Внаслідок цього можна зробити висновок, що контактні моменти мають кореневу особливість, на яку накладається локальна осциляція. Нехтуючи впливом осциляції, наближений розв'язок задачі можна побудувати методом механічних квадратур і колокації [5-10].

Результати числового розрахунку моментних напружень на межі поділу матеріалів пластинки і ребра при  $M_2 \neq 0, M_1 = 0$  наведені на рис. 3–5. Всі розрахунки проведені при  $h_0/h = 4/3, b_0/R_0 = 1/5, b_0/h_0 = 1/2, \alpha_0 = -120^\circ, \beta_0 = 120^\circ, \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0, \varepsilon_2 = 0.15$ . Суцільні лінії побудовані для випадку  $\frac{E_1}{E} = 1$ , пунктирні  $\frac{E_1}{E} = 5$ , штрихпунктирні  $\frac{E_1}{E} = 10$ , штрихові  $\frac{E_1}{E} = 20$  ( $E_1$  – модуль Юнга матеріалу ребра).

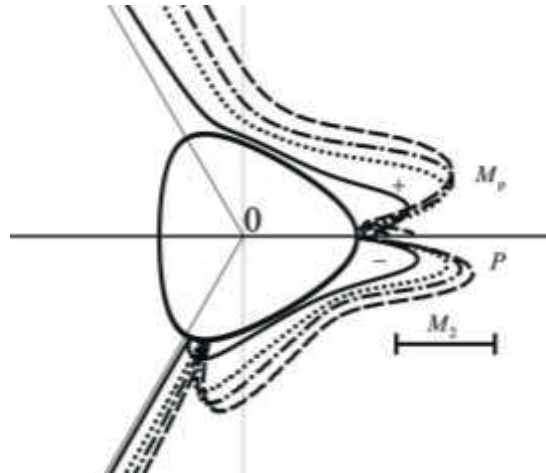


Рис. 3. Розподіл контактних моментів на контурі отвору пластинки

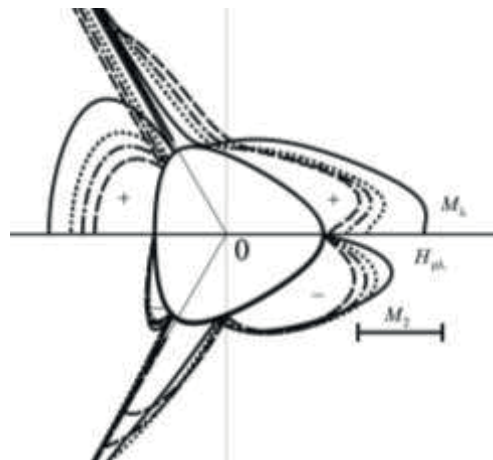


Рис. 4. Розподіл кільцевих і крутних моментів на контурі отвору пластинки

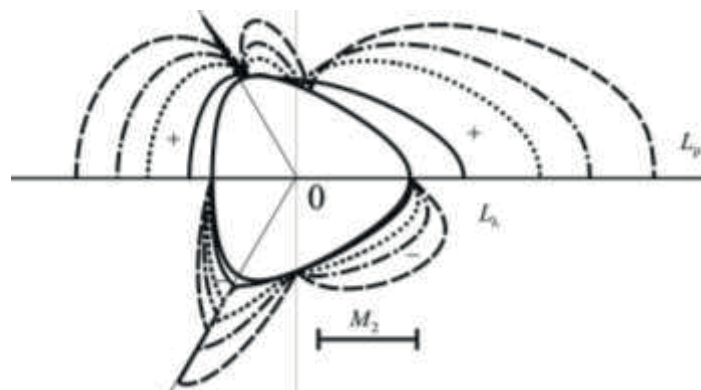


Рис. 5. Розподіл згинальних і крутних моментів у підсилювальному ребрі



**Висновки.** Аналізуючи отримані результати, приходимо до таких висновків:

- контактні  $M_\rho$  та  $P$  моменти в пластинці, а також згинальний  $L_\rho$  та крутний  $L_\lambda$  моменти у ребрі зростають при збільшенні відношення  $\frac{E_1}{E}$ ;
- кільцеві  $M_\lambda$  моменти при збільшенні  $\frac{E_1}{E}$  зменшуються, аналогічно себе поведуть і крутні  $H_{\rho\lambda}$  моменти в пластинці на ділянці сполучення пластинки та ребра;
- крутні  $H_{\rho\lambda}$  моменти в пластинці поза ділянкою сполучення пластинки та ребра практично не залежать від відносної жорсткості ребра  $\frac{E_1}{E}$ ;
- в околі торців розрізу всі моменти в пластинці набувають необмежених значень.

1. Савин Г.Н. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К : Наукова думка, 1964. 384 с.
2. Шереметьев М.П. Пластинки с подкрепленным краем. Львов : Изд-во Львов. ун-та, 1960. 258 с.
3. Пелех Б.Л., Сяський А.А. Концентрация напряжений возле отверстий в анизотропных оболочках, податливых на сдвиг. К.: Наукова думка, 1975. 198 с.
4. Сяський А., Гаврюсев С. Основні інтегральні співвідношення в технічній теорії згину пластин з отворами. Вісник Тернопільського державного технічного університету. 2006. Т.11. №1. С. 12 – 17.
5. Сяський А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием. Прикладная математика и механика. 1986. Т 50. №2. С. 247 – 254.
6. Сяський А., Кот В. Напружений стан пластинки з частково підсиленим криволінійним контуром при її циліндричному згині. Вісник Тернопільського національного технічного університету. 2011. Т.16. №2. С. 30 – 36.
7. Сяський А.О., Шевцова Н.В., Дейнека О.Ю. Міжфазний розріз в ізотропній пластинці з криволінійним контуром, підсиленим замкненим пружним ребром. Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. 2019. № 3. С. 18 – 23.
8. Сяський А.О., Шевцова Н.В., Дейнека О.Ю. Міжфазний розріз в ортотропній пластинці з підсиленим круговим контуром. Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. 2018. № 5. С. 176 – 181.
9. Сяський А., Шевцова Н., Дейнека О. Міжфазна тріщина в нескінченній ізотропній пластинці з підкріпленням круговим отвором. Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія технічні науки. 2017. Вип. 4 (80). С. 168–177.
10. Сяський А., Кот В, Вороницька В. Математична модель міжфазної тріщини в пластинці з підсиленим круговим контуром при її згині. Наукові нотатки: Міжвузівський збірник (за галузями знань «Технічні науки»). – Луцьк: Луцький національний технічний університет, 2019. – Вип.68.

#### Рецензенти:

к.т.н., доц., завідувач. кафедри інформаційних систем та обчислювальних методів Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені академіка Степана Дем'янчука  
**Каштан Сергій Степанович**

к.ф.-м.н., доцент кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету **Шахрайчук Микола Іович.**