

Є.Б. Козак

*магістр в галузі комп'ютерних наук, розробник програмного забезпечення, інженер-програміст
GAN Inc.*

КОМПЛЕКСНИЙ АЛГОРИТМ ВІДНОВЛЕННЯ БІНАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ, ЩО БАЗУЄТЬСЯ НА МОРФОЛОГІЧНИХ МЕТОДАХ ОБРОБКИ ГРАФІЧНИХ ДАНИХ

Проведено аналіз сучасних підходів, що застосовуються при побудові та оптимізації програмних і нейронних алгоритмів відновлення, сегментації та аналізу графічних даних. Показано пріоритет морфологічних методів обробки бінарних зображень за умов обмеження обчислювального ресурсу системи машинного аналізу при великому обсязі вхідних запитів і необхідності їх обробки у режимі реального часу. Запропоновано математичну модель морфологічної обробки бінарних зображень, що базується на логічних операторах заперечення, диз'юнкції, кон'юнкції, імплікації, еквіваленції, антиеквіваленції та різниці, а також на рівні математичного апарату показано зв'язок між зазначеними операторами. На базі представленої математичної моделі побудовано типові алгоритми обробки бінарних зображень (процедури дилатації, та ерозії). Розроблено алгоритм оцінки ефективності та оптимізації зазначених процедур відповідно показників якості відновлення зображення та часу обробки вхідних даних, що базується на класифікації набору запитів та визначенні екстремумів цільових функцій.

Ключові слова: бінарні зображення, морфологічні методи, порогові методи, математична модель, дилатація, ерозія, цільова функція.

Е.Б. Козак

КОМПЛЕКСНИЙ АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ БИНАРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА МОРФОЛОГИЧЕСКИХ МЕТОДАХ ОБРАБОТКИ ГРАФИЧЕСКИХ ДАНЫХ

Проведен анализ современных подходов, применяемых при построении и оптимизации программных и нейронных алгоритмов восстановления, сегментации и анализа графических данных. Показан приоритет морфологических методов обработки бинарных изображений в условиях ограничения вычислительного ресурса системы машинного анализа при большом объеме входящих запросов и необходимости их обработки в режиме реального времени. Предложена математическая модель морфологической обработки бинарных изображений, основанная на логических операторах отрицания, дизъюнкции, конъюнкции, импликация, эквиваленции, антиэквиваленции и разницы, а также на уровне математического аппарата показана связь между указанными операторами. На базе представленной математической модели построены типичные алгоритмы обработки бинарных изображений (процедуры дилатации и эрозии). Разработан алгоритм оценки эффективности и оптимизации указанных процедур в соответствии с показателями качества восстановления изображения и времени обработки входных данных, который базируется на классификации набора запросов и определении экстремумов целевых функций.

Ключевые слова: бинарные изображения, морфологические методы, пороговые методы, математическая модель, дилатация, эрозия, целевая функция.

Е.В. Cozac

COMPLEX ALGORITHM FOR RECOVERING BINARY IMAGES BASED ON MORPHOLOGICAL METHODS OF GRAPHIC DATA PROCESSING

The analysis of modern approaches used in the building and optimization of software and neural network algorithms for recovery, segmentation and analysis of graphic data is carried out. The priority of morphological methods for processing binary images in conditions of limited computing resource of the machine analysis system with a large volume of incoming requests and the necessity for their processing in real time regime is shown. The mathematical model of morphological processing of binary images based on logical operators of negation, disjunction, conjunction, implication, equivalence, antiequivalence and difference is proposed, and the relationship between these operators is shown at the level of the mathematical apparatus. On the basis of the presented mathematical model, typical algorithms for processing binary images (dilatation and erosion procedures) are constructed. An algorithm for evaluating the effectiveness and optimization of these procedures has been developed in accordance with the quality indicators of image restoration and the processing time of the input data, which is based on the classification of a set of queries and the determination of the extrema of the objective functions.

Key words: binary images, morphological methods, threshold methods, mathematical model, dilatation, erosion, objective function.

Вступ. Тенденції останніх десятиріч вказують на появу феномену «великих даних» (Big Data) та актуальність організації концепції розподілених інформаційних систем у відповідності до зазначеної парадигми. Значною мірою це пов'язано з розвитком цифрових засобів аудіо-, фото- та відеореєстрації на базі мобільних платформ [1-3], ростом глобальних та локальних інформаційних систем [4-6], а також з глобалізаційними процесами у сферах державного регулювання, виробництва, бізнесу, організації транспортних потоків, тощо. Таким чином, можна вказати, що на сьогоднішній день цифровізація даних та широке впровадження комп'ютерних технологій не призвело до переорієнтації виробничих процесів від моделі «людина-людина» (Person-to-Person, P2P) до моделі «машина-машина» (Machine-to-Machine, M2M), що вказало би на глобальне звільнення людського потенціалу від рутинної роботи. Натомість значна кількість людей була залучена до роботи до попередньої підготовки матеріалів для комп'ютерних систем відповідно організаційної моделі «людина-машина» (Person-to-Machine). Сучасні дослідники зазначають невідповідність потужності обчислювальних ресурсів та рівня алгоритмів машинного аналізу об'єму вхідних запитів та вимогам по їх обробці [7, 8].

Окремою групою задач у галузі машинного аналізу великих масивів даних є задача підготовки до аналізу графічних даних (зокрема відновлення матриці спотвореного зображення та регулювання ключових параметрів).

Аналіз сучасних досліджень і публікацій присвячених проблемам відновлення графічних даних вказує на пріоритет нейромережових алгоритмів, зокрема архітектури типу «автокодувальник» та згорткових нейромереж [9, 10]. Підхід, що базується на застосуванні нейромережових алгоритмів можна вважати універсальним, але його реалізація потребує організації та налаштування відповідної апаратно-програмної платформи, що характеризується достатньо високим обчислювальним ресурсом [1-3, 7, 8]. Для ряду завдань, що мають бути виконанні в умовах значних обмежень на кошторис налаштування апаратної платформи, але при цьому повинні виконуватись з мінімальною затримкою або навіть в умовах реального часу, застосовують програмні алгоритми побудовані на математичних моделях. У зазначеній області слід окремо вказати на наступні групи алгоритмів: алгоритми відновлення зображення шляхом видалення шумів відповідно математичної моделі шуму та процедури просторової фільтрації [11-13], алгоритми, що базуються на порогових методах попередньої обробки матриці зображення, зокрема методах з оптимальним порогом та методах з адаптивним порогом [14]; алгоритми сегментації матриці зображення шляхом застосування графічних примітивів [15, 16]; алгоритм сегментації матриці зображення шляхом визначення наборів зв'язних компонент [17]; текстурні алгоритми, що базуються на аналізі дифузних властивостей елементів матриці зображення [19].

При цьому окремо виділяють групу алгоритмів, що базуються на морфологічних методах попередньої обробки зображення [19-21]. Відповідні програмні алгоритми найбільш ефективно можуть бути використані при обробці бінарних зображень, наприклад, при відновленні оцифрованих графічних даних, що містять текст, креслення, схеми, тощо. При цьому за **невирішену частину загального дослідження** було взято задачу уніфікації відповідних алгоритмів шляхом розробки комплексної математичної моделі та критеріїв оцінки їх функціональності. Відповідний підхід дозволить сформувати необхідну методологічну базу побудови, оптимізації і оцінки морфологічних алгоритмів обробки графічних даних, а також рекомендації по їх застосуванню у загальній системі машинного аналізу (зокрема, у процедурах попередньої обробки вхідних даних для нейромережевого аналізу).

Таким чином, **метою дослідження** є розробка математичної моделі, що дозволяє формалізувати процес машинного аналізу, що базується на морфологічних методах попередньої обробки зображення, а також формування принципів побудови, оцінки та оптимізації відповідних алгоритмів за показниками якості відновлення вхідного зображення та загального часу його обробки.

1. Базові принципи включення логічних операторів у математичну модель морфологічних алгоритмів обробки графічних даних

Програмні алгоритми для роботи з масивами графічних даних на основі морфологічних методів попередньої обробки бінарного зображення базуються на застосуванні стандартних логічних операторів. Представимо зображення, що підлягає обробці, як двовимірну матрицю $A: \{a(x, y)\}$ розмірності $X_A \times Y_A$, а графічний примітив, на основі якого відбувається процес обробки як двовимірну матрицю $B: \{b(x, y)\}$ розмірності $X_B \times Y_B$. З метою побудови відповідного

математичного апарату вкажемо множину значень, що можуть приймати змінні $a(x, y)$ і $b(x, y)$, а також x і y для кожної з матриць:

$$\begin{cases} a(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{для } \forall x \in [1; X_A] \text{ і } \forall y \in [1; Y_A] \\ 1 & \text{інакше} \end{cases} \\ b(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{для } \forall x \in [1; X_B] \text{ і } \forall y \in [1; Y_B] \\ 1 & \text{інакше} \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Логічні оператори, що можуть бути застосовані по відношенню до елементів матриць вхідного зображення і графічного примітиву складаються з однієї з базисних операцій заперечення $\neg a(x, y)$ та наступного набору двомісних сполучників:

- оператор диз'юнкції $a(x, y) \vee b(x, y)$;
- оператор кон'юнкції $a(x, y) \wedge b(x, y)$;
- оператор еквіваленції $a(x, y) \leftrightarrow b(x, y)$.

При застосуванні процедури обробки графічних даних матриця вхідного зображення сканується матрицею графічного примітиву. Формалізація зазначеного процесу на математичному рівні полягає накладанні матриці графічного примітиву на фрагмент матриці вхідного зображення $A^+ : \{a^+(x, y)\}$ у межах $x \in [\Delta x; X_B + \Delta x]$ та $y \in [\Delta y; Y_B + \Delta y]$, де Δx послідовно змінюється у межах $\Delta x \in [0; X_A - X_B]$, а Δy , відповідно, змінюється у межах $\Delta y \in [0; Y_A - Y_B]$.

Табл. 1.

Логічні оператори морфологічних алгоритмів попередньої обробки зображення

$a(x, y)$	$b(x, y)$	$\neg a(x, y)$	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a \Rightarrow b$	$a \leftrightarrow b$	$a \oplus b$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1		1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	1		1	1	1	1	0

Логічні оператори при цьому застосовуються для множин $\{a^+(x, y)\}$ і $\{b(x, y)\}$, таким чином,

можна включити у математичний апарат оператор різниці $\frac{A^+}{B}$, що визначає елементи матриці A^+ , що не входять у B . На його основі можна розширити набір двомісних сполучників наступними операторами:

- оператор імплікації $A^+(\Delta x, \Delta y) \Rightarrow B$;
- оператор антиеквіваленції $A^+ \oplus B$;

що можуть бути розраховані як:

$$\begin{cases} A^+(\Delta x, \Delta y) \Rightarrow B = \neg A^+(\Delta x, \Delta y) \vee A^+(\Delta x, \Delta y) \wedge B \\ A^+(\Delta x, \Delta y) \oplus B = \neg(A^+(\Delta x, \Delta y) \leftrightarrow B) = \frac{A^+(\Delta x, \Delta y) \vee B}{A^+(\Delta x, \Delta y) \wedge B} \end{cases} \quad (2)$$

Принципи застосування логічних операторів у рамках математичної моделі процесу виконання морфологічного алгоритму попередньої обробки зображення узагальнено у таблиці 1.

2. Формування процедур морфологічної обробки графічних даних на основі логічних операторів

Типовими алгоритмами морфологічної обробки графічних даних, що можна побудувати на основі логічних операторів є процедури дилатації та ерозії, що використовуються для оновлення вхідного зображення шляхом нівелювання розривів та видалення випадкових елементів зображення, а також процедура виділення границь, що використовується для попередньої сегментації зображення.

Розглянемо бінарне зображення низької роздільної здатності, що представляє собою растрове відображення літери «Т» (рис. 1-а). Матриця зображення була спотворена у процесі цифровізації (рис. 1-б) і надалі частково відтворена на базі порогового методу з оптимальним порогом (рис. 1-в). Як можна побачити, у процесі відтворення матриця зображення була значним

чином спотворена, зокрема, елемент, що відповідає символу «Т» поділено навпіл і, таким чином, він не піддається розпізнаванню та класифікації методами машинного аналізу.

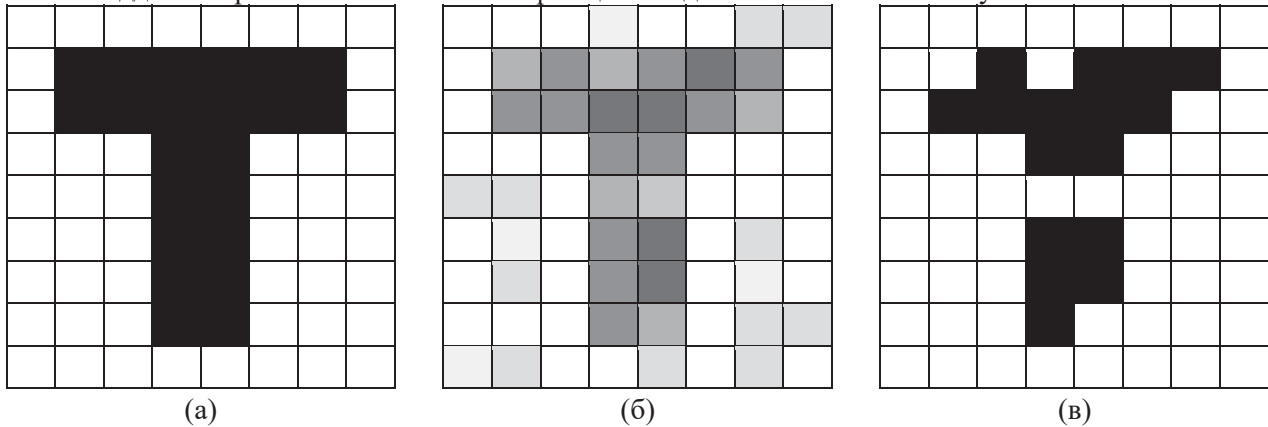


Рис. 1. Відтворення матриці бінарного зображення символу «Т» пороговим методом з оптимальним порогом.

У даному випадку у рамках організації морфологічного алгоритму відновлення вхідних графічних даних слід послідовно застосувати процедури дилатації та ерозії (рис. 2). Процедура дилатації полягає у співвідношенні матриці зображення та матриці графічного на базі логічного оператора антиеквівалентії. Таким чином, дилатація множини вхідного зображення по множині примітиву дилатації, представляє собою множину всіх переміщень $\Delta x \in [0; X_A - X_B]$ і $\Delta y \in [0; Y_A - Y_B]$ при яких множини $A^+(\Delta x, \Delta y)$ і B збігаються щонайменше в одному елементі. На рис. 2-а елементи матриці, що виникають внаслідок виконання процедури дилатації забарвлені світло-сірим кольором. Можна побачити, що внаслідок дилатації розмір символу зростає, у зв'язку з чим застосовується процедура ерозії.

Аналогічно, ерозія множини вхідного зображення по примітиву ерозії є множиною всіх переміщень $\Delta x \in [0; X_A - X_B]$ і $\Delta y \in [0; Y_A - Y_B]$, при зсуві у напрямку яких множина примітиву B повністю міститься у множині відповідного сектору вхідного зображення $A^+(\Delta x, \Delta y)$. На рис. 2-б елементи матриці, що виникають внаслідок виконання процедури ерозії забарвлені темно-сірим кольором. В результаті виконання зазначених процедур символ «Т» відтворюється не повністю (рис. 2-в), але вже піддається розпізнаванню машинними методами.

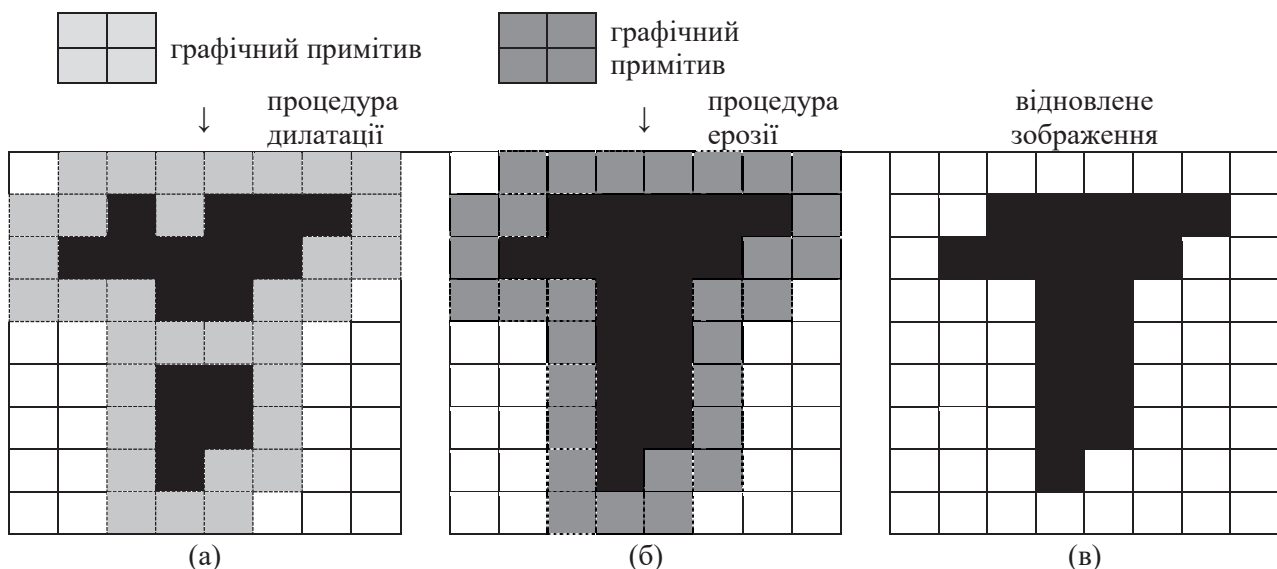


Рис. 2. Відновлення зображення на базі морфологічного алгоритму, що полягає у послідовному застосуванні процедур дилатації та ерозії.

На рис. 3 представлено подібний результат відтворення бінарної матриці растрового символу (рис. 3-а), спотвореного у процесі оцифрування (рис. 3-б) пороговими методами з оптимальним порогом (рис. 3-в). Слід зазначити, що у даному випадку матриця спотвореного зображення не містить розривів, але натомість містить додаткові артефакти, які пропонується

видалити шляхом застосування морфологічного алгоритму. Таким чином, при застосуванні процедури ерозії після процедури дилатації не надало би можливість у повній мірі відновити зображення, у той час як у попередньому випадку, натомість, застосуванні процедури дилатації після процедури ерозії перевело би матрицю зображення у нульову матрицю.

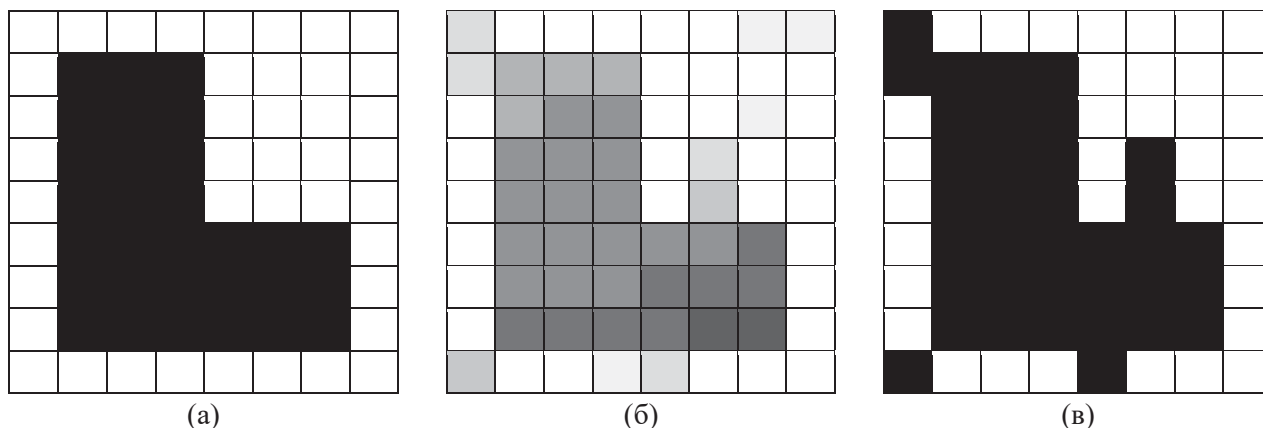


Рис. 3. Відтворення матриці бінарного зображення символу «L» пороговим методом з оптимальним порогом.

Відповідно до поставленого завдання (відсутності розривів та наявності артефактів) було запропоновано провести відновлення зображення шляхом застосування спочатку процедури ерозії (рис. 4-а), а після цього — процедури дилатації (рис. 4-б). Завдяки тому, що роздільна здатність символу була більшою, морфологічний алгоритм дозволив повністю відтворити матрицю початкового зображення (рис. 4-в).

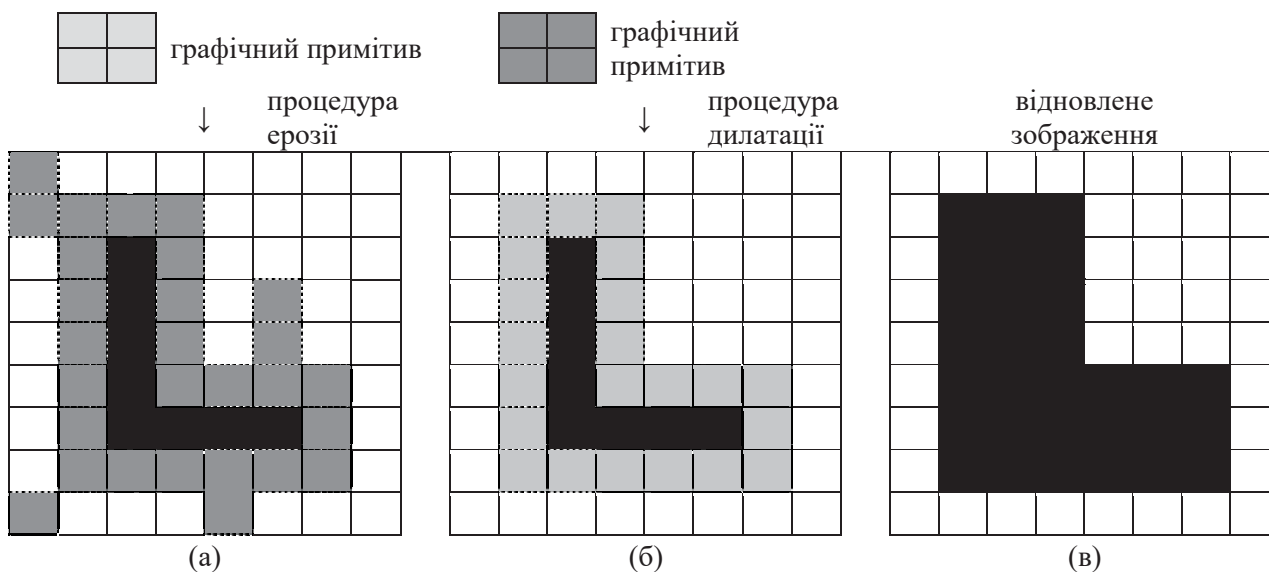


Рис. 4. Відновлення зображення на базі морфологічного алгоритму, що полягає у послідовному застосуванні процедур ерозії та дилатації.

Слід окремо зазначити, що примітиви дилатації та ерозії обираються відповідно до поставленого завдання у загальному випадку можуть не співпадати.

Нарешті, сегментація зображення шляхом застосування процедури виділення границь, що складає двовимірну бінарну матрицю C розмірності $X_A \times Y_A$, відбувається шляхом виконання операції ерозії $A^+(\Delta x, \Delta y)$ по B . Після цього застосовується логічний оператор різниці між множиною $A^+(\Delta x, \Delta y)$ і множиною, що є результатом виконання процедури ерозії, внаслідок чого отримується матриця C .

3. Розробка комплексної методики налаштування та оптимізації морфологічного алгоритму відновлення бінарного зображення

Проведений аналіз та математичне моделювання вказали на комплексність задачі побудови, налаштування та оптимізації морфологічного алгоритму відновлення бінарного зображення. У

рамках даного дослідження пропонується розбити задачу на кілька етапів: визначення особливостей реєстрації зображення у цифровому форматі (роздільна здатність матриці зображення, динамічний діапазон, розмір структурних елементів зображення); побудова зразка матриці вхідного зображення $A_0: \{a_0(x, y)\}$ (або набору зразків) та накладання на матрицю зображення типових дефектів $A'_0: \{a'_0(x, y)\}$, що моделюються на базі математичних функцій; вибір порогового методу переведення зображення у формат бінарної двовимірної матриці $A: \{a(x, y)\}$ (метод з оптимальним порогом, метод з адаптивним порогом, налаштування відповідних алгоритмів); побудова морфологічного алгоритму відновлення графічних даних відповідно до типу дефектів бінарного зображення (вибір процедур та порядку їх застосування). налаштування морфологічного алгоритму шляхом зміни матриць графічних примітивів дилатації $B_D: \{b_D(x, y)\}$ та ерозії $B_E: \{b_E(x, y)\}$, що проводиться шляхом визначення максимуму цільової функції F_A відповідності отриманої внаслідок обробки матриці $A_i: \{a_i(x, y)\}$ і початкової матриці $A_0: \{a_0(x, y)\}$; оптимізація загального алгоритму відновлення даних через перебудову морфологічного алгоритму та порогового методу шляхом визначення максимуму цільової функції F_A та мінімуму цільової функції, що відповідає за час обробки зображення F_T .

З іншого боку, якщо розглядати алгоритм попередньої обробки як складову частину більш загального алгоритму машинного аналізу зображення, то оптимізація блоку морфологічної обробки графічних даних також має включати визначення відповідності матриці відновленого зображення алгоритмам сегментації, виділення візуальних об'єктів, які містить зображення, та подальшої їх класифікації, що також може бути організовано на базі набору цільових функцій. У такому випадку відповідність відновленої матриці $A_i: \{a_i(x, y)\}$ початковій матриці $A_0: \{a_0(x, y)\}$ може не відповідати іншим критеріям ефективності машинного аналізу зображення.

Висновки. В результаті проведеного дослідження було розглянуто загальну схему обробки та відновлення бінарного зображення, представленого у бінарному форматі, для подальшої сегментації, виділення візуальних об'єктів та класифікації на основі машинних методів. Було показано, що пріоритет морфологічних методів відновлення матриці бінарного зображення полягає у меншому навантаженні на обчислювальний ресурс апаратно-програмної платформи системи машинного аналізу, що є актуальним при необхідності обробки великого обсягу вхідних запитів за умов роботи у режимі реального часу. Математичний апарат, що було запропоновано застосовувати з метою моделювання процесу обробки зображення морфологічним алгоритмом базувався на одномісному сполучнику заперечення та двомісних сполучниках диз'юнкції, кон'юнкції і еквіваленції, операторі різниці і похідних від них операторах імплікації та антиеквіваленції. Показано як на основі зазначених логічних операторів можна побудувати процедури дилатації та ерозії, що використовуються для відновлення вхідного зображення, а також процедуру виділення границь, що використовується для попередньої сегментації зображення. Вказано особливості застосування зазначених процедур при відновленні растрових зображень символів у залежності від розміру символу та типу дефектів вхідного зображення.

На основі проведеного аналізу було розроблено методику налаштування та оптимізації морфологічного алгоритму відновлення бінарного зображення відповідно до параметрів вхідного зображення та його переведення у бінарну форму. При цьому налаштування морфологічного алгоритму відбувається шляхом послідовної зміни матриць графічних примітивів дилатації та ерозії, що проводиться через визначення максимуму цільової функції відповідності отриманої внаслідок обробки матриці і початкової матриці; а при модифікації алгоритми також визначається мінімуму цільової функції, що відповідає за час обробки зображення, і модифікується структура морфологічного алгоритму та порогового методу. Вказано, що зазначена схема надалі може бути адаптована для визначення відповідності матриці відновленого зображення алгоритмам машинного аналізу.

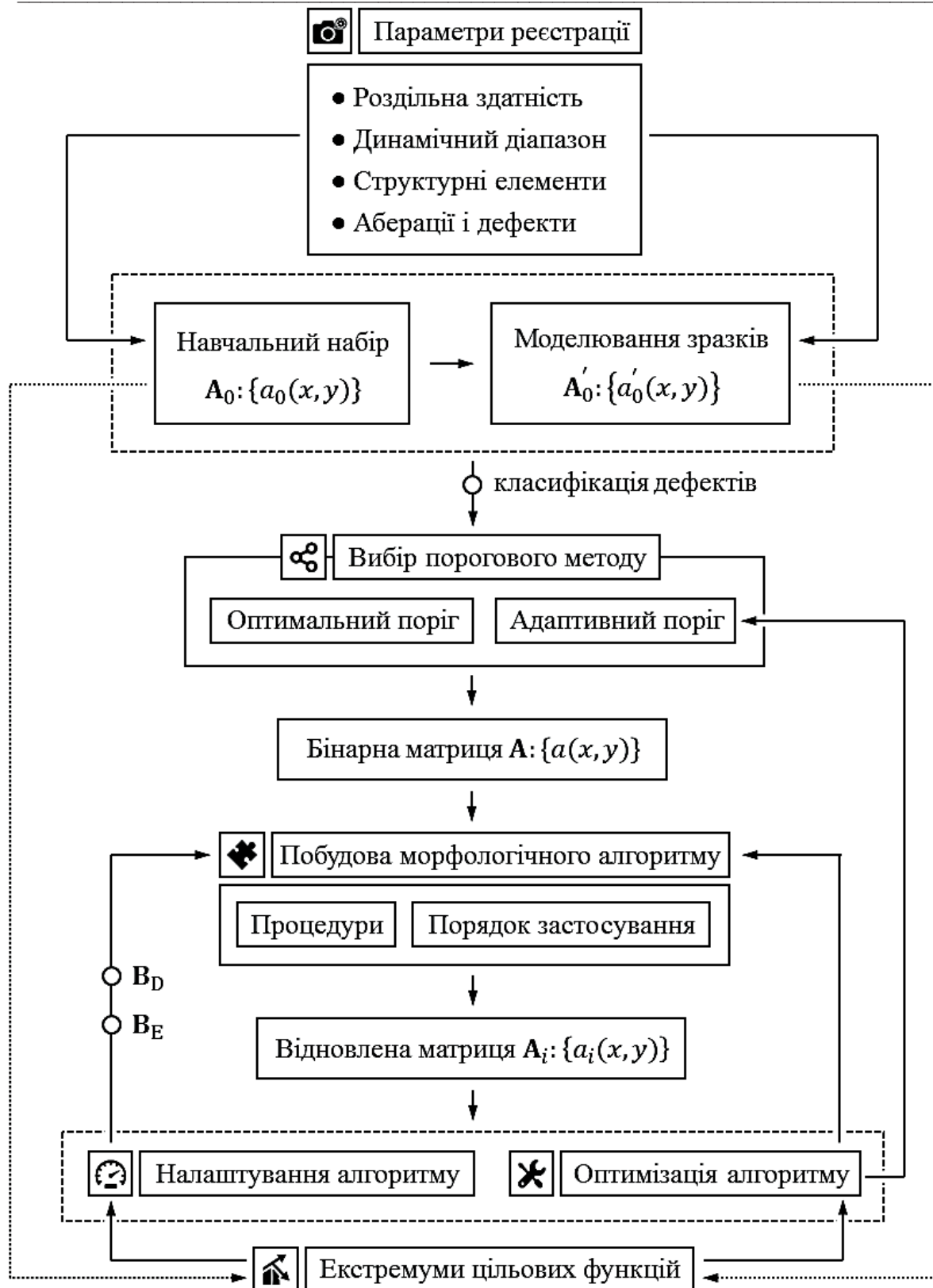


Рис. 5. Методика налаштування та оптимізації морфологічного алгоритму відновлення бінарного зображення.

Список літератури:

1. Zou, J., Li, Z., Guo, Z., & Hong, D. (2019). Super-Resolution Reconstruction of Images Based on Microarray Camera. *Computers, Materials & Continua*, 60 (1), 163–177. doi: 10.32604/cmc.2019.05795.
2. Quantifying the sensitivity of camera traps: an adapted distance sampling approach. *Methods in Ecology and Evolution*, 2 (5), 464–476. doi: 10.1111/j.2041-210x.2011.00094.

3. Wang, W., Chen, X., Yang, C., Li, X., Hu, X., & Yue, T. (2019). Enhancing Low Light Videos by Exploring High Sensitivity Camera Noise. *2019 IEEE/CVF International Conference on Computer Vision (ICCV)*. doi: 10.1109/iccv.2019.00421.
4. Bhattacharjee, A., Borgohain, S. K., Soni, B., Verma, G., & Gao, X.-Z. (2020). *Machine Learning, Image Processing, Network Security and Data Sciences Second International Conference, Mind 2020, Silchar, India, July 30 - 31, 2020, Proceedings, Part II*. Springer Singapore.
5. Bonneau, J. (2020). *Financial cryptography and data security: 24th international conference, Fc 2020, Kota Kinabalu, Malaysia, February 10-14, 2020: revised selected papers*. Springer.
6. Bracciali, A., Clark, J., Pintore, F., Rønne, P. B., & Sala, M. (2020). *Financial Cryptography and Data Security Fc 2019 International Workshops, Voting and Wtsc, St. Kitts, St. Kitts and Nevis, February 18-22, 2019, Revised Selected Papers*. Springer International Publishing.
7. V.V. Petrov, Zichun Le., A.A. Kryuchyn, S.M. Shanoylo, M. Fu, Ie.V. Beliak, D. Yu. Manko, A.S. Lapchuk, E.M. Morozov. *Long-term storage of digital information* July 2018 DOI: 10.15407/Akadempriodyka. 360.148 ISBN: 9789663603605.
8. Gordon, D. G. (2016). Legal Aspects of Cloud Computing. *Encyclopedia of Cloud Computing*, 462-475. doi:10.1002/9781118821930.ch38.
9. Sercu, T., & Goel, V. (2016). Advances in Very Deep Convolutional Neural Networks for LVCSR. *Interspeech 2016*. doi:10.21437/interspeech.2016-1033
10. Venkatesan, R., & Li, B. (2018). *Convolutional neural networks in visual computing: A concise guide*. Boca Raton, FL: CRC Press.
11. Seelamantula, C. S., & Blu, T. (2015). Image denoising in multiplicative noise. *2015 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*. doi:10.1109/icip.2015.7351056.
12. Hou, J., Tian, J., & Liu, J. (2005). Spatial image filtering based on wavelet thresholding denoising. *MIPPR 2005: Image Analysis Techniques*. doi:10.1117/12.652332.
13. Zhang, C., Liu, W., & Xing, W. (2018). Color image enhancement based on local spatial homomorphic filtering and gradient domain variance guided image filtering. *Journal of Electronic Imaging*, 27(06), 1. doi:10.1117/1.jei.27.6.063026.
14. Hou, J., Tian, J., & Liu, J. (2005). Spatial image filtering based on wavelet thresholding denoising. *MIPPR 2005: Image Analysis Techniques*. doi:10.1117/12.652332.
15. Han, S., & Vasconcelos, N. (2006). Image Compression using Object-Based Regions of Interest. *2006 International Conference on Image Processing*. doi:10.1109/icip.2006.313095.
16. Bajla, I., Soukup, D., & Stolc, S. (2011). Occluded Image Object Recognition using Localized Nonnegative Matrix Factorization Methods. *Object Recognition*. doi:10.5772/14124.
17. Sanguansat, P. (2012). Two-Dimensional Principal Component Analysis and Its Extensions. *Principal Component Analysis*. doi:10.5772/36892.
18. Liu, K., Lu, B., Wei, Y. (2013). Better image texture recognition based on SVM classification. *MIPPR 2013: Pattern Recognition and Computer Vision*. doi:10.1117/12.2031539.
19. Vincent, L., & Heijmans, H. (2018). Graph Morphology in Image Analysis. *Mathematical Morphology in Image Processing*, 170-203. doi:10.1201/9781482277234-6.
20. Roerdink, J. B. (2018). Mathematical Morphology with Noncommutative Symmetry Groups. *Mathematical Morphology in Image Processing*, 205-254. doi:10.1201/9781482277234-7.
21. Schmitt, M. (2018). On Two Inverse Problems in Mathematical Morphology. *Mathematical Morphology in Image Processing*, 151-169. doi:10.1201/9781482277234-5.