

УДК 539.3

Н.В. Шинкарчук*Рівненський державний гуманітарний університет***МІШАНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ
З КРУГОВИМ ОТВОРОМ І ПРУЖНОГО ДИСКА**

Проведено розрахунки напруженого стану на контурі кругового отвору нескінченної ізотропної пластинки, який частково спаяний з пружним круглим диском за умови контактування берегів розрізу, при дії силового навантаження. Наведено інтегральні співвідношення, які визначають компоненти вектора зміщення контурних точок пластинки і пружного круглого диска. Побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення контактних зусиль на контурі отвору пластинки і диска. Методом механічних квадратур і колокації знайдено наближений розв'язок поставленої задачі.

Ключові слова: контактні зусилля, нескінченна пластинка, пружний диск, зона спаю, сингулярні рівняння.

Н.В. Шинкарчук**СМЕШАННАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ
С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И УПРУГОГО ДИСКА**

Проведено расчеты напряженного состояния на контуре кругового отверстия бесконечной изотропной пластинки, частично спаянного с упругим круглым диском при условии контакта берегов разреза, при действии силовой нагрузки. Приведены интегральные соотношения, которые определяют компоненты вектора смещения контурных точек пластинки и упругого круглого диска. Построена система сингулярных интегральных уравнений с логарифмическими ядрами для определения контактных усилий на контуре отверстия пластинки и диска. Методом механических квадратур и колокации найдено приближенное решение поставленной задачи.

Ключевые слова: контактные усилия, бесконечная пластинка, упругий диск, зона спаю, сингулярные уравнения.

N.V. Shynkarchuk**THE MIXED CONTACT PROBLEM FOR THE ISOTROPIC PLATE
WITH CIRCULAR HOLE AND ELASTIC DISK**

The numeric solution of an contact task for an infinite isotropic plate with a circular of hole and an elastic isotropic disk is proposed. The plate with a circular hole and the elastic isotropic disk on one part of the common contour are soldered together. On the rest of the contour between them there is a through unsymmetrical interphase section. Under the action of concentrated force applied in the center of the elastic disk, the edges of the section of the plate structure are contacted partially or completely. The friction force in the contact area of the isotropic plate and the elastic disk is absent. The solution to this problem involves determining the size and position of the contact area. And also the determination of contact and ring forces on the material separation line. The boundary conditions of the problem in the contact zone are chosen in the form of the equality of the normal displacements of the contour points of the plate and the disk.

The boundary conditions of the problem in zone of solder are chosen in the form of equality of their displacements. The relations between the components of the vector offset of the contour points of the plate and the disk and the contact stresses are written in the form of integral dependences with logarithmic kernels. Substituting these expressions into boundary conditions of the problem, a system of singular integral equations was constructed to determine the functions through which the contact forces in the zone contact and solder regions are expressed. The conditions of balance of the disk must be fulfilled. The numeric approximate solution of the problem is realized by the method of mechanical quadratures and collocation. The size and position of the zone contact are determined by the dichotomy method. The results of the numerical calculation of the problem are presented in the table and illustrated in the figures.

Keywords: contact forces, an infinity plate, elastic disk, zone of solder, singular equations.

Постановка проблеми. Розглянемо колісну пару в якій сполучення колеса та осі здійснюється методом зварювання, такі сполучення широко використовуються при виготовленні колісних пар для вагонеток. Схема навантаження колісної пари показана на рис. 1, де P_0 – сили, які передаються на вісь через підшипники.

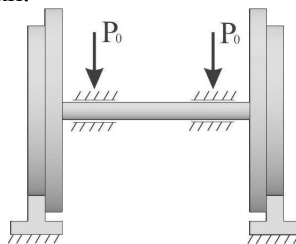


Рис. 1. Схема навантаження з'єднання «колесо-вісь»

Оскільки діаметр осі значно менший від діаметра колеса, останнє будемо моделювати нескінченною ізотропною пластинкою з круговим отвором одиничного радіуса. Частина осі, яка сполучена з колесом, будемо моделювати пружним круглим диском, виготовленим із того ж матеріалу, що й пластинка. Нехтуючи деформаціями згину і кручення осі та динамічними ефектами, вважаємо, що зосереджена сила P_0 прикладена в центрі диска. В процесі руху колісної пари по рейках, положення тріщини (розрізу) відносно напрямку дії сили P_0 буде неперервно змінюватися.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задачі про напружений стан однорідної ізотропної пластинки з розрізом по дузі кола, яка перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, зведенням до задачі лінійного спряження [1] розглянуто в [2-4].

Подаючи компоненти вектора зміщення контурних точок інтегральними залежностями від компонентів тензора напружень з логарифмічними ядрами в [5] побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь для кусково-однорідної ізотропної пластинки з криволінійним розрізом на лінії розмежування матеріалів за умови контактування його берегів при її силовому навантаженні в центрі диска.

Розв'язок задачі для кусково-однорідної ізотропної пластинки з коловим розрізом, береги якого контактують частково або по всій довжині, за дії згинальних навантажень на нескінченності та в центрі диска наведено в [6].

Мета статті. Розробити числово-аналітичну модель поставленої задачі. Запропонувати розв'язок контактної задачі для розробки інженерної методики розрахунку зварної колісної пари «колесо-вісь» залізничного транспорту малої вантажопідйомності, послаблених тріщинами на межі поділу матеріалів колеса та осі.

Виклад основного матеріалу. Нехай в круговий отвір одиничного радіуса нескінченної ізотропної пластинки товщиною $2h$, без зазору і натягу, вставлено пружний ізотропний круглий диск такої ж товщини. Систему прямокутних (x, y) і полярних (ρ, λ) координат у серединній площині пластинки оберемо таким чином, щоб початок відліку співпадав з центром отвору, а полярна вісь співпадала з віссю абсцис. На симетричній ділянці $\gamma_3 = [\pi - \beta_0, \pi + \beta_0]$ контуру γ пружний диск спаяний з пластинкою. На іншій частині цього контуру між пластинкою і диском наявний наскрізний розріз. В центрі пружного диска діє зосереджена сила P_0 . Внаслідок такого силового навантаження на ділянці $\gamma_1 = [\alpha_1, \beta_1]$ пластинка вступає в гладкий контакт з диском. На ділянках γ_2 контакт між пластинкою і диском – відсутній. Розрахункова схема наведена на рис. 2.

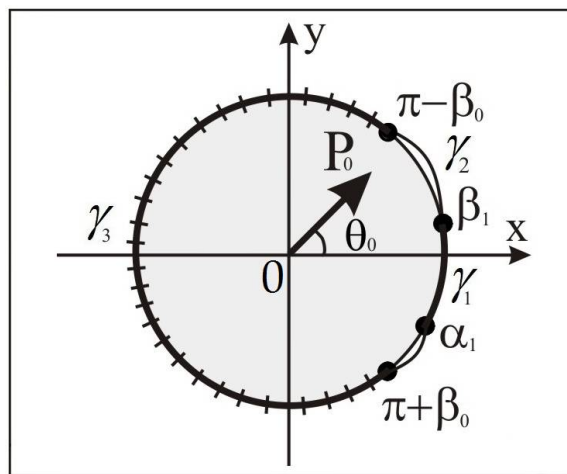


Рис. 2. Розрахункова схема задачі

Допустимо, що в процесі зварювання чи експлуатації між колесом і віссю виникла наскрізна тріщина (розріз). Для оцінки міцності з'єднання необхідно визначити напружений стан на межі

поділу матеріалів колеса та осі, а також дослідити вплив на ці величини, при заданому навантаженні, положення і розмірів тріщини.

Інтегральні рівняння задачі. Граничні умови задачі на ділянці гладкого контакту γ_1 обираються у вигляді рівності нормальних зміщень контурних точок пластинки і диска [5, 7]

$$\cos \lambda(U - U^{(1)}) + \sin \lambda(V - V^{(1)}) = 0; \quad S_{\rho\lambda} = S_{\rho\lambda}^{(1)} = 0; \quad T_\rho = T_\rho^{(1)}, \quad \lambda \in \gamma_1, \quad (1)$$

а на ділянці спаю γ_3 у вигляді рівності компонент вектора зміщення пластинки і диска [1, 7]

$$U - U^{(1)} = 0; \quad V - V^{(1)} = 0; \quad S_{\rho\lambda} = S_{\rho\lambda}^{(1)}; \quad T_\rho = T_\rho^{(1)}, \quad \lambda \in \gamma_3. \quad (2)$$

Тут T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, $T_\rho^{(1)}$, $S_{\rho\lambda}^{(1)}$ – нормальні та дотичні зусилля на контурі отвору пластинки і пружного диска.

Компоненти вектора зміщення контурних точок пластинки для заданого навантаження визначаються за формулами [5]

$$\begin{aligned} 2EhU &= (1-\nu) \int_{\alpha_1}^{\lambda} f_1'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{P_0 \sin \theta_0 (1-\nu)}{2\pi} \lambda + c_1; \\ 2EhV &= (1-\nu) \int_{\alpha_1}^{\lambda} f_2'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \\ &- \frac{2}{\pi} \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{P_0 \cos \theta_0 (1-\nu)}{2\pi} \lambda + c_2, \end{aligned} \quad (3)$$

аналогічні формули для пружного круглого диска при $E^{(1)} = E$, $\nu^{(1)} = \nu$, $h^{(1)} = h$ з урахуванням (1), (2) мають вигляд [5, 8]

$$\begin{aligned} 2EhU^{(1)} &= (1-\nu) \int_{\alpha_1}^{\lambda} f_1'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \\ &+ \frac{1+\nu}{2\pi} (P_0 \cos \theta_0 \cos 2\lambda + P_0 \sin \theta_0 \sin 2\lambda) - \frac{P_0 \sin \theta_0 (1-\nu)}{2\pi} \lambda - T^0 \cos \lambda + c_1^{(1)}; \\ 2EhV^{(1)} &= (1-\nu) \int_{\alpha_1}^{\lambda} f_2'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{\pi-\beta_0}^{\pi+\beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \\ &+ \frac{1+\nu}{2\pi} (P_0 \cos \theta_0 \sin 2\lambda - P_0 \sin \theta_0 \cos 2\lambda) + \frac{P_0 \cos \theta_0 (1-\nu)}{2\pi} \lambda - T^0 \sin \lambda + c_2^{(1)}, \quad \lambda \in \gamma, \end{aligned} \quad (4)$$

де E , $E^{(1)}$, ν , $\nu^{(1)}$ – модулі Юнга і коефіцієнти Пуассона матеріалів пластинки і пружного диска;

c_1 , c_2 , $c_1^{(1)}$, $c_2^{(1)}$ – дійсні сталі; $f_1 + if_2 = i \int_{\alpha_1}^{\lambda} (T_\rho^* + iS_{\rho\lambda}^*) e^{it} dt$; $T^0 = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} (f_2'(t) \cos t - f_1'(t) \sin t) dt$.

Підставляючи співвідношення (3), (4) в граничні умови (1), (2) та використавши позначення

$$\begin{aligned} f_1'(\lambda) + if_2'(\lambda) &= f_1^{\circ'}(\lambda) + if_2^{\circ'}(\lambda), & \lambda &\in [\alpha_1, \beta_1]; \\ f_1'(\pi + \tilde{\lambda}) + if_2'(\pi + \tilde{\lambda}) &= \tilde{f}_1'(\tilde{\lambda}) + i\tilde{f}_2'(\tilde{\lambda}), & \tilde{\lambda} &\in [-\beta_0, \beta_0], \end{aligned}$$

одержимо систему з чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення шуканих функцій $f_1^{\circ'}$, $f_2^{\circ'}$, \tilde{f}_1' , \tilde{f}_2'

$$\tilde{a}(\lambda) \left[\frac{4}{\pi} \left[\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_2^{\circ'}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + T^0 \cos \lambda - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1+\nu}{2\pi}(P_0 \cos \theta_0 \cos 2\lambda + P_0 \sin \theta_0 \sin 2\lambda) \Big] + \tilde{b}(\lambda) \left[-\frac{4}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1^{\circ\prime}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \right. \\
 & \left. + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1^{\prime}(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] - \frac{1+\nu}{2\pi}(P_0 \cos \theta_0 \sin 2\lambda - P_0 \sin \theta_0 \cos 2\lambda) + T^0 \sin \lambda \Big] = \\
 & = \tilde{a}(\lambda) \tilde{c}_1 + \tilde{b}(\lambda) \tilde{c}_2; \quad f_1^{\circ\prime}(\lambda) \tilde{a}(\lambda) + f_2^{\circ\prime}(\lambda) \tilde{b}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in [\alpha_1, \beta_1]. \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\frac{4}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_2^{\circ\prime}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2^{\prime}(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + T^0 \cos \lambda -$$

$$-\frac{1+\nu}{2\pi}(P_0 \cos \theta_0 \cos 2\lambda + P_0 \sin \theta_0 \sin 2\lambda) = \tilde{c}_1;$$

$$-\frac{4}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1^{\circ\prime}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1^{\prime}(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + T^0 \sin \lambda -$$

$$-\frac{1+\nu}{2\pi}(P_0 \cos \theta_0 \sin 2\lambda - P_0 \sin \theta_0 \cos 2\lambda) = \tilde{c}_2, \quad \lambda \in [\pi - \beta_0, \pi + \beta_0]; \quad \tilde{\lambda} \in [-\beta_0, \beta_0]. \quad (6)$$

Тут $\tilde{a}(\lambda) = \cos \lambda$, $\tilde{b}(\lambda) = \sin \lambda$, $\tilde{c}_1 = c_1^{(1)} - c_1$, $\tilde{c}_2 = c_2^{(1)} - c_2$.

До цієї системи рівнянь необхідно додати умови силової рівноваги диска [1, 5]

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_2^{\circ\prime}(t) dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2^{\prime}(\tilde{t}) d\tilde{t} = -P_0 \cos \theta_0; \quad \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f_1^{\circ\prime}(t) dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1^{\prime}(\tilde{t}) d\tilde{t} = P_0 \sin \theta_0, \quad (7)$$

які служать для визначення сталих \tilde{c}_1 , \tilde{c}_2 .

Якщо функції $f_1^{\prime}(\lambda)$, $f_2^{\prime}(\lambda)$ стануть відомі, то контактні зусилля на контурі отвору пластинки визначаються за формулою [5]

$$T_{\rho} + iS_{\rho\lambda} = (f_2^{\prime}(\lambda) - if_1^{\prime}(\lambda))(\cos \lambda - i \sin \lambda), \quad \lambda \in \gamma. \quad (8)$$

Кільцеві зусилля на контурі отвору пластинки і пружного диска визначаються за формулами, наведеними в [5, 8].

Наближений розв'язок задачі. Для знаходження наближеного розв'язку задачі необхідно використати числові методи. Оскільки система (5) – (7) має таку ж характеристичну частину, як і система рівнянь одержана в [5, 9], то метод механічних квадратур і колокації її наближеного розв'язання переноситься без змін. Слід зауважити, що при зведенні несиметричного проміжку інтегрування $[\alpha_1, \beta_1]$ до проміжку $[-1, 1]$ використовується наступна заміна

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2} x + \frac{b_1 + a_1}{2}; \quad \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{b_1 - a_1}{2} s + \frac{b_1 + a_1}{2},$$

де $a_1 = \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}$, $b_1 = \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2}$.

Результати числового розрахунку. Для однорідної ізотропної пластинки з розрізом по дузі кола $[-\pi/6, \pi/6]$ досліджено вплив напрямку дії сили P_0 на її напружений стан, розмір і положення зони контакту. Результати числового розрахунку контактних T_{ρ} , $S_{\rho\lambda}$ і кільцевих T_{λ} , $T_{\lambda}^{(1)}$ зусиль на контурі γ для різних значень θ_0 ($\theta_0 = 0, \pi/3, 2\pi/3$) при $\nu = 0.3$ наведено на рис. 3 – 5. Суцільні лінії на рисунках відповідають зусиллям T_{ρ} , штрихові – $S_{\rho\lambda}$, штрихпунктирні – T_{λ} , пунктирні – $T_{\lambda}^{(1)}$. У таблиці 1 подано значення полярних кутів межових точок зони контакту, а також значення нормальних зусиль в околі вершин розрізу.

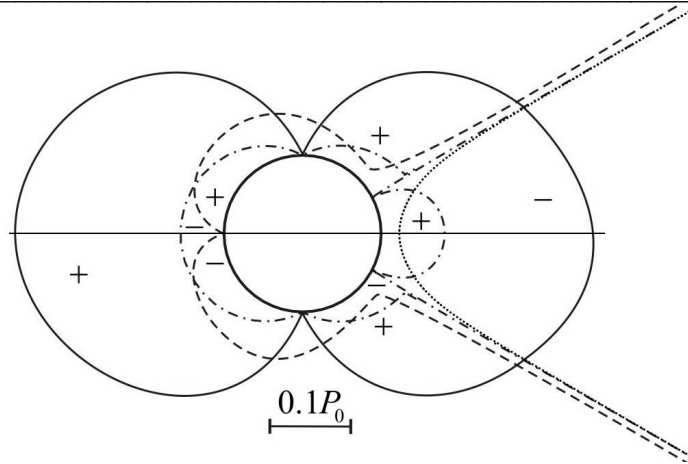


Рис. 3. Епюри розподілу зусиль T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, T_λ , $T_\lambda^{(1)}$ на контурі γ при $\theta = 0^\circ$

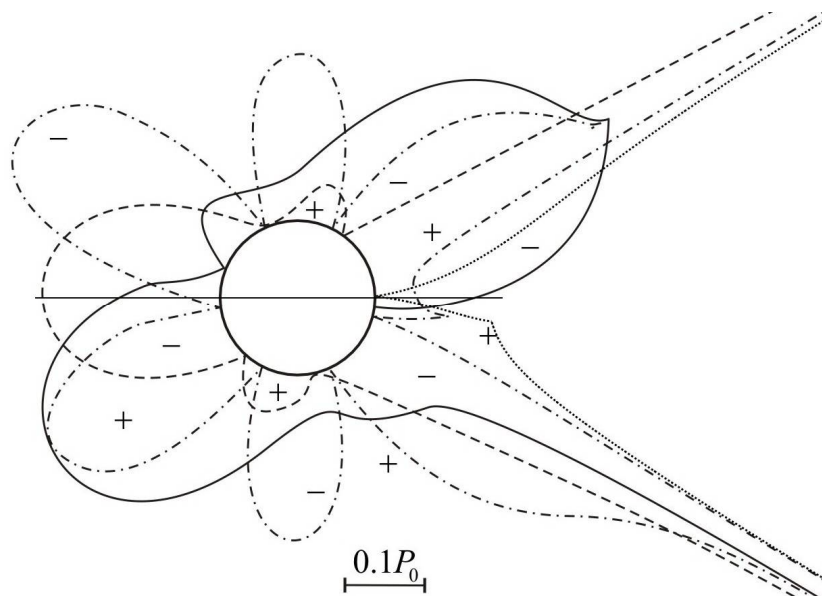


Рис. 4. Епюри розподілу зусиль T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, T_λ , $T_\lambda^{(1)}$ на контурі γ при $\theta = 60^\circ$

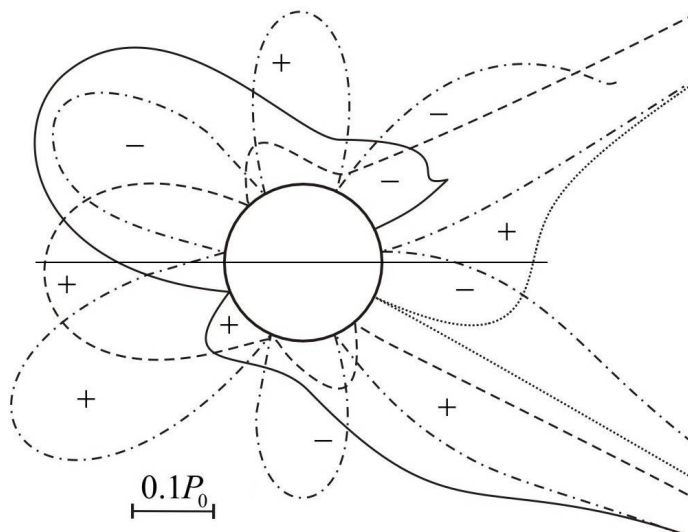


Рис. 5. Епюри розподілу зусиль T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, T_λ , $T_\lambda^{(1)}$ на контурі γ при $\theta = 120^\circ$

Результати розрахунку величин α_1 , β_1 , $T_\rho(\lambda = \alpha_1)$, $T_\rho(\lambda = \beta_1)$

| θ_0 (град) | α_1 (град) | β_1 (град) | $T_\rho(\lambda = \alpha_1)$ | $T_\rho(\lambda = \beta_1)$ |
|-------------------|-------------------|------------------|------------------------------|-----------------------------|
| 0 | -30.00 | 30.00 | -0.2083 | -0.2083 |
| 60 | -7.11 | 30.00 | 0 | -0.3342 |
| 120 | 25.21 | 30.00 | 0 | -0.0662 |

Висновки. В роботі наведено розрахунки напруженого стану зварного з'єднання колісної пари залізничного транспорту, послабленого несиметричною тріщиною (розрізом) на межі поділу матеріалів колеса та осі. Побудована система сингулярних інтегральних рівнянь із логарифмічними ядрами та методика її наближеного розв'язання дає можливість визначити розміри цієї тріщини.

Одержані результати дають підставу стверджувати, що при довільному значенні кута θ_0 спостерігається суттєва залежність компонентів напруженого стану, величини і положення зони контакту від напрямку дії сили P_0 . Збільшення величини кута θ_0 призводить до зменшення розмірів зони контакту.

Література

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Москва : Наука, 1966. 708 с.
2. Гриліцький Д.В., Луцишин Р.М. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов. Львів : Вища школа, 1975. 115 с.
3. Гриліцький Д.В. Основні граничні задачі теорії пружності для безмежної ізотропної пластинки з впаєюною круглою ізотропною шайбою з розрізами на лінії спаю. Питання механіки і математики ЛДУ. 1962. Вип. 9. С. 79 – 86.
4. Гриліцький Д.В. Про деякі випадки пружної рівноваги ізотропної пластинки з впаєюною круглою ізотропною шайбою. Доп. АН УРСР. 1960. Вип. 2. С. 164 – 167.
5. Сяський А.О., Шинкарчук Н.В. Мішана контактна задача для пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска. Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. 2010. Вип. 7 (16). С. 199 – 209.
6. Сяський А.О., Музичук К.П. Згин кусково-однорідної пластинки з коловим розрізом, береги якого контактують. Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія технічні науки. 2012. Вип. 2 (58). С. 91 – 98.
7. Сяський А., Шинкарчук Н., Кот В. Напружений стан кусково-однорідної ізотропної пластинки з коловим розрізом. Вісник Тернопільського національного технічного університету. 2014. Вип. 4 (76). С. 63 – 70.
8. Сяський В.А. Вплив тертя на розподіл напружень при контакті гладких циліндричних тіл і штампів з кутовими точками. Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. 1999. Вип. 6. С. 127 – 134.
9. Сяський А.О., Шинкарчук Н.В. Кусково-однорідна ортотропна пластинка з еліптичним розрізом за умови контактування його берегів. Наукові нотатки : Міжвузівський збірник. 2011. Вип. 30. С. 168 – 174.

Рецензенти:

д.т.н., професор кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування Турбал Юрій Васильович;

к.ф.-м.н., доцент кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету Шахрайчук Микола Іович.