

УДК 539.3 DOI 10.36910/6775.24153966.2019.68.18

А. Сяський, В. Кот, В. Вороницька

Рівненський державний гуманітарний університет

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ В ПЛАСТИНЦІ З ПІДСИЛЕНИМ КРУГОВИМ КОНТУРОМ ПРИ ЇЇ ЗГІНІ

Побудовано математичну модель задачі про підсилення замкненим пружним ребром контуру кругового отвору в нескінченній ізотропній пластинці, яка перебуває в умовах циліндричного згину на нескінченності, за наявності на межі поділу матеріалів міжфазної тріщини (розрізу), береги якої в процесі деформації не контактують. Наближений розв'язок системи сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь задачі здійснено методом механічних квадратур і колокації. Розглянуто числовий приклад.

Ключові слова: нескінченна пластинка, підсилювальне ребро, міжфазна тріщина, контактні моменти, сингулярні інтегральні рівняння, ядра Гільберта.

А. Сяський, В. Кот, В. Вороницкая

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ В ПЛАСТИНКЕ С УСИЛЕНИЕМ КРУГОВЫМ КОНТУРОМ ПРИ ЕЕ ИЗГИБЕ

Построена математическая модель задачи об усилении замкнутым упругим ребром контура кругового отверстия в бесконечной изотропной пластинке, которая находится в условиях цилиндрического изгиба на бесконечности, при наличии на границе раздела материалов межфазной трещины (разреза), берега которой в процессе деформации не контактируют. Приближенное решение системы сингулярных интегрально-дифференциальных уравнений задачи осуществлено методом механических квадратур и коллокации. Рассмотрены числовой пример.

Ключевые слова: бесконечная пластинка, усиливающее ребро, межфазная трещина, контактные моменты, сингулярные интегральные уравнения, ядра Гильберта.

A. Siaskyi, V. Kot, V. Voronytska

THE MATHEMATICAL MODEL OF AN INTERPHASE FRACTURE IN A PLATE WITH A REINFORCED CIRCULAR PROFILE DURING ITS BENDING

Under the conditions of cylindrical bending, a mixed contact problem for an infinite isotropic plate with a circular opening, the profile of which has been reinforced by a closed elastic ring (rib) with a stable rectangular cross section, provided that at the connection border there are the materials of interphase section, the margins of which do not contact in the process of deformation, has been considered. The components of bending and torsion deformation at the profile of the plate opening are presented through integral relations with the Hilbertian kernels from the contact moments in the area where the plate and the ring are connected. The main equations, defining the stressed and deformed state of the rib have been recorded when modelling the reinforcement with an elastic line which has a bending and torsional stiffness. The problem's mathematical model has been created in form of a system of integral and differential equations for defining the contact moments between the plate and the rib, inner moments of the reinforcement and the initial parameters of a statistically indefinite rib. A structure of the values being searched at the ends of the area where the plates and the rib are connected, has been established. An approximate solution of the problem has been created using the method of mechanic quadratures and collocation, using which the influence of the type of the external bending load and the relative stiffness of the reinforcing rib on the stressed state of the plate structure, has been studied. It has been established, that all the components of the stressed state of the rib are limited.

Key words: infinite plate, reinforcing rib, interphase fracture, contact moments, singular integral equations, Hilbertian kernels.

Постановка проблеми. У сучасному машинобудуванні, як ланки механізмів і машин, широкого застосування набули деталі у вигляді пластинки з круговим отвором, контур якого підсилено тонким пружним кільцем (замкненим пружним ребром). На етапі їх виготовлені чи в процесі експлуатації на межі поділу матеріалів пластинки і ребра можуть виникнути міжфазні тріщини (розрізи нульової ширини). Такі тріщини за дії зовнішнього згинального навантаження спричинюють появу зон високої концентрації напружень. Їх наявність може призвести до передчасного руйнування як окремої пластинчастої деталі так і всього механізму. Тому доцільно ще на стадії проектування проводити дослідження міцності і жорсткості окремих пластинчастих ланок механізмів і машин при згинальних навантаженнях.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. За відсутності міжфазних розрізів задачі про підсилення контурів отворів у ізотропних чи анізотропних пластинках замкненими пружними ребрами достатньо опрацьовані в науковій літературі [1-3].

Розрахунку згинальних напружень в пластинках з отворами, контури яких підсилені розімкненими пружними ребрами, присвячені роботи [4-6]. Моделюючи підсилювальне ребро пружною лінією, наділеною жорсткістю на згин і кручення, математичні моделі таких задач

побудовано у вигляді систем сингулярних інтегральних рівнянь для визначення контактних моментних напружень на контурі отвору пластинки. Методом механічних квадратур і колокації [6,7] встановлено їх наближені розв'язки.

Задачі про часткове підсилення контуру кругового отвору в пластинці замкненим пружним ребром у науковій літературі розглянуті тільки для узагальненого плоского напруженого стану [7,8]. Для пластинки, що перебуває в умовах циліндричного згину такі задачі не розглядалися.

Пропонується наближений розв'язок задачі про підсилення контуру кругового отвору в нескінченній ізотропній пластинці замкненим пружним ребром за наявності на межі поділу матеріалів міжфазного розрізу за дії зовнішнього згинального навантаження на нескінченності.

Постановка задачі. Нехай контур L кругового отвору одиничного радіуса $R_0=1$ нескінченної ізотропної пластинки товщиною $2h$ підсилено тонким замкненим пружним ребром (кільцем) сталі ширини і товщини. На ділянці $L_1=[\alpha_0, \beta_0]$ вони сполучені між собою, а на решті контуру між ними наявний наскрізний міжфазний розріз. Систему декартових (x, y) і полярних (ρ, λ) координат у спільній серединній площині пластинки і ребра з полюсом в центрі отвору оберемо так, як показано на рис. 1. На нескінченності пластинка згинається рівномірно розподіленими моментами M_1 та M_2 , що діють у напрямках координатних осей. Будемо вважати, що при такому навантаженні береги розрізу не контактують між собою.

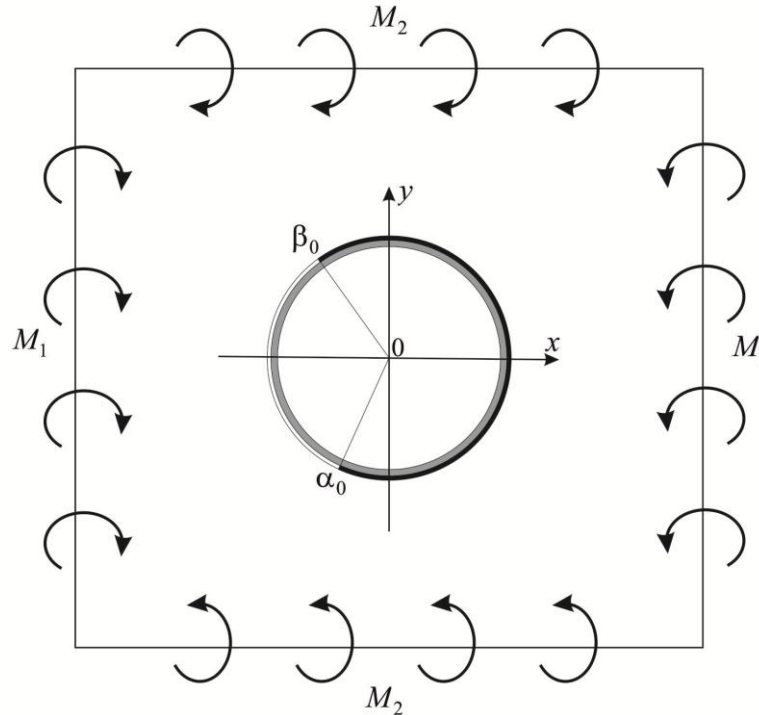


Рис. 1 Розрахункова схема пластинки

Розв'язування задачі полягає у визначенні компонент напружено-деформованого стану на контурі отвору пластинки і в замкненому ребрі.

Викладення основного матеріалу. Умовно відділимо ребро від пластинки, замінивши дію одного тіла на інше невідомими контактними моментами M_ρ і P . У результаті цього приходимо до першої граничної задачі згину для нескінченної пластинки з круговим отвором та пружного кільця.

Пружне кільце перебуває у рівновазі внаслідок дії на нього контактних моментів, прикладених з боку пластинки. Оскільки задача розрахунку напружено-деформованого стану замкненого кільця статично невизначена, умовно розріжемо його площиною $\lambda = \lambda_0$ і до кожного з торців перерізу прикладемо крутний L_λ^0 і згинальний L_ρ^0 моменти (рис.2). Внаслідок цього одержимо статично визначене розімкнене кільце, що перебуває у рівновазі під дією контактних моментів і торцевого навантаження.

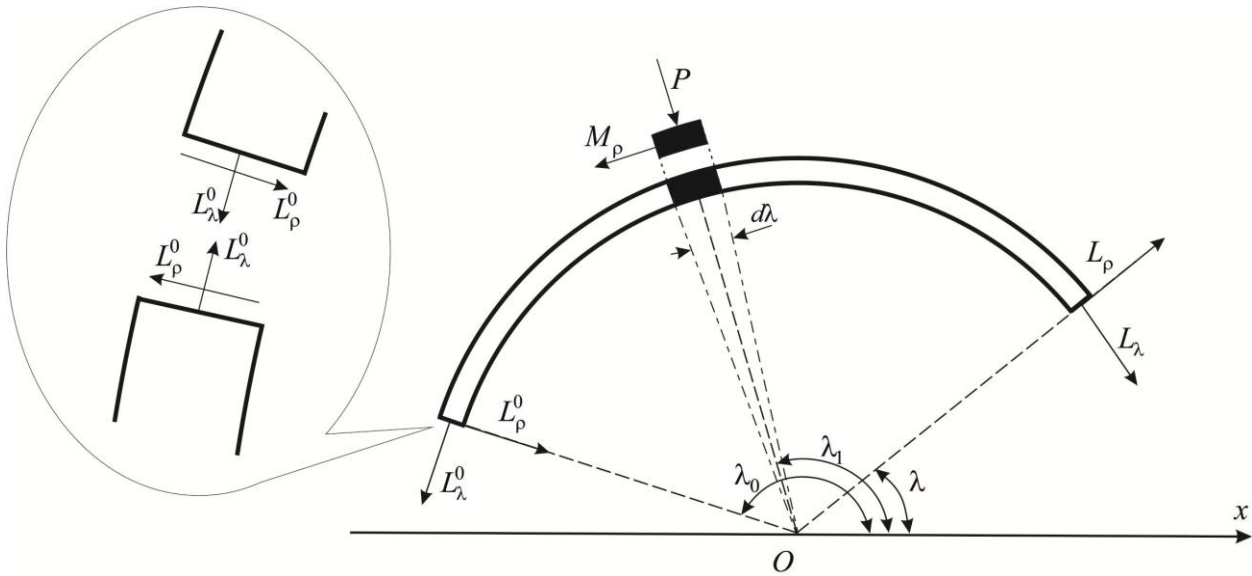


Рис. 2. Розрахункова схема частини розікненого кільця.

Напружено-деформований стан розікненого кільця (рис.2.), яке моделюється пружною лінією, наділеною жорсткостями на згин g_1 і кручення g_2 , визначають[1]:

- умови рівноваги частини кільця між перерізами $\lambda = \lambda_0$ і $\lambda = \lambda$

$$L_\rho - iL_\lambda = -i \int_{\lambda}^{\lambda_0} (M_\rho + iP) e^{i(t-\lambda)} dt + (L_\rho^0 - iL_\lambda^0) e^{i(\lambda_0-\lambda)}, \quad (1)$$

де L_ρ і L_λ - згинальний і крутний моменти в перерізі $\lambda = \lambda$;

- співвідношення Кірхгофа між внутрішніми моментами і відповідними деформаціями

$$L_\rho = -X^c g_1, L_\lambda = -Y^c g_2. \quad (2)$$

Тут X^c, Y^c - деформації кривини і кручення осі кільця, які з урахуванням (1) можна подати такими залежностями [5]

$$X^c = -\frac{1}{g_1} [f_1(\lambda) \cos \lambda + f_2(\lambda) \sin \lambda + L_x \cos \lambda + L_y \sin \lambda]; \quad (3)$$

$$Y^c = \frac{1}{g_2} [f_2(\lambda) \cos \lambda - f_1(\lambda) \sin \lambda + L_y \cos \lambda - L_x \sin \lambda],$$

де введено позначення

$$f_1 + if_2 = i \int_{\alpha_0}^{\lambda} (M_\rho + iP) e^{it} dt; L_x + iL_y = (L_\rho^0 - iL_\lambda^0) e^{i\lambda_0};$$

- умови рівноваги замкнутого кільця як жорсткого цілого

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} (M_\rho + iP) e^{it} dt = 0,$$

які еквівалентні співвідношенням

$$f_1(\alpha_0) = f_2(\alpha_0) = f_1(\beta_0) = f_2(\beta_0) = 0. \quad (4)$$

Нескінченна пластинка перебуває у рівновазі під дією зовнішнього моментного навантаження та контактних моментів, що передаються до контуру L з боку підсилювального ребра. Відповідні цьому навантаженню деформації кривини X і кручення Y контуру L визначаються за формулами [4,5]

$$X = \frac{k}{3+\nu} \left[(1+\nu)M_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi_\gamma} \int_\gamma M_\rho(t) dt - \frac{1}{\pi_\gamma} \int_\gamma P(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + X_0 \right]; \quad (5)$$

$$Y = -\frac{k}{3+\nu} \left[(1+\nu)P(\lambda) + \frac{1}{\pi_\gamma} \int_\gamma P(t) dt + \frac{1}{\pi_\gamma} \int_\gamma M_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + Y_0 \right],$$

в яких введено позначення

$$X_0 = -2(M_2 - M_1) \cos 2\lambda - \frac{3+\nu}{1+\nu} (M_1 + M_2); \quad Y_0(\lambda) = 2(M_2 - M_1) \sin 2\lambda + \tilde{C}_1 [3+\nu];$$

$k = \frac{1}{D(1-\nu)}$; $D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластинки на згин; E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки; \tilde{C}_1 – дійсна стала, для визначення якої слугує умова однозначності прогину пластинки [9].

Кільцеві M_λ і крутні $H_{\rho i}$ моменти на контурі L визначаються за формулами [5]

$$M_\lambda = \nu M_\rho - \frac{1+\nu}{k} X, \quad H_{\rho i} = -\frac{Y}{k}. \quad (6)$$

Крайові умови задачі формулюємо у вигляді рівності деформації на межі сполучення пластинки і підсилювального ребра

$$X^c = X; \quad Y^c = Y; \quad \lambda \in [\alpha_0, \beta_0]. \quad (7)$$

Підставляючи у них вирази (3), (5) отримаємо систему двох сингулярних інтегральних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення контактних моментів M_ρ і P

$$f_1(\lambda) \cos \lambda + f_2(\lambda) \sin \lambda + \frac{g_1 k}{3+\nu} \left[(1+\nu)M_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi_{\alpha_0}} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} M_\rho(t) dt - \frac{1}{\pi_{\alpha_0}} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} P(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + X_0 \right] + L_x \cos \lambda + L_y \sin \lambda = 0; \quad (8)$$

$$f_2(\lambda) \cos \lambda - f_1(\lambda) \sin \lambda + \frac{g_2 k}{3+\nu} \left[(1+\nu)P(\lambda) + \frac{1}{\pi_{\alpha_0}} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} P(t) dt + \frac{1}{\pi_{\alpha_0}} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} M_\rho(t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} dt + Y_0 \right] + L_y \cos \lambda - L_x \sin \lambda = 0.$$

Цю систему доповнюємо умовами зв'язку між функціями $M_\rho(\lambda)$, $P(\lambda)$ та $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$

$$f_1'(\lambda) = -M_\rho(\lambda) \sin \lambda - P(\lambda) \cos \lambda; \quad f_2'(\lambda) = M_\rho(\lambda) \cos \lambda - P(\lambda) \sin \lambda, \quad (9)$$

умовою однозначності прогину пластинки [9]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_0}^{\beta_0} P(t) dt + \tilde{C}_1 = 0, \quad (10)$$

та умовою однозначності кутів повороту поперечних перерізів ребра [1]

$$\oint_L \left(\frac{L_\lambda}{g_2} - i \frac{L_\rho}{g_1} \right) e^{i\lambda} d\lambda = 0, \quad (11)$$

яку з урахуванням (1), (3) можна перетворити до вигляду

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} [-f_1(t)I_1(t) + f_2(t)I_2(t)] dt - L_x \int_{-\pi}^{\pi} I_1(t) dt + L_y \int_{-\pi}^{\pi} I_2(t) dt = 0;$$

(12)

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} [f_1(t)I_3(t) - f_2(t)I_4(t)]dt + L_x \int_{-\pi}^{\pi} I_3(t)dt - L_y \int_{-\pi}^{\pi} I_4(t)dt = 0.$$

Тут

$$I_1(\lambda) = \left(\frac{g_2}{g_1} - 1 \right) \cos \lambda \sin \lambda; \quad I_2(\lambda) = - \left(\frac{g_2}{g_1} \sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda \right);$$

$$I_3(\lambda) = \frac{g_2}{g_1} \cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda; \quad I_4(\lambda) = \left(1 - \frac{g_2}{g_1} \right) \cos \lambda \sin \lambda.$$

Співвідношення (8)-(12) визначають математичну модель поставленої задачі і слугують для визначення функцій $M_\rho(\lambda)$, $P(\lambda)$, $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ та сталих L_λ^0 , L_ρ^0 , \tilde{C}_1 . Якщо ці величини стануть відомі, то кільцеві M_λ і крутні $H_{\rho\lambda}$ моменти на контурі отвору пластинки визначаються за формулами (6), а згинальні L_ρ і крутні L_λ моменти в ребрі – зі співвідношень (1).

Результати числового розрахунку. Точний розв’язок системи (8)-(12) знайти не вдається. Для її наближеного розв’язання необхідно встановити структуру шуканих функцій на кінцях ділянки сполучення пластинки і ребра.

Відповідно до (4) функції $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ на ділянці $\lambda \in [\alpha_0, \beta_0]$ обмежені і неперервні, а на її кінцях дорівнюють нулю. Структуру контактних моментів визначає характеристична частина системи (8). В роботі [10] показано, що в задачах часткового підсилення контурів криволінійних отворів в пластинках, які перебувають в умовах циліндричного згину, контактні моменти мають кореневу особливість, на яку накладається локальна осциляція.

Нехтуючи впливом осциляції, наближений розв’язок задачі можна побудувати методом механічних квадратур і колокації [5,6,7].

Результати числового розрахунку моментних напружень на межі поділу матеріалів пластинки і ребра при $M_2 \neq 0$, $M_1 = 0$ наведені на рис. 3 - 5. Всі розрахунки проведені при $h_0/h = 4/3$, $b_0/R_0 = 1/5$, $b_0/h_0 = 1/2$, $\alpha_0 = -120^\circ$, $\beta_0 = 120^\circ$. Суцільні лінії побудовані для випадку $-\frac{E_1}{E} = 1$, пунктирні $-\frac{E_1}{E} = 5$, штрихпунктирні $-\frac{E_1}{E} = 10$, штрихові $-\frac{E_1}{E} = 20$ (E_1 - модуль Юнга матеріалу ребра).

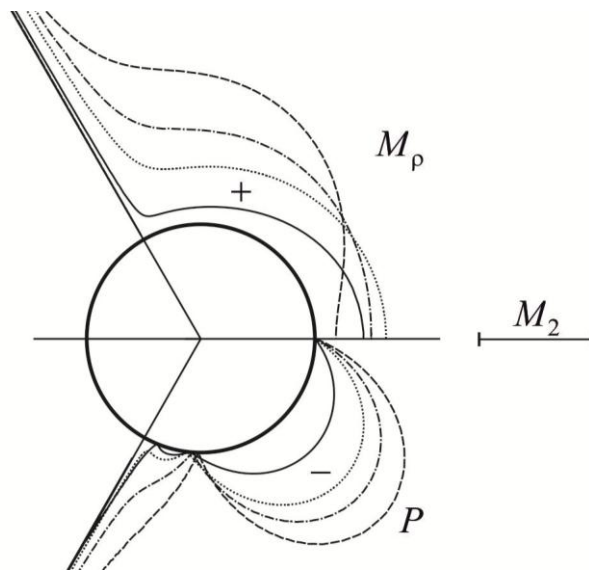


Рис. 3. Розподіл контактних моментів на контурі отвору пластинки

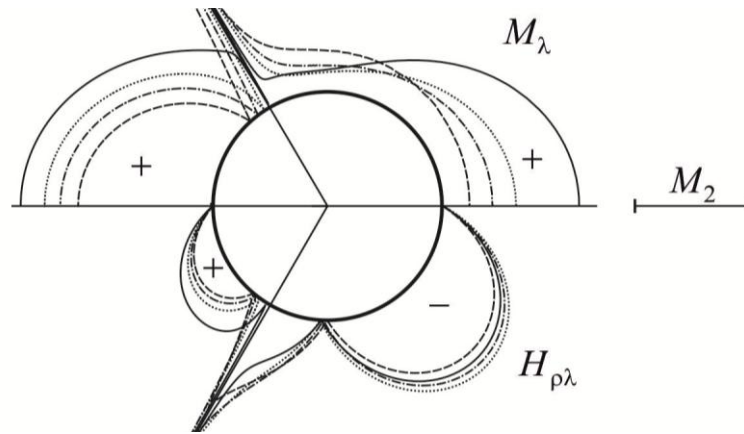


Рис. 4. Розподіл кільцевих і крутних моментів на контурі отвору пластинки

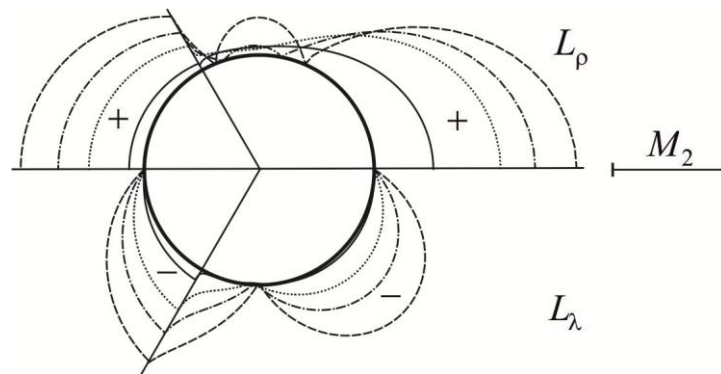


Рис. 5. Розподіл згинальних і крутних моментів у підсилювальному ребрі

Висновки. У результаті проведених числових розрахунків встановлено:

- збільшення відносної жорсткості замкнутого ребра призводить до збільшення згинального L_ρ і крутного L_λ моментів. Така ж залежність спостерігається і для контактних моментів на контурі отвору;
- кільцеві моменти при збільшенні відносної жорсткості ребра зменшуються;
- крутні моменти в пластинці практично не залежать від відносної жорсткості ребра;
- в околі торців розрізу всі моменти в пластинці набувають необмежених значень, а в ребрі залишаються обмеженими.

Список використаних джерел:

1. Савин Г. Н. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости / Г. Н. Савин, Н. П. Флейшман. – К.: Наук. думка, 1964. – 384 с.
2. Шереметьев, М.П. Пластинки с подкрепленным краем/ М.П. Шереметьев. – Львов: Изд-во Львов. ун-та, 1960. – 258 с.
3. Пелех Б. Л. Концентрация напряжений возле отверстий в анизотропных оболочках, податливых на сдвиг/ Б.Л. Пелех, А.А. Сяський. – К.: Наукова думка, 1975. – 198 с.
4. Сяський А. Основні інтегральні співвідношення в технічній теорії згину пластин з отворами/ А. Сяський, С. Гаврюсев // Вісник Тернопільського державного технічного університету. 2006. – Т. 11, №1. – С.12–17.
5. Сяський А. А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием/ А. А. Сяський // Прикл. математика и механика. – 1986. Т. 50, №2. – С. 247– 254.
6. Сяський А. Напружений стан пластинки з частково підсиленим криволінійним контуром при її циліндричному згині /А. Сяський, В. Кот // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2011. – Т.16, №2. – с.30–36.

7. Сяський А.О. Міжфазний розріз в ортотропній пластинці з підсиленням круговим контуром / А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, О.Ю. Дейнека // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – Хмельницький : ХНУ, 2018. – № 5. – С. 176–181.

8. Сяський А. Міжфазна тріщина в нескінченній ізотропній пластинці з підкріпленням круговим отвором/ А. Сяський, Н. Шевцова, Ю. Дейнека // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування : збірник наукових праць. Технічні науки. – Рівне, 2017. – Вип. 4 (80). – С. 168–177.

9. Бережницький Л. Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин / Л. Т. Бережницький М.В. Делявский В.В. Панасюк. – Киев: Наукова думка, 1979. – 400с.

10. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мухелишвили. – М. : Наука, 1966. – 708 с.

Рецензенти:

Гаврилюк Володимир Іванович, доцент кафедри інформаційних систем та обчислювальних методів Міжнародного економіко-гуманітарного університету імені академіка Степана Дем'янчука, кандидат технічних наук.

Шинкарчук Назар Володимирович, доцент кафедри інформаційно-комунікаційних технологій та методики викладання інформатики Рівненського державного гуманітарного університету, кандидат технічних наук, доцент.

Стаття надійшла до редакції 08.10.2019