УДК 621.647.23 DOI 10.36910/6775.24153966.2019.68.5

С.Б. Ковальчук

Полтавська державна аграрна академія, Полтава, Україна

ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ КОМПОЗИТНОГО БРУСА ІЗ ПЛОСКОЮ ВІССЮ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ У ПРИРОДНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

У роботі отримано скалярну форму рівняння теплопровідності, граничних умов різного типу та умов спряження фаз для зв'язаної динамічної задачі термопружного деформування композитного дискретно-неоднорідного бруса із криволінійною плоскою віссю та постійною по довжині структурною будовою. Рівняння та умови виведені у природній, для будови бруса, криволінійній циліндричній системі координат, що робить отримані залежності інваріантними до форми осі бруса. Отримані залежності можуть бути використані для розв'язання широкого кола прикладних задач термопружного деформування композитних стержньових елементів.

Ключові слова: *криволінійний брус; криволінійна плоска вісь; природна система координат; температурне поле; тепловий потік; термопружне деформування.*

Форм. 50. Рис. 1. Літ. 21

С.Б. Ковальчук

ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КОМПОЗИТНОГО БРУСА С ПЛОСКОЙ ОСЬЮ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ В ЕСТЕСТВЕННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В работе получено скалярную форму уравнения теплопроводности, граничных условий разного типа и условий сопряжения фаз для связанной динамической задачи термоупругого деформирования композитного дискретно-неоднородного бруса с криволинейной плоской осью и постоянным по длине структурным строением. Уравнения и условия выведены в естественной для строения бруса, криволинейной цилиндрической системе координат, что делает полученные зависимости инвариантными по форме оси бруса. Полученные зависимости могут быть использованы для решения широкого круга прикладных задач термоупругого деформирования композитных стержневых элементов.

Ключевые слова: *криволинейный брус; криволинейная плоская ось; естественная система координат; температурное поле; тепловой поток; термоупругое деформирование.*

S. Kovalchuk

PROBLEM OF THERMOELASTICITY OF THE COMPOSITE BAR WITH A PLAIN AXIS OF AN ARBITRARY SHAPE IN THE NATURAL COORDINATE SYSTEM

Heterogeneity of the structure of composite construction elements leads to temperature deformations and strains within them, even when staying in a stationary uniform temperature field. Therefore, for such elements, it is necessary to take into account changes in a temperature field while in operation when predicting their strength and rigidity. Among the scientific papers devoted to the problems of thermal elasticity of composite elements, multilayer plates and shells and rectilinear bars are predominantly considered. At the same time, thermal elasticity of composite rod elements with a curvilinear axis remains a poorly studied problem of applied mathematics and mechanics. In this paper, we obtained equations and formed boundary conditions of different types for the coupled thermal conductivity problem of the curvilinear composite bar with invariable length structure in its natural coordinate system. The equations describe the process of propagation of a temperature field taking into account a deformation field inside a discrete-inhomogeneous composite bar consisting of homogeneous or continuous-inhomogeneous phases with curvilinear orthotropy of thermophysical and elastic characteristics and containing internal sources of heat. On the basis of the accepted general initial data on the shape of outer bar surfaces and internal bar structure, the boundary conditions of three types are obtained in the natural coordinate system and the conditions of heat transfer at the boundary of phases in case of their ideal thermal contact and in the presence of contact thermal resistance are made out. The obtained equations, along with the system of elasticity theory equations in the natural coordinate system, integral and differential dependences for internal force factors and relations for modeling loads of various types developed in previous papers, represent the necessary analytical basis for solving a wide range of problems as to thermoelastic deformation of composite bars with a plain axis of an arbitrary shape.

Keywords: *curvilinear bar; curvilinear flat axis; natural coordinate system; temperature field; heat flow; thermoelastic deformation.*

Постановка проблеми. Створення конструкційних елементів зі структурно-неоднорідною композитною будовою є ефективним прийомом у сучасному проектуванні, який дозволяє підвищити питомі показники їх міцності та жорсткості, а також надати проектованим елементам непритаманних, традиційним конструкційним матеріалам, властивостей [1]. Однак, через наявність у будові композитного бруса різнорідних фаз матеріалу, які, у загальному випадку, мають різні фізико-механічні властивості, навіть стаціонарне рівномірне температурне поле неминуче викликатиме появу певного поля температурних деформацій і відповідного поля напружень [2]. У композитних елементах, утворених поєднанням матеріалів зі значною різницею коефіцієнтів лінійного температурного розширення, пружних характеристик та характеристик міцності це може викликати появу небезпечного напружено-деформованого стану навіть за відсутності зовнішніх силових впливів. Одночасна дія нерівномірного температурного поля та силових навантажень ще більш небезпечна для композитних елементів і потребує обов'язкового дослідження у ході прогнозування їх міцності та жорсткості.

Серед наукових робіт присвячених задачам термопружності композитних елементів у переважній більшості розглядаються багатошарові плити і оболонки [3-8]. Термопружному деформуванню композитних стержнів та брусів присвячено значно менше робіт, наприклад [2, 9-11], причому отримані у них розв'язки стосуються елементів із прямолінійною віссю. Водночас, термопружність композитних стержньових елементів із криволінійною віссю, залишається мало дослідженою проблемою прикладної математики та механіки, що створює перешкоди проектуванню ефективних інженерних конструкцій і вказує на необхідність розробки загальної теорії деформування криволінійних брусів різної будови.

Для криволінійного композитного бруса дискретно-неоднорідної будови із плоскою віссю довільної форми авторами у [12] отримані рівняння теорії пружності у природній системі координат [13, 14], у [15] побудовані залежності для внутрішніх силових факторів, а у [16, 17] – співвідношення для моделювання зосереджених та розподілених навантажень. Разом, дані рівняння та залежності складають теоретичну основу для розв'язання задач деформування криволінійних брусів із плоскою віссю довільної форми. Зважаючи на важливість проблеми прогнозування термічних деформацій та напружень у композитних стержньових елементах, актуальним є доповнення зазначеної теоретичної бази для можливості охоплення широкого кола задач термопружного деформування таких елементів.

Мета статті: отримати рівняння та сформулювати крайові умови зв'язаної задачі теплопровідності для криволінійного дискретно-неоднорідного бруса із незмінною по довжині структурою, у природній системі координат, для можливості розгляду задач термопружного деформування таких елементів конструкцій.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо криволінійний композитний брус, утворений дискретними однозв'язними або багатозв'язними фазами $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots, \mathrm{P}_k, \ldots, \mathrm{P}_m$, що виконані із різнорідних матеріалів (рис. 1).

Поперечний переріз бруса має незмінну форму та структурну будову вздовж його осі g_C, яка є плоскою шматково-гладкою кривою, що належить площині симетрії $\mathrm{A} \equiv XOZ$.

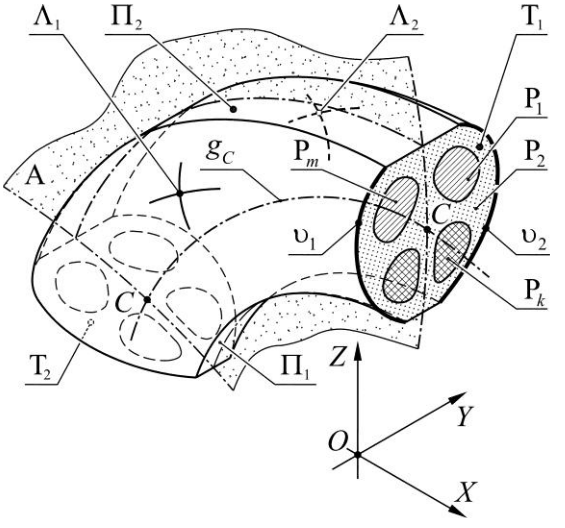

Рис. 1. **Схема дискретно-неоднорідного бруса з криволінійною плоскою віссю [12]**

Зовнішню поверхню бруса складають бічні криволінійні поверхні Λ_ς ($\varsigma = 1,2$) (рис. 1), із твірними υ_ς, поздовжні циліндричні поверхні $\Pi_\varsigma \perp \mathrm{A}$ та торцеві поверхні $\mathrm{T}_\varsigma \perp \mathrm{A}$.

У [13] для описання геометрії і будови криволінійного бруса запропоновано природну систему, у якій усі поздовжні волокна бруса та центральна вісь g_C належать однопараметричному сімейству координатних циліндричних поверхонь Π_ξ^g ($\Pi_\varsigma \in \Pi_\xi^g$), а поперечні перерізи – однопараметричному сімейству координатних поверхонь T_η^f ($\mathrm{T}_\varsigma \in \mathrm{T}_\eta^f$).

Координати точки, скалярні функції і їх перші похідні та компоненти вектора у прямокутній XYZ та природній $\mathrm{H}\Xi Y$ системах пов'язані, відповідно, залежностями

$$x = \omega_x(\eta, \xi), \qquad z = \omega_z(\eta, \xi), \tag{1}$$

$$\varphi = \varphi(x, y, z) = \varphi\big(\omega_x(\eta, \xi), y, \omega_z(\eta, \xi)\big), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \omega_x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{|\mathbf{J}|}\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \frac{\partial \omega_z}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{|\mathbf{J}|}\left(-\frac{\partial \omega_x}{\partial \xi}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{\partial \omega_x}{\partial \eta}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right), \tag{3}$$

$$V_x = \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\right)\frac{V_\xi - \kappa V_\eta}{\sqrt{1+\kappa^2}}, \qquad V_y = V_y, \qquad V_z = \operatorname{sgn}\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\right)\frac{V_\eta + \kappa V_\xi}{\sqrt{1+\kappa^2}}, \tag{4}$$

де η, ξ – довільні дійсні сталі (криволінійні координати); $|\mathbf{J}|$ – Якобіан системи ортогональних сімейств кривих:

$$\begin{cases} g_\xi(x,z,\xi)=0, & g_\xi \equiv \Pi_\xi^g \cap XOZ; \\ f_\eta(x,z,\eta)=0, & f_\eta \equiv \mathrm{T}_\eta^f \cap XOZ. \end{cases}$$

Параметри, що характеризують природну систему координат

$$\kappa = \frac{\partial\omega_z}{\partial\xi}\bigg/\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi} = -\frac{\partial\omega_x}{\partial\eta}\bigg/\frac{\partial\omega_z}{\partial\eta} = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \lambda = -\frac{\partial\omega_z}{\partial\xi}\bigg/\frac{\partial\omega_x}{\partial\eta} = \frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\bigg/\frac{\partial\omega_z}{\partial\eta}, \tag{5}$$

$$L_\eta^* = \operatorname{sgn}(\partial\omega_z/\partial\eta)L_\eta, \qquad L_\xi^* = \operatorname{sgn}(\partial\omega_x/\partial\xi)L_\xi, \tag{6}$$

$$|\mathbf{J}| = -L_\xi^* L_\eta^*. \tag{7}$$

де α – кут між бінормаллю кривої сімейства g_ξ та віссю OX; L_η, L_ξ – коефіцієнти Ламе:

$$L_\eta = \sqrt{1+\kappa^2}\,|\partial\omega_z/\partial\eta|, \qquad L_\xi = \sqrt{1+\kappa^2}\,|\partial\omega_x/\partial\xi|. \tag{8}$$

У загальному випадку вважатимемо, що фази бруса виготовлені із циліндрично-ортотропних матеріалів, для яких у довільній точці $K(\eta,\xi,y) \equiv \mathrm{Y}_y \cap \Pi_\xi^g \cap \mathrm{T}_\eta^f$ одна із площин симетрії фізико-механічних властивостей співпадає з Y_y, а дві інші ортогональні Π_ξ^g і T_η^f, відповідно.

Отримаємо рівняння теплопровідності та відповідні крайові умови для описаного композитного бруса у його природній системі координат.

Рівняння теплопровідності зв'язаної динамічної задачі термопружності у природній системі координат. Слідуючи виводу рівняння теплопровідності для пружного тіла запропонованому у [18], для суцільного неоднорідного твердого тіла з ортотропією фізико-механічних властивостей рівняння теплопровідності можна записати у такому вигляді

$$\mu^\rho\mu^c\frac{\partial T}{\partial\tau} = -\operatorname{div}\vec{\mathbf{q}} + F + \left[T\left(\mu_{11}^\beta\frac{\partial\varepsilon_{11}}{\partial\tau} + \mu_{22}^\beta\frac{\partial\varepsilon_{22}}{\partial\tau} + \mu_{33}^\beta\frac{\partial\varepsilon_{33}}{\partial\tau}\right)\right], \tag{9}$$

де $\mu^\rho = \mu^\rho(K)$, $\mu^c = \mu^c(T,K)$ – функції розподілу густини та питомої теплоємності; $T = T(K,\tau)$ – просторово-часова функція розподілу температури в межах тіла; $\vec{\mathbf{q}} = \vec{\mathbf{q}}(K,\tau)$ – вектор-функція щільності теплового потоку; $F = F(K,\tau)$ – розподіл інтенсивності джерел тепла всередині тіла; $\mu_{ij}^\beta = \mu_{ij}^\beta(K)$ – просторові функції розподілу коефіцієнтів температурних напружень; $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(K,\tau)$ – компоненти тензору деформацій у обраній ортогональній системі координат.

Рівняння теплопровідності у формі (9) не прив'язане до певної системи координат, що дозволяє використати його без змін для отримання скалярної форми рівняння теплопровідності у природній системі координат розглядуваного композитного бруса.

Для цього перейдемо у (9) до криволінійних координат точки, однак вектор щільності теплового потоку $\vec{\mathbf{q}}$ спочатку розкладемо у допоміжній прямокутній системі координат XYZ:

$$\mu^\rho\mu^c\frac{\partial T}{\partial\tau} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + F + T\left(\mu_\eta^\beta\frac{\partial\varepsilon_\eta}{\partial\tau} + \mu_\xi^\beta\frac{\partial\varepsilon_\xi}{\partial\tau} + \mu_y^\beta\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial\tau}\right), \tag{10}$$

де q_x, q_y, q_z – компоненти вектора щільності теплового потоку у системі XYZ.

Застосувавши до рівняння (10) залежності між похідними функцій у прямокутній та природній системах координат (3), з послідовним урахуванням (7), (6) та (5), отримаємо

$$\mu^\rho\mu^c\frac{\partial T}{\partial\tau} = \frac{\kappa\dfrac{\partial q_x}{\partial\eta} - \dfrac{\partial q_z}{\partial\eta}}{\dfrac{\partial\omega_z}{\partial\eta}\left(1+\kappa^2\right)} - \frac{\dfrac{\partial q_x}{\partial\xi} + \kappa\dfrac{\partial q_z}{\partial\xi}}{\dfrac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\left(1+\kappa^2\right)} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + F + T\left(\mu_\eta^\beta\frac{\partial\varepsilon_\eta}{\partial\tau} + \mu_\xi^\beta\frac{\partial\varepsilon_\xi}{\partial\tau} + \mu_y^\beta\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial\tau}\right). \tag{11}$$

Диференціюючи співвідношення (4) отримаємо зв'язок між похідними компонент вектора $\vec{\mathbf{q}}$ у прямокутній просторовій та природній циліндричній системах координат

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial q_x}{\partial \chi}=\frac{\operatorname{sgn}\left(\partial\omega_x/\partial\xi\right)}{\sqrt{1+\kappa^2}}\left(\frac{\partial q_\xi}{\partial\chi}-\kappa\frac{\partial q_\eta}{\partial\chi}-\frac{\partial\kappa}{\partial\chi}\frac{q_\eta+\kappa q_\xi}{1+\kappa^2}\right)-2\frac{\partial^2\omega_x}{\partial\xi\partial\chi}\frac{\kappa q_\eta-q_\xi}{\sqrt{1+\kappa^2}}\Delta\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\right),\\
&\frac{\partial q_z}{\partial \chi}=\frac{\operatorname{sgn}\left(\partial\omega_x/\partial\xi\right)}{\sqrt{1+\kappa^2}}\left(\frac{\partial q_\eta}{\partial\chi}+\kappa\frac{\partial q_\xi}{\partial\chi}-\frac{\partial\kappa}{\partial\chi}\frac{\kappa q_\eta-q_\xi}{1+\kappa^2}\right)+2\frac{\partial^2\omega_x}{\partial\xi\partial\chi}\frac{q_\eta+\kappa q_\xi}{\sqrt{1+\kappa^2}}\Delta\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\right),
\end{aligned}\tag{12}$$

де $\chi=\eta,\xi$; $\Delta\left(f\left(\eta,\xi\right)\right)$ – дельта-функція Дірака.

Підставивши (12) до (11) і виконавши перетворення із урахуванням (5)-(8), отримаємо рівняння позбавлене прив’язки до прямокутної системи координат

$$\begin{aligned}
\mu^\rho\mu^c\frac{\partial T}{\partial\tau}=&-\frac{\lambda}{L_\xi}\frac{\partial q_\eta}{\partial\eta}+\frac{1}{L_\xi}\frac{q_\eta}{1+\kappa^2}\frac{\partial\kappa}{\partial\xi}-\frac{1}{L_\xi}\frac{\partial q_\xi}{\partial\xi}-\frac{1}{L_\xi}\frac{\lambda q_\xi}{1+\kappa^2}\frac{\partial\kappa}{\partial\eta}-\frac{\partial q_y}{\partial y}+F-\\
&-2\left(\frac{\partial^2\omega_x}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\lambda q_\eta}{L_\xi}+\frac{\partial^2\omega_x}{\partial\xi^2}\frac{q_\xi}{L_\xi}\right)\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\right)\Delta\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\right)+T\left(\mu_\eta^\beta\frac{\partial\varepsilon_\eta}{\partial\tau}+\mu_\xi^\beta\frac{\partial\varepsilon_\xi}{\partial\tau}+\mu_y^\beta\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial\tau}\right).
\end{aligned}\tag{13}$$

За формальним визначенням функцій $\operatorname{sgn}\left(f\left(\eta,\xi\right)\right)$ і $\Delta\left(f\left(\eta,\xi\right)\right)$, їх добуток: $\operatorname{sgn}\left(f\left(\eta,\xi\right)\right)\Delta\left(f\left(\eta,\xi\right)\right)\equiv 0\ \forall f\left(\eta,\xi\right)\in\left(-\infty,+\infty\right)$. Тоді рівняння (13) набуде наступного вигляду

$$\mu^\rho\mu^c\frac{\partial T}{\partial\tau}=-\frac{\lambda}{L_\xi}\frac{\partial q_\eta}{\partial\eta}-\frac{1}{L_\xi}\frac{\partial q_\xi}{\partial\xi}+\frac{\frac{\partial\kappa}{\partial\xi}\frac{q_\eta}{L_\xi}-\frac{\partial\kappa}{\partial\eta}\frac{\lambda q_\xi}{L_\xi}}{1+\kappa^2}-\frac{\partial q_y}{\partial y}+F+T\left(\mu_\eta^\beta\frac{\partial\varepsilon_\eta}{\partial\tau}+\mu_\xi^\beta\frac{\partial\varepsilon_\xi}{\partial\tau}+\mu_y^\beta\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial\tau}\right).\tag{14}$$

Згідно першого виразу (5), можна записати

$$\frac{\partial\kappa}{\partial\eta}=\left(1+\kappa^2\right)\frac{\partial\alpha}{\partial\eta},\qquad\qquad \frac{\partial\kappa}{\partial\xi}=\left(1+\kappa^2\right)\frac{\partial\alpha}{\partial\xi},\tag{15}$$

що дозволяє надати рівнянню (14) такий вигляд

$$\mu^\rho\mu^c\frac{\partial T}{\partial\tau}=-\frac{1}{L_\xi}\left(\lambda\frac{\partial q_\eta}{\partial\eta}-\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}q_\eta+\frac{\partial q_\xi}{\partial\xi}+\lambda\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}q_\xi\right)-\frac{\partial q_y}{\partial y}+F+T\left(\mu_\eta^\beta\frac{\partial\varepsilon_\eta}{\partial\tau}+\mu_\xi^\beta\frac{\partial\varepsilon_\xi}{\partial\tau}+\mu_y^\beta\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial\tau}\right).\tag{16}$$

Для отримання завершеного вигляду рівняння теплопровідності, застосуємо у (16) закон Фурьє, в основу якого покладено допущення, про лінійну залежність компонент вектора щільності теплового потоку від компонент градієнту температурного поля [19].
Градієнт температурного поля у прямокутній системі координат

$$\operatorname{grad}T=\frac{\partial T}{\partial x}\vec{\mathbf{e}}_x+\frac{\partial T}{\partial y}\vec{\mathbf{e}}_y+\frac{\partial T}{\partial z}\vec{\mathbf{e}}_z,\tag{17}$$

де $\vec{\mathbf{e}}_x,\vec{\mathbf{e}}_y,\vec{\mathbf{e}}_z$ – одиничні вектори вздовж осей прямокутної системи XYZ.

Застосувавши (3) і (4) у (17), отримаємо

$$\operatorname{grad}T=\frac{\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\right)}{\left|\mathbf{J}\right|\sqrt{1+\kappa^2}}\left\{\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial\xi}\frac{\partial T}{\partial\eta}-\frac{\partial\omega_z}{\partial\eta}\frac{\partial T}{\partial\xi}\right)\left(\vec{\mathbf{e}}_\xi-\vec{\mathbf{e}}_\eta\kappa\right)-\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial\xi}\frac{\partial T}{\partial\eta}+\frac{\partial\omega_x}{\partial\eta}\frac{\partial T}{\partial\xi}\right)\left(\vec{\mathbf{e}}_\eta+\vec{\mathbf{e}}_\xi\kappa\right)\right\}+\frac{\partial T}{\partial y}\vec{\mathbf{e}}_y,$$

звідки із урахуванням (5)-(8), градієнт температурного поля у природній системі координат бруса:

$$\operatorname{grad}T=\frac{\lambda}{L_\xi}\frac{\partial T}{\partial\eta}\vec{\mathbf{e}}_\eta+\frac{1}{L_\xi}\frac{\partial T}{\partial\xi}\vec{\mathbf{e}}_\xi+\frac{\partial T}{\partial y}\vec{\mathbf{e}}_y,\tag{18}$$

де $\vec{\mathbf{e}}_\eta,\vec{\mathbf{e}}_\xi,\vec{\mathbf{e}}_y$ – одиничні вектори вздовж нормалей до координатних поверхонь природної системи у розглядуваній точці бруса.

Згідно закону Фурьє у довільній точці k-ї ортотропної фази бруса компоненти градієнту температурного поля (18) пов’язані із компонентами $\vec{\mathbf{q}}$ такими залежностями

$$q_\eta^{[k]}=-\lambda_\eta^{[k]}\left(\frac{\lambda}{L_\xi}\frac{\partial T^{[k]}}{\partial\eta}\right),\qquad q_\xi^{[k]}=-\lambda_\xi^{[k]}\left(\frac{1}{L_\xi}\frac{\partial T^{[k]}}{\partial\xi}\right),\qquad q_y^{[k]}=-\lambda_y^{[k]}\frac{dT^{[k]}}{dy},\tag{19}$$

де $\lambda_{\eta,\xi,y}^{[k]}$ – коефіцієнти теплопровідності матеріалу k-ї фази бруса у напрямах нормалей до координатних поверхонь $\mathrm{T}_{\eta}^{f},\Pi_{\xi}^{g},\Upsilon_{y}$, відповідно.

Загальновідомо, що питома теплоємність та коефіцієнти теплопровідності зростають зі збільшенням температури за складними залежностями, які за помірних температур для більшості твердих тіл можуть бути лінеаризовані [18]. Відповідно, для ортотропного матеріалу k-ї фази допустимо

$$c^{[k]}=c_{0}^{[k]}\left(1\pm b^{c[k]}\left(T-T_{0}\right)\right),\qquad \lambda_{a}^{[k]}=\lambda_{0a}^{[k]}\left(1\pm b_{a}^{\lambda[k]}\left(T-T_{0}\right)\right),\ a=\eta,\xi,y, \tag{20}$$

де $c_{0}^{[k]},\lambda_{0a}^{[k]}$ – питома теплоємність та коефіцієнти теплопровідності за початкової температури T_0; $b^{c[k]},b_{a}^{\lambda[k]}$ – дослідні сталі.

Для усього композитного бруса (рис. 1) питома теплоємність та коефіцієнти теплопровідності, як і щільність, будуть кусково-гладкими функціями змінних η,ξ,τ із стрибкоподібною зміною значень на межі фаз

$$\mu^{c}=\mu_{0}^{c}\left(1\pm\mu^{bc}\Delta T\right),\qquad \mu_{a}^{\lambda}=\mu_{0a}^{\lambda}\left(1\pm\mu_{a}^{b\lambda}\Delta T\right),\ a=\eta,\xi,y, \tag{21}$$

де $\Delta T=T-T_{0}$.

У (21) функції μ_{a}^{S} ($\mu^{c},\mu_{0}^{c},\mu^{bc},\mu_{a}^{\lambda},\mu_{0a}^{\lambda},\mu_{a}^{b\lambda}$), аналогічно функціям механічних характеристик у [12], формально можуть бути записані у вигляді

$$\mu_{a}^{S}=\sum_{k=1}^{m}\left(S_{a}^{[k]}p_{k}\right),\ \operatorname{supp}\mu_{a}^{S}=\mathrm{P}, \tag{22}$$

де $p_{k}=p_{k}\left(\xi,y\right)$ – характеристична функція k-ї фази бруса; P – множина усіх точок бруса.

З урахуванням (21), компоненти вектора щільності теплового потоку (19), для усього бруса:

$$q_{\eta}=-\mu_{0\eta}^{\lambda}\left(1\pm\mu_{\eta}^{b\lambda}\Delta T\right)\frac{\lambda}{L_{\xi}}\frac{dT}{d\eta},\quad q_{\xi}=-\mu_{0\xi}^{\lambda}\left(1\pm\mu_{\xi}^{b\lambda}\Delta T\right)\frac{1}{L_{\xi}}\frac{dT}{d\xi},\quad q_{y}=-\mu_{0y}^{\lambda}\left(1\pm\mu_{y}^{b\lambda}\Delta T\right)\frac{dT}{dy}. \tag{23}$$

Підставивши (23) до рівняння (16) отримаємо

$$\begin{aligned}
\mu^{\rho}\mu_{0}^{c}\frac{\partial T}{\partial\tau}=&\frac{\lambda}{L_{\xi}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu_{0\eta}^{\lambda}\frac{\lambda}{L_{\xi}}\frac{dT}{d\eta}\right)-\mu_{0\eta}^{\lambda}\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}\frac{\lambda}{L_{\xi}^{2}}\frac{dT}{d\eta}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{0y}^{\lambda}\frac{dT}{dy}\right)+\\
&+\frac{1}{L_{\xi}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\mu_{0\xi}^{\lambda}}{L_{\xi}}\frac{dT}{d\xi}\right)+\mu_{0\xi}^{\lambda}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\frac{\lambda}{L_{\xi}^{2}}\frac{dT}{d\xi}+F+T_{0}\left(\mu_{\eta}^{\beta}\frac{\partial\varepsilon_{\eta}}{\partial\tau}+\mu_{\xi}^{\beta}\frac{\partial\varepsilon_{\xi}}{\partial\tau}+\mu_{y}^{\beta}\frac{\partial\varepsilon_{y}}{\partial\tau}\right)\pm\\
\pm\Bigg[&-T_{0}\left(\frac{\Delta T}{T_{0}}\right)\mu^{\rho}\mu_{0}^{c}\mu^{bc}\frac{\partial T}{\partial\tau}+\frac{\lambda}{L_{\xi}}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(T_{0}\left(\frac{\Delta T}{T_{0}}\right)\mu_{0\eta}^{\lambda}\mu_{\eta}^{b\lambda}\frac{\lambda}{L_{\xi}}\frac{dT}{d\eta}\right)-T_{0}\left(\frac{\Delta T}{T_{0}}\right)\mu_{0\eta}^{\lambda}\mu_{\eta}^{b\lambda}\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}\frac{\lambda}{L_{\xi}^{2}}\frac{dT}{d\eta}+\\
&+\frac{1}{L_{\xi}}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(T_{0}\left(\frac{\Delta T}{T_{0}}\right)\mu_{0\xi}^{\lambda}\mu_{\xi}^{b\lambda}\frac{1}{L_{\xi}}\frac{dT}{d\xi}\right)+T_{0}\left(\frac{\Delta T}{T_{0}}\right)\mu_{0\xi}^{\lambda}\mu_{\xi}^{b\lambda}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\frac{\lambda}{L_{\xi}^{2}}\frac{dT}{d\xi}+\\
&+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_{0}\left(\frac{\Delta T}{T_{0}}\right)\mu_{0y}^{\lambda}\mu_{y}^{b\lambda}\frac{dT}{dy}\right)\pm T_{0}\left(\frac{\Delta T}{T_{0}}\right)\left(\mu_{\eta}^{\beta}\frac{\partial\varepsilon_{\eta}}{\partial\tau}+\mu_{\xi}^{\beta}\frac{\partial\varepsilon_{\xi}}{\partial\tau}+\mu_{y}^{\beta}\frac{\partial\varepsilon_{y}}{\partial\tau}\right)\Bigg],
\end{aligned} \tag{24}$$

Складова у квадратних дужках рівняння (24) є нелінійною відносно шуканої функції T і робить практично неможливим аналітичне визначення розподілу температурного поля. Тому існуючі аналітичні методи розв'язання задач теплопровідності та термопружності однорідних ізотропних тіл, переважно побудовані на допущенні малого термічного збурення, коли $\Delta T/T_{0}<<1$, якому відповідає лінеаризована, у початковий момент часу $\tau=0$, форма рівняння (24):

$$\mu^{\rho}\mu_0^c \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{L_\xi}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mu_{0\eta}^{\lambda}\frac{\lambda}{L_\xi}\frac{dT}{d\eta}\right) - \mu_{0\eta}^{\lambda}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi}\frac{\lambda}{L_\xi^{\,2}}\frac{dT}{d\eta} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{0y}^{\lambda}\frac{dT}{dy}\right) +$$
$$+\frac{1}{L_\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\mu_{0\xi}^{\lambda}}{L_\xi}\frac{dT}{d\xi}\right) + \mu_{0\xi}^{\lambda}\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}\frac{\lambda}{L_\xi^{\,2}}\frac{dT}{d\xi} + F + T_0\left(\mu_\eta^\beta \frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \tau} + \mu_\xi^\beta \frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \tau} + \mu_y^\beta \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial \tau}\right). \tag{25}$$

Коефіцієнти температурних напружень $\beta_a^{[k]}$, які фігурують у рівнянні (25) можуть бути виражені через технічні термопружні сталі. Розв’язавши фізичні залежності для k-ї ортотропної фази у природній системі координат [12] відносно нормальних напружень, з урахуванням рівностей для ортотропного тіла: $E_\eta^{[k]}\nu_{\xi\eta}^{[k]} = E_\xi^{[k]}\nu_{\eta\xi}^{[k]},\ E_\eta^{[k]}\nu_{y\eta}^{[k]} = E_y^{[k]}\nu_{\eta y}^{[k]},\ E_\xi^{[k]}\nu_{y\xi}^{[k]} = E_y^{[k]}\nu_{\xi y}^{[k]}$, отримаємо

$$\beta_\eta^{[k]} = E_\eta^{[k]}\frac{\left(1-\nu_{\xi y}^{[k]}\nu_{y\xi}^{[k]}\right)\vartheta_\eta^{[k]} + \left(\nu_{\xi\eta}^{[k]} + \nu_{y\eta}^{[k]}\nu_{\xi y}^{[k]}\right)\vartheta_\xi^{[k]} + \left(\nu_{y\eta}^{[k]} + \nu_{\xi\eta}^{[k]}\nu_{y\xi}^{[k]}\right)\vartheta_y^{[k]}}{\nu_{\eta\xi}^{[k]}\nu_{\xi\eta}^{[k]} + \nu_{\xi y}^{[k]}\nu_{y\xi}^{[k]} + \nu_{\eta y}^{[k]}\nu_{y\eta}^{[k]} + 2\nu_{\eta\xi}^{[k]}\nu_{\xi y}^{[k]}\nu_{y\eta}^{[k]} - 1},$$
$$\beta_\xi^{[k]} = E_\xi^{[k]}\frac{\left(\nu_{\eta\xi}^{[k]} + \nu_{y\xi}^{[k]}\nu_{\eta y}^{[k]}\right)\vartheta_\eta^{[k]} + \left(1-\nu_{\eta y}^{[k]}\nu_{y\eta}^{[k]}\right)\vartheta_\xi^{[k]} + \left(\nu_{y\xi}^{[k]} + \nu_{\eta\xi}^{[k]}\nu_{y\eta}^{[k]}\right)\vartheta_y^{[k]}}{\nu_{\eta\xi}^{[k]}\nu_{\xi\eta}^{[k]} + \nu_{\xi y}^{[k]}\nu_{y\xi}^{[k]} + \nu_{\eta y}^{[k]}\nu_{y\eta}^{[k]} + 2\nu_{\eta\xi}^{[k]}\nu_{\xi y}^{[k]}\nu_{y\eta}^{[k]} - 1}, \tag{26}$$
$$\beta_y^{[k]} = E_y^{[k]}\frac{\left(\nu_{\eta y}^{[k]} + \nu_{\xi y}^{[k]}\nu_{\eta\xi}^{[k]}\right)\vartheta_\eta^{[k]} + \left(\nu_{\xi y}^{[k]} + \nu_{\xi\eta}^{[k]}\nu_{\eta y}^{[k]}\right)\vartheta_\xi^{[k]} + \left(1-\nu_{\eta\xi}^{[k]}\nu_{\xi\eta}^{[k]}\right)\vartheta_y^{[k]}}{\nu_{\eta\xi}^{[k]}\nu_{\xi\eta}^{[k]} + \nu_{\xi y}^{[k]}\nu_{y\xi}^{[k]} + \nu_{\eta y}^{[k]}\nu_{y\eta}^{[k]} + 2\nu_{\eta\xi}^{[k]}\nu_{\xi y}^{[k]}\nu_{y\eta}^{[k]} - 1},$$

де $E_\eta^{[k]}, E_\xi^{[k]}, E_y^{[k]}$ – модулі пружності матеріалу k-ї ортотропної фази; $\nu_{\eta\xi}^{[k]},\ldots,\nu_{\xi y}^{[k]}$ – коефіцієнти Пуассона; $\vartheta_\eta^{[k]}, \vartheta_\xi^{[k]}, \vartheta_y^{[k]}$ – коефіцієнти лінійного температурного розширення.

Рівняння (25) разом із рівняннями теорії пружності, отриманими у [12], складають замкнуту систему рівнянь зв’язаної динамічної задачі термопружності [20] для криволінійного композитного бруса із постійною структурою поперечного перерізу у природній системі координат. Розподіл температурного поля T, разом із компонентами НДС, є однією із шуканих функцій даної задачі, яка окрім рівняння (25) має відповідати крайовим умовам задачі, до яких відносяться початковий розподіл температур (у момент часу $\tau = 0$) в усіх точках бруса та граничні умови теплообміну із середовищем на зовнішніх поверхнях бруса [18].

Необхідно зауважити, що у температурних складових лінійних деформацій в [12] для величини зростання температури у точці бруса застосовано позначення T, яке тут необхідно розуміти як ΔT – приріст температури відносно початкової T_0.

Крайові умови задачі теплопровідності для композитного бруса у природній системі координат. Початкові умови задачі теплопровідності передбачають узгодження шуканої функції із початковим розподілом температури у брусі

$$T\,|_{\tau=0} = T_0, \tag{27}$$

де $T_0 = T_0(K),\ K \in \mathrm{P}$ – задана просторова функція розподілу температури всередині бруса.

Граничні умови задачі теплопровідності передбачають узгодження функції T із поверхневими умовами теплообміну бруса з навколишнім середовищем або іншими тілами у кожний момент часу. В аналітичній теорії теплопровідності виділяють граничні умови трьох типів [18]: заданий поверхневий розподіл температури (граничні умови I роду), заданий поверхневий розподіл щільності теплового потоку (граничні умови II роду), заданий закон конвекційного теплообміну із середовищем (граничні умови III роду).

До *граничних умов I роду* відноситься випадок, коли заданий розподіл температури на поверхні тіла. Тоді для торцевих T_ς, поздовжніх циліндричних Π_ς та поздовжніх бічних Λ_ς поверхонь, відповідно маємо:

$$T\,|_{\eta=\eta_\varsigma} = T^{\mathrm{T}_\varsigma}, \qquad T\,|_{\xi=\xi_\varsigma} = T^{\Pi_\varsigma}, \qquad T\,|_{y=\upsilon_\varsigma} = T^{\Lambda_\varsigma}, \varsigma = 1,2, \tag{28}$$

де $T^{\mathrm{T}_\varsigma} = T^{\mathrm{T}_\varsigma}(K,\tau),\ T^{\Pi_\varsigma} = T^{\Pi_\varsigma}(K,\tau),\ T^{\Lambda_\varsigma} = T^{\Lambda_\varsigma}(K,\tau)$ – задані функції.

Граничні умови II роду передбачають відомий розподіл щільності теплового потоку на зовнішній поверхні бруса. На основі співвідношення для теплового потоку через довільно зорієнтовану площадку тіла [19], для довільної точки поверхні Ω бруса у природній системі координат запишемо:

$$q|_{K\in\Omega} = q_\eta|_{K\in\Omega}\, l_\eta^\Omega + q_\xi|_{K\in\Omega}\, n_\xi^\Omega + q_y|_{K\in\Omega}\, m_y^\Omega,$$

звідки, з урахуванням (23) в умовах малого термічного збурення ($\Delta T/T_0 << 1$):

$$\left(-\mu_{0\eta}^\lambda \frac{\lambda}{L_\xi}\frac{dT}{d\eta} l_\eta^\Omega - \mu_{0\xi}^\lambda \frac{1}{L_\xi}\frac{dT}{d\xi} n_\xi^\Omega - \mu_{0y}^\lambda \frac{dT}{dy} m_y^\Omega\right)\Big|_{K\in\Omega} = q^\Omega, \tag{29}$$

де $q^\Omega = q^\Omega(K,\tau)$, $K\in\Omega$ – щільність теплового потоку через поверхню Ω; $l_\eta^\Omega, n_\xi^\Omega, m_y^\Omega$ – косинуси кутів між зовнішньою нормаллю поверхні Ω бруса у точці K та додатнім напрямом нормалей координатних поверхонь.

Відмітимо, на ділянках поверхні Ω, де $q^\Omega > 0$, напрям вектору теплового потоку співпадає із напрямом зовнішньої нормалі і відбувається теплопередача від бруса до середовища, тобто охолодження, відповідно на ділянках Ω, де $q^\Omega < 0$ – відбувається нагрів бруса.

Конкретизуємо граничні умови (29) для поверхонь композитного бруса на рис. 1:

– торцеві циліндричні поверхні T_ς ($l_\eta^{\mathrm{T}_\varsigma} = (-1)^\varsigma$, $n_\xi^{\mathrm{T}_\varsigma} = 0$, $m_y^{\mathrm{T}_\varsigma} = 0$):

$$(-1)^{\varsigma+1}\left(\mu_{0\eta}^\lambda \frac{\lambda}{L_\xi}\frac{dT}{d\eta}\right)\Big|_{\eta=\eta_\varsigma} = q^{\mathrm{T}_\varsigma}(K,\tau),\ K\in\mathrm{T}_\varsigma,\ \varsigma = 1,2; \tag{30}$$

– поздовжні циліндричні поверхні Π_ς ($l_\eta^{\Pi_\varsigma} = 0$, $n_\xi^{\Pi_\varsigma} = (-1)^\varsigma$, $m_y^{\Pi_\varsigma} = 0$):

$$(-1)^{\varsigma+1}\left(\mu_{0\xi}^\lambda \frac{1}{L_\xi}\frac{dT}{d\xi}\right)\Big|_{\xi=\xi_\varsigma} = q^{\Pi_\varsigma}(K,\tau),\ K\in\Pi_\varsigma,\ \varsigma = 1,2; \tag{31}$$

– поздовжні бічні поверхні Λ_ς ($l_\eta^{\Lambda_\varsigma} = 0$):

$$-\left(\mu_{0\xi}^\lambda \frac{1}{L_\xi}\frac{dT}{d\xi}\right)\Big|_{y=\upsilon_\varsigma} n_\xi^{\Lambda_\varsigma} - \left(\mu_{0y}^\lambda \frac{dT}{dy}\right)\Big|_{y=\upsilon_\varsigma} m_y^{\Lambda_\varsigma} = q^{\Lambda_\varsigma}(K,\tau),\ K\in\Lambda_\varsigma,\ \varsigma = 1,2. \tag{32}$$

Для бруса із прямокутним поперечним перерізом, коли бічні поверхні є плоскими і паралельними XOZ : $n_\xi^{\Lambda_\varsigma} = 0$, $m_y^{\Lambda_\varsigma} = (-1)^\varsigma$, і умови (32) спростяться

$$(-1)^{\varsigma+1}\left(\mu_{0y}^\lambda \frac{dT}{dy}\right)\Big|_{y=y_\varsigma} = q^{\Lambda_\varsigma}(K,\tau),\ K\in\Lambda_\varsigma,\ \varsigma = 1,2, \tag{33}$$

де y_ς – координата лівої та правої поздовжніх граней бруса, відповідно.

Граничні умови ІІІ роду можна розглядати як варіант граничних умов ІІ роду із уточненням правої частини згідно заданого механізму конвекційного теплообміну. Згідно закону Ньютона-Ріхмана для довільної поверхні Ω бруса, співвідношення (29) можна переписати так

$$\left(-\mu_{0\eta}^\lambda \frac{\lambda}{L_\xi}\frac{dT}{d\eta} l_\eta^\Omega - \mu_{0\xi}^\lambda \frac{1}{L_\xi}\frac{dT}{d\xi} n_\xi^\Omega - \mu_{0y}^\lambda \frac{dT}{dy} m_y^\Omega\right)\Big|_{K\in\Omega} = \mu_\Omega^\alpha\left(T|_{K\in\Omega} - T_{env}\right), \tag{34}$$

де $\mu_\Omega^\alpha = \mu_\Omega^\alpha(K)$, $K\in\Omega$ – закон зміни коефіцієнта тепловіддачі через неоднорідну поверхню Ω; T_{env} – температура зовнішнього середовища.

Для окремих поверхонь розглядуваного бруса умови (34) спростяться:

– торцеві циліндричні поверхні T_ς ($l_\eta^{\mathrm{T}_\varsigma} = (-1)^\varsigma$, $n_\xi^{\mathrm{T}_\varsigma} = 0$, $m_y^{\mathrm{T}_\varsigma} = 0$):

$$(-1)^{\varsigma+1}\left(\mu_{0\eta}^\lambda \frac{\lambda}{L_\xi}\frac{dT}{d\eta}\right)\Big|_{\eta=\eta_\varsigma} = \mu_{\mathrm{T}\varsigma}^\alpha\left(T|_{\eta=\eta_\varsigma} - T_{env}\right),\ \varsigma = 1,2; \tag{35}$$

– поздовжні циліндричні поверхні Π_ς ($l_\eta^{\Pi_\varsigma} = 0$, $n_\xi^{\Pi_\varsigma} = (-1)^\varsigma$, $m_y^{\Pi_\varsigma} = 0$):

$$(-1)^{\varsigma+1}\left(\mu_{0\xi}^\lambda \frac{1}{L_\xi}\frac{dT}{d\xi}\right)\Big|_{\xi=\xi_\varsigma} = \mu_{\Pi\varsigma}^\alpha\left(T|_{\xi=\xi_\varsigma} - T_{env}\right),\ \varsigma = 1,2; \tag{36}$$

– поздовжні бічні поверхні Λ_ς ($l_\eta^{\Lambda_\varsigma}=0$):

$$-\left(\mu_{0\xi}^{\lambda}\frac{1}{L_\xi}\frac{dT}{d\xi}\right)\Big|_{y=\upsilon_\varsigma} n_\xi^{\Lambda_\varsigma}-\left(\mu_{0y}^{\lambda}\frac{dT}{dy}\right)\Big|_{y=\upsilon_\varsigma} m_y^{\Lambda_\varsigma}=\mu_{\Lambda\varsigma}^{\alpha}\left(T\,|_{\xi=\xi_\varsigma}-T_{env}\right),\ \varsigma=1,2. \qquad (37)$$

Для бруса із прямокутним поперечним перерізом, умови (37) спростяться

$$(-1)^{\varsigma+1}\left(\mu_{0y}^{\lambda}\frac{dT}{dy}\right)\Big|_{y=y_\varsigma}=\mu_{\Lambda\varsigma}^{\alpha}\left(T\,|_{y=y_\varsigma}-T_{env}\right),\ \varsigma=1,2. \qquad (38)$$

Умови теплопередачі на межі фаз композитного бруса. Окрім граничних умов, розв'язок для функції T має відповідати умовам на поверхнях з'єднання фаз всередині композитного дискретно-неоднорідного бруса. У випадку ідеального теплового контакту фаз P_k і P_{k+1} температура та тепловий потік у довільній точці спільної поверхні Ω^{Pk} мають бути однаковими, що з урахуванням (29) дозволяє записати

$$T^{[k]}\,|_{K\in\Omega_k^P}=T^{[k+1]}\,|_{K\in\Omega_k^P},$$

$$\left(\frac{\lambda_{0\eta}^{[k]}\lambda}{L_\xi}\frac{dT^{[k]}}{d\eta}l_\eta^{\Omega k}+\frac{\lambda_{0\xi}^{[k]}}{L_\xi}\frac{dT^{[k]}}{d\xi}n_\xi^{\Omega k}+\lambda_{0y}^{[k]}\frac{dT^{[k]}}{dy}m_y^{\Omega k}\right)\Big|_{K\in\Omega_k^P}= \qquad (39)$$

$$=\left(\lambda_{0\eta}^{[k+1]}\frac{\lambda}{L_\xi}\frac{dT^{[k+1]}}{d\eta}l_\eta^{\Omega k}+\frac{\lambda_{0\xi}^{[k+1]}}{L_\xi}\frac{dT^{[k+1]}}{d\xi}n_\xi^{\Omega k}+\lambda_{0y}^{[k+1]}\frac{dT^{[k+1]}}{dy}m_y^{\Omega k}\right)\Big|_{K\in\Omega_k^P},$$

де $l_\eta^{\Omega k}, n_\xi^{\Omega k}, m_y^{\Omega k}$ – косинуси кутів між зовнішньою нормаллю поверхні Ω_k^P фази бруса у точці K та додатнім напрямом нормалей координатних поверхонь.

У реальних композитних елементах фази основного матеріалу з'єднуються через клейові прошарки, що можуть мати погану теплопровідність і порушувати умови (39). Для вирішення даної проблеми в уточненій постановці клейові прошарки можна розглядати як окремі фази композитного бруса із відповідними теплофізичними та механічними властивостями.

Більш простим для застосування є підхід, за якого такі прошарки розглядаються як опір теплопередачі між фазами композита на граничній поверхні. В такому випадку ґрунтуючись на законі Ньютона-Ріхмана і виходячи із закону збереження енергії, можемо записати

$$\left(\lambda_{0\eta}^{[k]}\frac{\lambda}{L_\xi}\frac{dT^{[k]}}{d\eta}l_\eta^{\Omega k}+\lambda_{0\xi}^{[k]}\frac{1}{L_\xi}\frac{dT^{[k]}}{d\xi}n_\xi^{\Omega k}+\lambda_{0y}^{[k]}\frac{dT^{[k]}}{dy}m_y^{\Omega k}\right)\Big|_{K\in\Omega_k^P}=\frac{1}{R^{[k]}}\left(T^{[k]}-T^{[k+1]}\right)\Big|_{K\in\Omega_k^P},$$

$$\left(\lambda_{0\eta}^{[k]}\frac{\lambda}{L_\xi}\frac{dT^{[k]}}{d\eta}l_\eta^{\Omega k}+\lambda_{0\xi}^{[k]}\frac{1}{L_\xi}\frac{dT^{[k]}}{d\xi}n_\xi^{\Omega k}+\lambda_{0y}^{[k]}\frac{dT^{[k]}}{dy}m_y^{\Omega k}\right)\Big|_{K\in\Omega_k^P}= \qquad (40)$$

$$=\left(\lambda_{0\eta}^{[k+1]}\frac{\lambda}{L_\xi}\frac{dT^{[k+1]}}{d\eta}l_\eta^{\Omega k}+\frac{\lambda_{0\xi}^{[k+1]}}{L_\xi}\frac{dT^{[k+1]}}{d\xi}n_\xi^{\Omega k}+\lambda_{0y}^{[k+1]}\frac{dT^{[k+1]}}{dy}m_y^{\Omega k}\right)\Big|_{K\in\Omega_k^P},$$

де $R^{[k]}$ – контактний опір на поверхні з'єднання фаз P_k і P_{k+1}.

Застосування умов (40) спрощує описання структурної будови композитного бруса, однак вимагає дослідного чи розрахункового визначення величин контактних опорів $R^{[k]}$.

Результати дослідження. Рівняння (25) носить узагальнений характер, однак підстановкою відповідних значень параметрів λ, κ і α та коефіцієнтів Ламе L_η і L_ξ його можна конкретизувати для бруса певної форми, що дозволяє перевірити правильність його виведення.

Наприклад, розглядаючи випадок бруса із прямолінійною віссю для відповідної прямокутної просторової системи координат [12]:

$$\alpha=0,\ \kappa=0,\ \lambda=1,\ L_\xi=1,\ L_\eta=1. \qquad (41)$$

Підстановка (41) до рівняння (25) приводить його до вигляду

$$\mu^\rho\mu^c\frac{\partial T}{\partial\tau}-\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu_{0\eta}^{\lambda}\frac{dT}{d\eta}\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\mu_{0\xi}^{\lambda}\frac{dT}{d\xi}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{0y}^{\lambda}\frac{dT}{dy}\right)=F+T_0\left(\mu_\eta^\beta\frac{\partial\varepsilon_\eta}{\partial\tau}+\mu_\xi^\beta\frac{\partial\varepsilon_\xi}{\partial\tau}+\mu_y^\beta\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial\tau}\right). \qquad (42)$$

Для бруса із круговою віссю, якому відповідає циліндрична кругова система координат [12]:

$$\alpha=\eta,\ \kappa=\operatorname{tg}\eta,\ \lambda=\frac{1}{\xi},\ L_{\xi}=1,\ L_{\eta}=|\xi|. \tag{43}$$

Підставивши (43) до (25) і виконавши перетворення, отримаємо

$$\mu^{\rho}\mu^{c}\frac{\partial T}{\partial\tau}-\frac{1}{\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu_{0\eta}^{\lambda}}{\xi}\frac{dT}{d\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\mu_{0\xi}^{\lambda}\frac{dT}{d\xi}\right)\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{0y}^{\lambda}\frac{dT}{dy}\right)=$$

$$=F+T_0\left(\mu_{\eta}^{\beta}\frac{\partial\varepsilon_{\eta}}{\partial\tau}+\mu_{\xi}^{\beta}\frac{\partial\varepsilon_{\xi}}{\partial\tau}+\mu_{y}^{\beta}\frac{\partial\varepsilon_{y}}{\partial\tau}\right). \tag{44}$$

У випадку однорідного бруса, коли $\mu_{0\eta}^{\lambda},\mu_{0\xi}^{\lambda},\mu_{0y}^{\lambda}=\text{const}$, рівняння (42) та (44) можна легко привести до загальновідомого вигляду, що опосередковано підтверджує правильність перетворень, виконаних у ході отримання рівняння теплопровідності у формі (25).

Для еліптичної системи координат [15], природної для еліптичного бруса, усі поздовжні волокна якого належать однопараметричному сімейству конфокальних еліпсів із фокусною відстанню $2a$:

$$\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\eta}{\operatorname{th}\xi}\right),\ \kappa=\frac{\operatorname{tg}\eta}{\operatorname{th}\xi},\ \lambda=1,\ L_{\eta}=L_{\xi}=a\sqrt{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta}. \tag{45}$$

З урахуванням (45) рівняння теплопровідності (25) набуває такого вигляду:

$$\mu^{\rho}\mu^{c}\frac{\partial T}{\partial\tau}-\frac{1}{\operatorname{sh}^2\xi+\sin^2\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu_{0\eta}^{\lambda}}{a^2}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\mu_{0\xi}^{\lambda}}{a^2}\frac{\partial T}{\partial\xi}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{0y}^{\lambda}\frac{\partial T}{\partial y}\right)=$$

$$=F+T_0\left(\mu_{\eta}^{\beta}\frac{\partial\varepsilon_{\eta}}{\partial\tau}+\mu_{\xi}^{\beta}\frac{\partial\varepsilon_{\xi}}{\partial\tau}+\mu_{y}^{\beta}\frac{\partial\varepsilon_{y}}{\partial\tau}\right). \tag{46}$$

Застосувавши до рівняння (46) вихідні дані використані у [21], де розглянуто задачу визначення температурного поля у ізотропному еліптичному циліндрі, отримаємо аналогічні визначальні рівняння, що також підтверджує правильність (25).

У випадку бруса параболічної форми, природною є параболічна циліндрична система координат, для якої [12]:

$$\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{\xi}{\eta}\right),\ \kappa=\frac{\xi}{\eta},\ \lambda=-1,\ L_{\eta}=L_{\xi}=\sqrt{\eta^2+\xi^2}. \tag{47}$$

Рівняння (25) з урахуванням (46) перетвориться до такого вигляду

$$\mu^{\rho}\mu^{c}\frac{\partial T}{\partial\tau}-\frac{1}{\eta^2+\xi^2}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu_{0\eta}^{\lambda}\frac{dT}{d\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\mu_{0\xi}^{\lambda}\frac{dT}{d\xi}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{0y}^{\lambda}\frac{dT}{dy}\right)=$$

$$=F+T_0\left(\mu_{\eta}^{\beta}\frac{\partial\varepsilon_{\eta}}{\partial\tau}+\mu_{\xi}^{\beta}\frac{\partial\varepsilon_{\xi}}{\partial\tau}+\mu_{y}^{\beta}\frac{\partial\varepsilon_{y}}{\partial\tau}\right). \tag{48}$$

Класичні криволінійні системи координат, окрім прямокутної та кругової, не дають можливості описати геометрію криволінійного бруса із незмінними лінійними розмірами та формою поперечного перерізу. У [14] дано математичне обґрунтування і отримані співвідношення для параметрів та коефіцієнтів природної системи координат, побудованої на сімействі еквідистант заданої базової кривої (осі бруса), яка дозволяє подолати вказаний недолік класичних криволінійних систем координат. У випадку застосування параметризації за кутом нахилу поперечного перерізу бруса, якщо вісь бруса на розглядуваній ділянці має додатну кривизну:

$$\alpha=\eta,\ \kappa=\operatorname{tg}\eta,\ \lambda=\frac{1}{\xi+r_0},\ L_{\xi}=1,\ L_{\eta}=|\xi+r_0|,\ r_0=\left|\frac{1}{\sin\eta}\frac{dx_C(\eta)}{d\eta}\right|. \tag{49}$$

Співвідношення (48) приводять рівняння (25) до такого вигляду

$$\mu^{\rho}\mu^{c}\frac{\partial T}{\partial\tau}-\frac{1}{\xi+r_0}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu^{\lambda}_{0\eta}}{\xi+r_0}\frac{\partial T}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left(\xi+r_0\right)\mu^{\lambda}_{0\xi}\frac{\partial T}{\partial\xi}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu^{\lambda}_{0y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)=$$
$$=F+T_0\left(\mu^{\beta}_{\eta}\frac{\partial\varepsilon_{\eta}}{\partial\tau}+\mu^{\beta}_{\xi}\frac{\partial\varepsilon_{\xi}}{\partial\tau}+\mu^{\beta}_{y}\frac{\partial\varepsilon_{y}}{\partial\tau}\right). \qquad (50)$$

Висновки. Таким чином, отримані рівняння теплопровідності, у загальній (24) та лінеаризованій (25), (50) формах для композитного бруса з криволінійною плоскою віссю довільної форми у природній системі координат. Отримані рівняння описують процес теплопередачі всередині дискретно-неоднорідного композитного бруса, що складається із однорідних або неперервно-неоднорідних фаз із криволінійною ортотропією теплофізичних та пружних характеристик.

На основі прийнятих загальних вихідних даних щодо форми зовнішніх поверхонь бруса та його внутрішньої будови, у природній системі координат отримані граничні умови трьох типів та виписані умови теплопередачі на межі фаз бруса у випадку їх ідеального теплового контакту та за наявності контактного теплового опору.

Наведено приклади конкретизації загальних рівнянь для брусів заданої форми: прямолінійної, кругової, еліптичної та параболічної, які дозволили перевірити правильність отриманих співвідношень шляхом порівняння із відомими формами рівняння теплопровідності.

Отримані у даній роботі теоретичні залежності разом із побудованими у попередніх роботах системою рівнянь теорії пружності у природній системі координат, інтегральними та диференціальними залежностями для внутрішніх силових факторів та співвідношеннями для моделювання навантажень різного типу, складають необхідну аналітичну базу для розв’язання різних задач термопружного деформування композитних криволінійних брусів.

Список використаних джерел:

1. Композиционные материалы: Справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др.; под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. Москва, 1990. 512 с.
2. Мищенко А. В. Стационарное температурное поле в многослойных стержнях с разрывами ширины сечения. *Вестник МГСУ*. 2019. Т. 14, Вып. 1. С. 12–21.
3. Пискунов В. Г., Сипетов В. С. Об одном подходе к решению задач термоупругости слоистых пластин. *Строительная механика и расчет сооружений*. 1986. № 1. С. 28–31.
4. Verijenko V. E., Tauchert T. R., Tabakov P.Y. Refined Theory of Laminated Anisotropic Shells for the Solution of Thermal Stress Problems. *J. Therm. Stresses*. 1999. 22(1). P. 75–100.
5. Shupikov A. N., Smetankina N. V., Svet Y. V. Nonstationary Heat Conduction in Complex-Shape Laminated Plates. *J. Heat Transfer*. 2007. 129(3). P. 335–341.
6. Vosoughi A. R., Malekzadeh P., Banan Mo. R., Banan Ma. R. Thermal postbuckling of laminated composite skew plates with temperature-dependent properties. *Thin-Walled Structures*. 2011. Vol. 49, No. 7. P. 913–922.
7. Turusov R. A. Elastic and thermal behavior of a layered structure I. Experiment and theory. *Mechanics of Composite Materials*. 2015. Vol. 50, No. 6. P. 801–808.
8. Norouzi M., Rahmani H., Birjandi A. K., Joneidi A. A. A General Exact Analytical Solution for Anisotropic Non-Axisymmetric Heat Conduction in Composite Cylindrical Shells. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2016. 93 P. 41–56.
9. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Асимптотический анализ нестационарной задачи теплопроводности конструктивно и физически неоднородных композитных стержней при анизотропии общего вида. *Конструкции из композиционных материалов*. 2008. № 4. С. 10–27.
10. Gorbachev V. I. Heat propagation in a nonuniform rod of variable cross section. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2017. Vol. 72, No. 2. P. 48–53.
11. Плескачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Деформирование трехслойного упругого стержня нагрузками различных форм в температурном поле. *Теоретическая и прикладная механика*. 2017. Вып. 32. С. 5–12.
12. Ковальчук С. Б., Горик О. В. Рівняння теорії пружності для композитних брусів із плоскою віссю довільної форми у природній криволінійній системі координат. *Міжвуз. зб. «Наукові нотатки»*. Луцьк, 2018. Вип. 63. С. 89-97.
13. Ковальчук С. Б., Горик О. В. Природна криволінійна циліндрична система координат для стержнів із плоскою віссю довільної форми. *Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури*. Одеса, 2017. Вип. 68. С. 31-38.

14. Ковальчук С. Б., Горик О. В. Природна система координат для криволінійних композитних брусів із незмінними лінійними розмірами поперечних перерізів. *Міжвуз. зб. «Наукові нотатки»*. Луцьк, 2019. Вип. 65. С. 106-117.

15. Ковальчук С. Б., Горик О. В. Інтегральні та диференціальні співвідношення для внутрішніх силових факторів при згині бруса з криволінійною плоскою віссю довільної форми. *Вісник ОДАБА*. Одеса, 2018. Вип. 70. С. 40-48.

16. Ковальчук С. Б., Горик О. В. Аналітичне моделювання зосереджених та локалізованих навантажень брусів із криволінійною плоскою віссю. Частина 1. Моделювання зосереджених у точці навантажень. *Вісник ОДАБА*. Одеса, 2018. Вип. 73. С. 31-40.

17. Ковальчук С. Б. Аналітичне моделювання зосереджених та локалізованих навантажень брусів із криволінійною плоскою віссю. Частина 2. Моделювання локалізованих навантажень та приклади застосування. *Вісник ОДАБА*. Одеса: ОДАБА, 2019. Вип. 76. С. 31-42.

18. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Москва, 1985. 480 с.

19. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел / пер. с англ. под. ред. А. А. Померанцева. Москва, 1964. 488 с.

20. Коваленко А. Д. Термоупругость. Киев, 1975. 216 с.

21. McLachlan N. W. Heat conduction in elliptical cylinder and an analogous electromagnetic problem. *Philosophical Magazine*, 1945. 36(260). P. 600–609.

Рецензенти:

Горик Олексій Володимирович, завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін Полтавської державної аграрної академії, доктор технічних наук, професор.

Шваб’юк Василь Іванович, професор кафедри технічної механіки Луцького національного технічного університету, доктор технічних наук, професор.

Стаття надійшла до редакції 15.12.2019