

УДК: 539.3 DOI 10.36910/6775.24153966.2019.68.2

Г.В. Габрусев, І.Ю. Габрусєва, Т.Б. Пиндус*Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя***ТИСК ПАРАБОЛІЧНОГО ШТАМПА НА ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИЙ ШАР**

Наведено розв'язок контактної задачі про взаємодію параболічного штампа із попередньо напруженим шаром. Система парних інтегральних рівнянь, що при цьому отримується, розв'язується за допомогою подання шуканих функцій напружень у вигляді відрізка ряду за функціями Бесселя з невідомими коефіцієнтами та подальшим отриманням скінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь для їх знаходження. На основі отриманого напружено-деформованого стану проаналізовано вплив форми штампа на контактні напруження.

Ключові слова: контактна взаємодія, контактні напруження, параболічний штамп, шар, початкові деформації

Г.В. Габрусев, И.Ю. Габрусєва, Т.Б. Пиндус**ДАВЛЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ШТАМПА НА ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫЙ СЛОЙ**

Приведено решение контактної задачі о взаимодействии параболіческого штампа из предварительно напружєнным слоем. Система парных интегральных уравнений относительно неизвестной функции напружений решается при помощи представления этой функции отрезком ряда по функциям Бесселя из неизвестными коэффициентами и сведением их к системе линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов. На основании полученного напруженно-деформированного состояния проанализировано влияние формы штампа на контактные напружения.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, контактные напружения, параболіческий штамп, слой, начальные деформации

H. Habrusiev, I. Habrusieva, T. Pyndus**PRESSURE OF PARABOLIC PUNCH ON PRESTRESSED LAYER**

While designing modern engineering structures in many cases of engineering practice it is important to know the distribution of stresses and strains occurring on bodies contact taking into account initial stresses and strains and contact body shapes. The stress-strain state (SSS) of prestress layer while contacting with parabolic punch is investigated in this paper. The problem is solved within the limits linear elasticity theory. The required SSS is presented in the form of Hankel integral. Satisfaction of the boundary problem conditions results in paired integral equation relatively to the function determining the contact stresses under the die. These equations are solved by means of numerical method. The influence of the die shape and initial layer strains on the contact stresses value and the vertical displacements of the stressed body points is investigated.

Key words: contact interaction, contact stresses, parabolic punch, layer, initial deformation

Актуальність теми. Визначення контактних напружень і деформацій при взаємодії жорстких штампів з пружною плитою є важливим завданням при проектуванні деталей машин та елементів споруд. Зокрема, при оцінці міцності залізобетонних перекриттів, монолітних фундаментних плит у будівництві, дорожнього покриття тощо. Щоб мінімізувати похибку розрахунків, необхідно враховувати максимальну кількість чинників, що впливають на контактну взаємодію. Початкові деформації, від яких безпосередньо залежать контактні напруження та переміщення, є одним із ключових факторів.

Аналіз відомих результатів досліджень. Питаннями взаємодії тіл із наявними залишковими деформаціями займалося багато вчених, зокрема й вітчизняних. У загальному постановка таких задач вимагає залучення апарату нелінійної теорії пружності, проте при досить великих початкових деформаціях можна обмежитися її лінеаризованим варіантом [1].

Незважаючи на збільшення кількості досліджень, присвячених контактній взаємодії тіл з попередньо напруженим станом [2-4], задача про тиск параболічного штампа на закріплену на жорсткій основі попередньо напружену товсту плиту досі не розв'язана для стисливих і нестисливих тіл у загальному вигляді при довільній структурі пружного потенціалу.

Постановка задачі. Постановку та розв'язання задачі проведемо в рамках лінеаризованої теорії пружності. Розглянемо жорсткий штамп утворений обертаням вітки параболи із параметром R та відрізка прямої, яка перпендикулярна до осі параболи і проходить через її вершину, навколо спільної осі, що паралельна до осі параболи. Штамп поступально без обертання та тертя втискується постійною силою P у попередньо напружений шар товщиною h , закріплений на жорсткій основі.

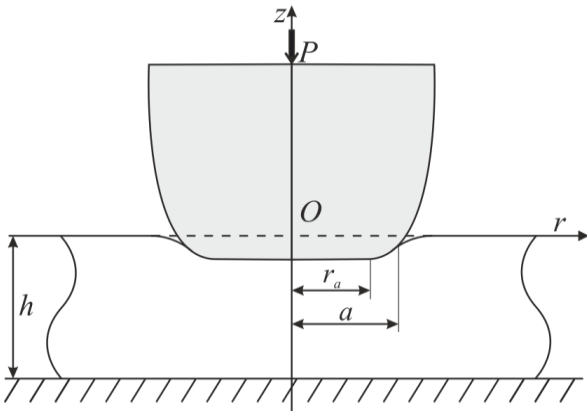


Рис. 1. Схема контактної взаємодії параболічного штампа та шару.

Виберемо циліндричну систему координат (O, r, θ, z) так, щоб координатна площина (r, O, θ) збігалася з верхньою граничною площиною шару, а вісь Oz — з віссю симетрії штампа (рис. 1).

Вважатимемо відомим радіус ділянки контакту a . Виходячи із формулювання задачі, можна описати функцію, обертанням графіка якої навколо осі Oz утворено штамп

$$W(r) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq r_a; \\ \frac{1}{2R}(r - r_a)^2, & r_a < r. \end{cases}$$

Граничні умови поставленої задачі мають вигляд

$$Q_{3r}(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r < \infty; \quad (1)$$

$$Q_{33}(r, 0) = 0, \quad a \leq r; \quad (2)$$

$$u_3(r, 0) = \omega(r), \quad 0 \leq r \leq a; \quad (3)$$

$$u_r(r, -h) = 0, \quad 0 \leq r < \infty; \quad (4)$$

$$u_3(r, -h) = 0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (5)$$

Функція $\omega(r)$ описує переміщення точок верхньої граничної площини пружного шару на ділянці його контакту з жорстким штампом. А тому, виходячи із вигляду функції $W(r)$, можна записати:

$$\omega(r) = \begin{cases} \omega(a) - \frac{(a-r)^2}{2R}, & 0 \leq r \leq r_a; \\ \omega(a) - \frac{1}{2R}[(a-r_a)^2 - (r-r_a)^2], & r_a < r \leq a. \end{cases} \quad (6)$$

Розв'язання задачі. Будемо вважати залишкові напруження, наявні у шарі, однорідними. Тому можна використати наступні вирази для компонентів тензора напружень і вектора переміщень [1]

$$Q_{3r}(r, z) = -c_{31} \int_0^{\infty} \alpha^3 \{ A_1 sh(\alpha z) + A_2 [s_0 sh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] + B_1 ch(\alpha z) + B_2 [s_0 ch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] \} J_1(\alpha r) d\alpha;$$

$$Q_{33}(r, z) = c_{33} \int_0^{\infty} \alpha^3 \{ A_1 ch(\alpha z) + A_2 [sch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] + B_1 sh(\alpha z) + B_2 [ssh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] \} J_0(\alpha r) d\alpha; \quad (7)$$

$$u_r(r, z) = - \int_0^{\infty} \alpha^2 \{ A_1 ch(\alpha z) + A_2 [ch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] + B_1 sh(\alpha z) + B_2 [sh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] \} J_1(\alpha r) d\alpha;$$

$$u_3(r, z) = m \int_0^{\infty} \alpha^2 \{ A_1 sh(\alpha z) + A_2 [s_1 sh(\alpha z) + \alpha z ch(\alpha z)] + B_1 ch(\alpha z) + B_2 [s_1 ch(\alpha z) + \alpha z sh(\alpha z)] \} J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (8)$$

Константи c_{31} , c_{33} , m , s , s_0 , s_1 залежать від характеру пружного потенціалу та підбираються у кожному випадку окремо [1]. Невідомі функції A_1 , B_1 , A_2 , B_2 визначаються з граничних умов задачі.

На верхній граничній площині шару при $z = 0$ зі співвідношень (7) – (8) отримаємо

$$Q_{33}(r, 0) = c_{33} \int_0^{\infty} \alpha^3 \{A_1 + A_2 s\} J_0(\alpha r) d\alpha; \quad (9)$$

$$Q_{3r}(r, 0) = -c_{31} \int_0^{\infty} \alpha^3 \{B_1 + B_2 s_0\} J_1(\alpha r) d\alpha; \quad (10)$$

$$u_3(r, 0) = m \int_0^{\infty} \alpha^2 \{B_1 + B_2 s_1\} J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (11)$$

На нижній граничній площині шару при $z = -h$ маємо

$$u_r(r, -h) = - \int_0^{\infty} \alpha^2 \{A_1 ch(\alpha h) + A_2 [ch(\alpha h) + \alpha h sh(\alpha h)] + \\ - B_1 sh(\alpha h) - B_2 [sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)]\} J_1(\alpha r) d\alpha; \quad (12)$$

$$u_3(r, -h) = m \int_0^{\infty} \alpha^2 \{-A_1 sh(\alpha h) + A_2 [-s_1 sh(\alpha h) - \alpha h ch(\alpha h)] + \\ + B_1 ch(\alpha h) + B_2 [s_1 ch(\alpha h) + \alpha h sh(\alpha h)]\} J_0(\alpha r) d\alpha. \quad (13)$$

Вимагаючи виконання граничної умови (1), із рівності (10) отримуємо співвідношення між функціями B_1 та B_2

$$B_1 + B_2 s_0 = 0; \Rightarrow B_1 = -s_0 B_2. \quad (14)$$

Підставивши (14) у співвідношення (12) – (13) та задовольнивши граничні умови (4) – (5), матимемо систему рівнянь відносно невідомих A_1 та A_2

$$\begin{cases} A_1 ch(\alpha h) + A_2 [ch(\alpha h) + \alpha h sh(\alpha h)] = B_2 [\alpha h ch(\alpha h) + (1 - s_0) sh(\alpha h)]; \\ A_1 sh(\alpha h) + A_2 [s_1 sh(\alpha h) + \alpha h ch(\alpha h)] = B_2 [(s_1 - s_0) ch(\alpha h) + \alpha h sh(\alpha h)]. \end{cases} \quad (15)$$

Розв'язавши (15), отримуємо вирази для A_1 та A_2 через функцію B_2

$$A_1 = \frac{(\alpha h)^2 - s_1 + s_0 ch^2(\alpha h) - s_0 s_1 sh^2(\alpha h)}{(s_1 - 1) ch(\alpha h) sh(\alpha h) + \alpha h} B_2; \quad (16)$$

$$A_2 = \frac{(s_1 - s_0) ch^2(\alpha h) - (1 - s_0) sh^2(\alpha h)}{(s_1 - 1) ch(\alpha h) sh(\alpha h) + \alpha h} B_2.$$

З урахуванням співвідношень (14) та (16) вирази (9) та (11) набувають вигляду:

$$Q_{33}(r, 0) = c_{33} (s - s_0) \int_0^{\infty} \frac{\alpha^3 B_2}{\Delta(\alpha)} J_0(\alpha r) d\alpha; \quad (17)$$

$$u_3(r, 0) = m (s_1 - s_0) \int_0^{\infty} \alpha^2 B_2 J_0(\alpha r) d\alpha; \quad (18)$$

$$\Delta(\alpha) = \frac{(s_1 - 1) sh(\alpha h) ch(\alpha h) + \alpha h}{(\alpha h)^2 - s_1 + (s_0 + s s_1 - s s_0) ch^2(\alpha h) - (s_0 s_1 + s - s s_0) sh^2(\alpha h)}.$$

Задовольнивши граничну умову (2), на основі (17) матимемо

$$c_{33} (s - s_0) \int_0^{\infty} \frac{\alpha^3 B_2}{\Delta(\alpha)} J_0(\alpha r) d\alpha = 0, \quad a \leq r. \quad (19)$$

Уведемо невідому функцію $x(r)$, $0 \leq r \leq a$, за допомогою якої продовжимо співвідношення (19) на проміжок $0 \leq r < \infty$

$$c_{33}(s-s_0) \int_0^{\infty} \frac{\alpha^3 B_2}{\Delta(\alpha)} J_0(\alpha r) d\alpha = x(r) \eta(a-r), \quad 0 \leq r < \infty, \quad (20)$$

де $\eta(r)$ – функція Гевісайда.

Функція $x(r)$ визначає розподіл контактних напружень під штампом. Урахувавши їх неперервність, а також рівність нулю на границі області контакту (при $r = a$), представимо $x(r)$ у вигляді відрізка узагальненого ряду Фур'є за функціями $J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right)$

$$Q_{33}(r, 0) = x(r) = \sum_{n=1}^N a_n J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right), \quad 0 \leq r \leq a, \quad (21)$$

де λ_n , $n = \overline{1, N}$ – додатні корені функції Бесселя $J_0(\lambda_n) = 0$; a_n – невідомі коефіцієнти.

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до співвідношення (20) та врахувавши представлення (21), отримуємо

$$\frac{\alpha^2 B_2}{\Delta(\alpha)} = \frac{1}{c_{33}(s-s_0)} \sum_{n=1}^N a_n \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right) J_0(\alpha r) dr. \quad (22)$$

Увівши позначення

$$\Psi_n(\alpha) = \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right) J_0(\alpha r) dr,$$

із (22) отримуємо

$$\alpha^2 B_2 = \frac{\Delta(\alpha)}{c_{33}(s-s_0)} \sum_{n=1}^N a_n \Psi_n(\alpha). \quad (23)$$

Підставивши співвідношення (23) у рівність (18), отримаємо

$$u_z(r, 0) = k_1 \sum_{n=1}^N a_n \int_0^{\infty} \Delta(\alpha) \Psi_n(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha, \quad k_1 = \frac{m(s_1 - s_0)}{c_{33}(s - s_0)}. \quad (24)$$

Вимагаючи виконання граничної умови (3) та врахувавши (24), знаходимо

$$k_1 \sum_{n=1}^N a_n \int_0^{\infty} \Delta(\alpha) \Psi_n(\alpha) \{J_0(\alpha r) - J_0(\alpha a)\} d\alpha = \omega^*(r), \quad (25)$$

$$\omega^*(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2R}(r_a - a)^2, & 0 \leq r \leq r_a; \\ \frac{1}{2R}[(r_a - r)^2 - (r_a - a)^2], & r_a < r \leq a. \end{cases}$$

Помноживши співвідношення (25) на $r J_0\left(\frac{\lambda_q}{a} r\right)$ та проінтегрувавши отримані вирази по r від 0 до a , матимемо

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_0^{\infty} \Delta(\alpha) \Psi_n(\alpha) [\Psi_q(\alpha) - K_q J_0(\alpha a)] d\alpha = \frac{w_q}{k_1}, \quad q = \overline{1, N}; \quad (26)$$

$$K_q = \int_0^a r J_0\left(\frac{\lambda_q}{a} r\right) dr; \quad w_q = \int_0^a r \omega^*(r) J_0\left(\frac{\lambda_q}{a} r\right) dr.$$

Уведемо позначення

$$a_n = \frac{1}{2Rk_1} a_n^*, \quad (27)$$

з урахуванням якого із (26) отримуємо систему N лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих a_n^* .

Вираз для визначення фокального параметра R , що входить до співвідношення (27), знаходимо з умови рівноваги штампа

$$2\pi \int_0^a r \sigma_{zz}(r, 0) dr = -P. \quad (28)$$

Підставивши у (28) вирази (21) та (27), визначаємо

$$\frac{1}{2R} = \frac{k_1 P}{2\pi} \frac{-1}{\sum_{n=1}^N a_n^* K_n}, \quad (29)$$

з урахуванням (29), (27) із (21) матимемо формулу для визначення розподілу контактних напружень під штампом

$$Q_{33}(r, 0) = -\frac{P}{2\pi} \frac{\sum_{n=1}^N a_n^* J_0\left(\frac{\lambda_n}{a} r\right)}{\sum_{n=1}^N a_n^* K_n}. \quad (30)$$

На підставі співвідношень (18) та (27) знаходимо формулу для визначення вертикальних переміщень точок верхньої граничної площини шару

$$u_3(r, 0) = -\frac{k_1 P}{2\pi} \frac{\sum_{n=1}^N a_n^* \int_0^\infty \Delta(\alpha) \Psi_n(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha}{\sum_{n=1}^N a_n^* K_n}. \quad (31)$$

Числовий приклад. На рис. 2 та 3 наведено графіки функцій $\sigma^* = \frac{Q_{33}(r, 0)}{P}$ та

$u^* = \frac{u_3(r, 0)}{P}$, що характеризують розподіл контактних напружень (30) та вертикальних переміщень (31). У якості числового прикладу розглянуто випадок наявності у плиті пружного потенціалу гармонічного типу [1] та наявності в основі штампа плоскої ділянки при $h=1$, $a=1$. Крива 1 відповідає $r_a=0$, крива 2 – $r_a=0.2$, а крива 3 – $r_a=0.5$.

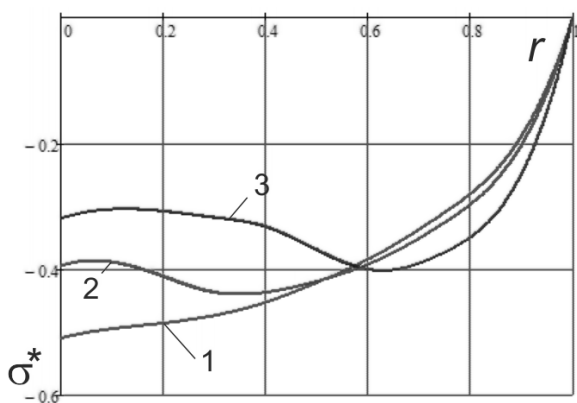


Рис. 2. Розподіл контактних напружень

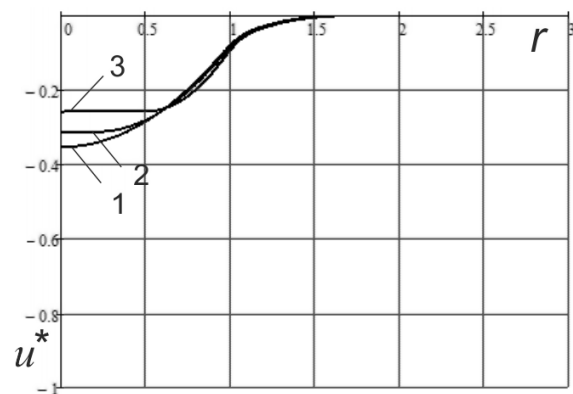


Рис. 3. Вертикальні переміщення

Висновки. У рамках лінеаризованої теорії пружності подано постановку та розв'язання осесиметричної контактної задачі про взаємодію параболічного штампа із попередньо напруженим шаром, закріпленим на жорсткій основі. Проаналізовано вплив наявності в основі жорсткого штампа плоскої ділянки. Встановлено, що форма штампа суттєво впливає на величину та характер розподілу контактних напружень. Зокрема, у параболічних штампах без плоскої ділянки в основі екстремальні значення контактних напружень виникають у центрі області

контакту. Поява плоскої ділянки спричиняє зсув точок екстремуму до краю ділянки контакту та зменшує їх абсолютну величину. Якщо $r_a = 0.2a$ (рис. 1), то абсолютна величина контактних напружень зменшується приблизно на 10%, якщо $r_a = 0.5a$ – на 12%. Вертикальні переміщення при цьому зменшуються на 9% та 11% відповідно. Одержані в роботі результати можуть використовуватися при розробці методик зменшення контактних напружень або вертикальних переміщень при проектуванні різного роду конструкцій.

Список використаної літератури:

1. Гузь О. М. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями: Навч. посібник / Гузь О. М., Бабич С. Ю., Рудницький В. Б. – К: Вища школа, 1995. – 304 с.
2. Шелестовський Б. Г. Взаємодія кільцевого штампа із попередньо напруженим шаром у випадку потенціалу Бартенєва-Хазановича / Б. Г. Шелестовський, І. Ю. Габрусєва // Вісник ТНТУ. – 2010. – Т. 15, №3. – С. 14 – 22.
3. Gabrusseva I. Yu. Contact interaction of a circular punch with a preliminarily stressed isotropic layer / B.G. Shelestovs`kyi, I.Yu. Gabrusseva // Journal of mathematical sciences. – 2012. – Vol.186, No.1. – P. 48 – 60.
4. Габрусєва І. Ю. Контактна задача для параболічного штампа та попередньо напруженого півпростору / І. Ю. Габрусєва // Міжвузівський збірник «Наукові нотатки». – 2015. – Вип. 51. – С. 231 – 236.

Рецензенти:

Окрепкий Богдан Степанович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики Тернопільського національного економічного університету

Марущак Павло Орестович, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автоматизації технологічних процесів і виробництв Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя

Стаття надійшла до редакції 12.11.2019