

Н.В. Шинкарчук

Рівненський державний гуманітарний університет

ОДНОСТОРОННИЙ КОНТАКТ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ
З КРУГОВИМ ОТВОРОМ І ПРУЖНОГО ДИСКА

Досліджується напружений стан кусково-однорідної ортотропної пластинки з коловим розрізом по лінії умовного поділу матеріалів пластинки і пружного диска за умови контактування їхніх берегів. Пластинчаста конструкція перебуває в умовах однорідного узагальненого плоского напруженого стану на нескінченності. Побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій через які виражаються контактні зусилля на контурі отвору ортотропної пластинки і пружного диска. Наближений розв'язок задачі реалізовано методом механічних квадратур і колокації. Подано результати числових розрахунків.

Ключові слова: напружений стан, ортотропна пластинка, пружний диск, сингулярні рівняння, ортотропні матеріали, зона контакту

N.V. Shynkarchuk

UNILATERAL CONTACT OF AN ORTHOTROPIC PLATE
WITH A CIRCULAR HOLE AND AN ELASTIC DISK

The reliability of machine parts and structural elements designed in the form of piecewise homogeneous plates is one of the important problems of engineering mechanics. Their functionality and durability largely depend on the presence of defects such as cuts or cracks on the material boundary line, which can occur at the manufacturing stage and significantly reduce the permissible external load on the part during operation.

A solution to the problem is proposed for an infinite orthotropic plate with a circular hole and an elastic isotropic disk, which are welded together on one part of the common contour, and on the rest of the contour there is a symmetrical circular cut between them. The plate structure is in conditions of a uniform generalized plane stress state at infinity. Under the action of uniformly distributed forces directed along the coordinate axes, the edges of the cut of the plate structure are in contact partially or along the entire length. Friction forces in the contact zone of the plate and disk are absent. The solution to this problem involves determining the components of the stress state at the interface between the materials of an orthotropic plate and an elastic disk, and establishing the dimensions and position of the boundary contact zone.

The boundary conditions of the problem in the smooth contact area are chosen as the equality of the normal displacements of the contour points of the plate and the disk, and in the joint area as the equality of their displacements. The dependencies between the components of the displacement vector of the contour points of the orthotropic plate and the elastic disk and the contact stresses are written as integral relations with logarithmic kernels. By substituting these expressions into the boundary conditions of the problem, a system of four singular integral equations is constructed to determine the functions through which the contact forces in the contact and joint areas are expressed. In addition to the obtained system of equations, the conditions of force equilibrium of the disk must be fulfilled. The approximate solution of the problem is implemented by the method of mechanical quadratures and collocation. The size and position of the contact zone are determined by the method of dichotomy.

For a piecewise-homogeneous orthotropic plate with a symmetric circular section, the edges of which are in contact partially or along the entire length, the influence of the material orthotropy on the distribution of contact and annular stresses is investigated. The value of the limiting angle of the section zone for which the complete contact is broken at its end points is established. The results of numerical calculations are shown in two figures and a table.

Keywords: tense state, orthotropic plate, elastic disk, singular equations, orthotropic materials, zone of contact.

Постановка проблеми. Функціональна здатність та довговічність кусково-однорідних пластин, як деталей машин і елементів конструкцій, значною мірою залежить від наявності на лінії поділу матеріалів математичних розрізів або тріщин, які можуть виникнути в процесі виготовлення або експлуатації деталі. Розгляд випадку часткового або повного контакту берегів тріщини в таких кусково-однорідних пластинках має важливе значення з точки зору забезпечення герметичності й непроникливості конструкції.

Тому дослідження й аналіз напружено-деформованого стану в околі таких дефектів становить значний теоретичний та практичний інтерес у сучасній інженерній механіці.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботах [1, 2] подано розв'язки задач про напружений стан кусково-однорідних пластин з контактуючими берегами розрізу по дузі кола, які перебувають в умовах узагальненого плоского напруженого стану на нескінченності.

Розв'язок задачі про напружений стан кусково-однорідної ортотропної пластинки з одним еліптичним розрізом, береги якого перебувають у частковому або повному контакті, при навантаженні пластинки на нескінченності, наведено в [3].

Розрахунок напруженого стану кусково-однорідної ізотропної пластинки, яка перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану на нескінченності, за наявності на лінії поділу матеріалів зон спаю, гладкого без тертя контакту і відставання, здійснено в [4].

© Н.В. Шинкарчук

Мета статті. Реалізувати розв'язок контактної задачі для нескінченної ортотропної пластинки з круговим отвором та ізотропного пружного диска, що перебувають в умовах однорідного узагальненого плоского напруженого стану на нескінченності, за наявності на лінії їхнього поділу симетричного розрізу по дузі кола, береги якого контактують у процесі деформації.

Постановка задачі. Допустимо, що в отвір нескінченної ортотропної пластинки товщиною $2h$, яка послаблена круговим отвором одиничного радіуса з контуром γ , без зазору і натягу вставлено пружний ізотропний диск такої ж форми та товщини. Середня площина пластинки віднесена до системи прямокутних (x, y) і полярних (ρ, λ) координат з полюсом в центрі отвору. Вважається, що головні осі ортотропії матеріалу пластинки співпадають з координатними осями.

На ділянці $\gamma_3 = [\pi - \beta_0, \pi + \beta_0]$ диск спаяний з пластинкою, а на іншій частині контуру γ між ними наявний наскрізний симетричний розріз. Пластинчаста конструкція перебуває в умовах однорідного узагальненого плоского напруженого стану на нескінченності, викликаного рівномірно розподіленими зусиллями p і q , які діють в напрямках координатних осей. Внаслідок дії такого навантаження на ділянці $\gamma_1 = [-\alpha_0, \alpha_0]$ пластинка вступає в гладку контактну взаємодію з диском. Контакт між пластинкою і диском на ділянках γ_2 відсутній (рис. 1).

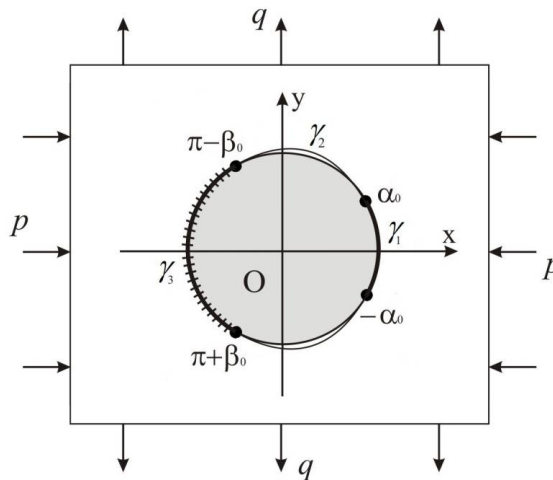


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Розв'язок поставленої задачі полягає у визначенні компонентів напруженого стану на контурі отвору γ , а також встановленні умов, що накладаються на зовнішнє навантаження та величину розрізу, при виконанні яких контакт між пластинкою і диском буде суцільним (повний контакт берегів розрізу).

Виклад основного матеріалу. Граничні умови задачі в зоні контакту $\gamma_1 = [-\alpha_0, \alpha_0]$ приймаємо у вигляді рівності нормальних зміщень пластинки і диска. При відсутності сил тертя їх можна записати так [4, 5]

$$\cos \lambda (U - U^{(1)}) + \sin \lambda (V - V^{(1)}) = 0; \quad S_{\rho\lambda} = S_{\rho\lambda}^{(1)} = 0, \quad T_\rho = T_\rho^{(1)}, \quad \lambda \in \gamma_1, \quad (1)$$

а в зоні спаю $\gamma_3 = [\pi - \beta_0, \pi + \beta_0]$ пластинки та диска – у вигляді рівності зміщень їх контурних точок [4, 5]

$$U - U^{(1)} = 0, \quad V - V^{(1)} = 0; \quad S_{\rho\lambda} = S_{\rho\lambda}^{(1)}, \quad T_\rho = T_\rho^{(1)}, \quad \lambda \in \gamma_3. \quad (2)$$

Тут T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, $T_\rho^{(1)}$, $S_{\rho\lambda}^{(1)}$ – нормальні та дотичні зусилля на контурі отвору ортотропної пластинки і пружного диска.

Вирази для компонентів вектора зміщення контурних точок ортотропної пластинки при заданому навантаженні, мають вигляд [3]

$$2E_x h U = (\beta_{11} \beta_{22} - \nu_x) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + R_0(\lambda) + \\ + \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{\pi} \left[\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt \right] + c_1;$$

$$2E_x hV = (\beta_{11}\beta_{22} - \nu_x) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt + Q_0(\lambda) -$$

$$- \frac{\beta_{11}\beta_{22}(\beta_{11} + \beta_{22})}{\pi} \left[\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt \right] + c_2, \quad \lambda \in \gamma, \quad (3)$$

де

$$R_0(\lambda) = -\cos \lambda [(\beta_{11} + \beta_{22})bp + ap + \beta_{11}\beta_{22}aq];$$

$$Q_0(\lambda) = \beta_{11}\beta_{22} \sin \lambda [(\beta_{11} + \beta_{22})aq + bp + \beta_{11}\beta_{22}bq],$$

а компоненти вектора зміщення контурних точок пружного диска з урахування (1) – (2) і за умов

$$f_1^{(1)'}(t) = f_1'(t), \quad f_2^{(1)'}(t) = f_2'(t)$$

набувають вигляду [4, 6]

$$2E^{(1)}hU^{(1)} = (1 - \nu^{(1)}) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt - T^0 \cos \lambda + c_1^{(1)};$$

$$2E^{(1)}hV^{(1)} = (1 - \nu^{(1)}) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt - T^0 \sin \lambda + c_2^{(1)}, \quad \lambda \in \gamma, \quad (4)$$

де $f_1 + if_2 = i \int_{-\alpha_0}^{\lambda} (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) e^{it} dt$, $T^0 = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} (f_2'(t) \cos t - f_1'(t) \sin t) dt$, E_x , ν_x – модуль Юнга

і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини в напрямку осі Ox ; $E^{(1)}$, $\nu^{(1)}$ – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу диска; β_{11} , β_{22} – корені характеристичного рівняння [7]; c_1 , $c_1^{(1)}$, c_2 , $c_2^{(1)}$ – дійсні сталі. Решта позначень такі ж як і в [4].

Шляхом підстановки (3), (4) в граничні умови (1), (2) та використавши позначення:

$$f_1'(\lambda) + if_2'(\lambda) = f_1^{\circ'}(\lambda) + if_2^{\circ'}(\lambda), \quad \lambda \in [-\alpha_0, \alpha_0],$$

$$f_1'(\pi + \tilde{\lambda}) + if_2'(\pi + \tilde{\lambda}) = \tilde{f}_1'(\tilde{\lambda}) + i\tilde{f}_2'(\tilde{\lambda}), \quad \tilde{\lambda} \in [-\beta_0, \beta_0], \quad (5)$$

отримаємо систему з чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій $f_1^{\circ'}$, $f_2^{\circ'}$, $\tilde{f}_1'$, $\tilde{f}_2'$ на ділянках контакту і спаю

$$\cos \lambda \left[\left((\beta_{11}\beta_{22} - \nu_x) - (1 - \nu^{(1)})k \right) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_1^{\circ'}(t) dt + R_0(\lambda) + \right.$$

$$+ \frac{\beta_{11} + \beta_{22} + 2k}{\pi} \left[\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2^{\circ'}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] +$$

$$+ kT^0 \cos \lambda \left. \right] + \sin \lambda \left[\left((\beta_{11}\beta_{22} - \nu_x) - (1 - \nu^{(1)})k \right) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_2^{\circ'}(t) dt - \frac{\beta_{11}\beta_{22}(\beta_{11} + \beta_{22}) + 2k}{\pi} \times \right.$$

$$\times \left[\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1^{\circ'}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + Q_0(\lambda) +$$

$$+ kT^0 \sin \lambda \left. \right] = \tilde{c}_1 \cos \lambda + \tilde{c}_2 \sin \lambda, \quad f_1^{\circ'}(\lambda) \cos \lambda + f_2^{\circ'}(\lambda) \sin \lambda = 0, \quad \lambda \in [-\alpha_0, \alpha_0]. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \left((\beta_{11}\beta_{22} - \nu_x) - (1 - \nu^{(1)})k \right) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_1^{\circ'}(t) dt + R_0(\lambda) + \frac{\beta_{11} + \beta_{22} + 2k}{\pi} \times \\ & \times \left[\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2^{\circ'}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2^{\circ'}(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + kT^0 \cos \lambda = \tilde{c}_1, \\ & \left((\beta_{11}\beta_{22} - \nu_x) - (1 - \nu^{(1)})k \right) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_2^{\circ'}(t) dt + Q_0(\lambda) - \\ & - \frac{\beta_{11}\beta_{22}(\beta_{11} + \beta_{22}) + 2k}{\pi} \left[\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1^{\circ'}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1^{\circ'}(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda} - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + \\ & + kT^0 \sin \lambda = \tilde{c}_2, \quad \lambda \in [\pi - \beta_0, \pi + \beta_0], \quad \tilde{\lambda} \in [-\beta_0, \beta_0]. \end{aligned} \quad (7)$$

Тут $k = \frac{\sqrt{E_x E_y}}{E^{(1)}}$, $\tilde{c}_1 = kc_1^{(1)} - c_1$, $\tilde{c}_2 = kc_2^{(1)} - c_2$.

Крім системи рівнянь (6), (7) повинні виконуватися умови силової рівноваги диска [3, 8]

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2^{\circ'}(t) dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2^{\circ'}(\tilde{t}) d\tilde{t} = 0; \quad \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1^{\circ'}(t) dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1^{\circ'}(\tilde{t}) d\tilde{t} = 0, \quad (8)$$

які служать для визначення сталих $\tilde{c}_1$ і $\tilde{c}_2$.

Якщо функції $f_1^{\circ'}$, $f_2^{\circ'}$, $\tilde{f}_1^{\circ'}$, $\tilde{f}_2^{\circ'}$ стануть відомі, то контактні зусилля на контурі отвору пластинки, з врахуванням позначень (5), визначаються за формулою [9]

$$T_{\rho} + iS_{\rho\lambda} = (f_2^{\circ'}(\lambda) - if_1^{\circ'}(\lambda))(\cos \lambda - i \sin \lambda), \quad \lambda \in \gamma. \quad (9)$$

Кільцеві зусилля на контурі отвору ортотропної пластинки визначаються за співвідношеннями, наведеними в [3] при $\varepsilon = 0$, $a = b = 1$, а пружного диска визначаються за формулою, наведеною в [6].

Наближений розв'язок задачі. Для наближеного розв'язання задачі (6) – (8) потрібно використати числові методи, оскільки знаходження точного розв'язку пов'язано зі значними математичними труднощами.

Система рівнянь (6) – (8) має таку ж структуру, як і відповідна система для випадку кусково-однорідної ізотропної пластинки з коловим розрізом [4], тому її наближений розв'язок знаходиться методом механічних квадратур та колокації, ефективність якого продемонстрована в роботах [4, 6, 9]. Методом дихотомії визначається величина і положення зони контакту.

Результати числового розрахунку. Характеристики досліджуваних ортотропних матеріалів і лінії, які відповідають їм на рисунках, наведено в таблиці 1.

Табл. 1.

Характеристики досліджуваних ортотропних матеріалів

Матеріал пластинки	β_{11}	β_{22}	ν_x	E_x/E_y	Вид лінії
Епоксид-графіт	0.143	1.401	0.010	1/25	— — —
Епоксид-скло	0.440	1.310	0.083	1/3	-----
Ізотропний	1	1	0.300	1	=====
Скло-епоксид	2.271	0.762	0.250	3	-----
Графіт-епоксид	6.999	0.714	0.250	25	-----

Для кусково-однорідної ортотропної пластинки з коловим розрізом, яка перебуває в умовах одностороннього стиску на нескінченності зусиллями p , досліджено вплив ортотропії матеріалу пластинки на величину граничного кута зони розрізу, для якого точка розмикання зони контакту збігається з кінцем розрізу, і розподіл напружень на лінії поділу матеріалів пластинки і диска.

Результати числових розрахунків напруженого стану на контурі отвору пластинки і диска при $p = 1$, $q = 0$, $k = \frac{\sqrt{E_x E_y}}{E^{(1)}} = 1$, $\nu^{(1)} = 0.3$ проілюстровано на рис. 2-3. В таблиці 2, для відповідного

матеріалу пластинки, подано величину граничного кута зони розрізу і значення нормальних зусиль в центрі ділянки контакту та спаю.

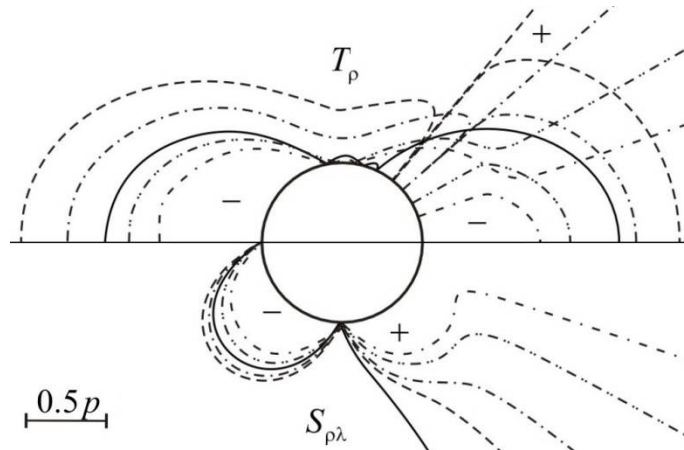


Рис. 2. Розподіл контактних зусиль T_ρ , $S_{\rho\lambda}$ при $k=1$

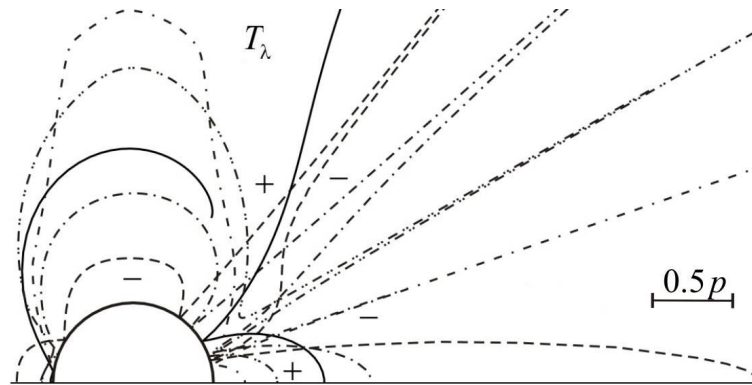


Рис. 3. Розподіл кільцевих зусиль T_λ при $k=1$

Табл. 2.

Результати розрахунку величин α_0 і T_ρ

Матеріал пластинки	α_0 (град)	$T_\rho (\lambda = 0)$	$T_\rho (\lambda = \pi)$
Епоксид-графіт	50.68	-1.6002	-1.5033
Епоксид-скло	41.32	-1.3298	-1.2158
Ізотропний	64.63	-1.2239	-0.9805
Скло-епоксид	29.49	-0.9196	-0.8301
Графіт-епоксид	19.02	-0.7317	-0.6519

Висновки. В даній роботі досліджено вплив ортотропії матеріалу на розподіл напружень у кусково-однорідній ортотропній пластинці з коловим розрізом, яка перебуває в умовах однорідного узагальненого плоского напруженого стану на нескінченності, викликаного рівномірно розподіленими зусиллями p і q . Для відповідного матеріалу пластинки, встановлено величину граничного кута зони розрізу для якого розмикання повного контакту відбувається в кінцевих його точках.

Аналіз результатів числових розрахунків приводить до таких висновків: при односторонньому стиску ортотропної пластинки на нескінченності вздовж осі симетрії колового розрізу, максимальні значення T_ρ у центрі зони контакту і спаю пластинки та круглого пружного диска зменшується при збільшенні E_x/E_y ; ортотропія матеріалу пластинки вносить суттєвий вплив на величину граничної зони контакту і розподіл нормальних та кільцевих зусиль в зоні контакту і спаю; вплив ортотропії на розподіл дотичних зусиль в зоні спаю проявляється в меншій мірі; для

забезпечення більшої міцності пластинчастої конструкції в інженерній практиці доцільно використовувати ортотропні матеріали для яких $E_x/E_y > 1$.

Список використаних джерел:

1. Грилицкий Д.В., Луцишин Р.М. Напряженное состояние анизотропной пластинки с впаянным изотропным ядром при наличии разрезом на спаяе. Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1962. № 2. С. 159–165.
2. Грилицкий Д.В., Луцишин Р.М. Напряжения в пластинках с коловой линией размежування граничних умов. Львів: Вища школа, 1975. 115 с.
3. Сяський А.О., Шинкарчук Н.В. Кусково-однорідна ортотропна пластинка з еліптичним розрізом за умови контактування його берегів. Наукові нотатки : Міжвузівський збірник (за напрямом «Машинобудування та металообробка», «Інженерна механіка», «Металургія та матеріалознавство»). Луцьк: Луцький національний технічний університет, 2011. Вип. 30. С. 168 – 174.
4. Шинкарчук Н.В. Односторонній контакт ізотропної пластинки з коловим отвором і пружного диска. Наукові нотатки : Міжвузівський збірник (за напрямом «Машинобудування та металообробка», «Інженерна механіка», «Металургія та матеріалознавство»). Луцьк: Луцький національний технічний університет, 2014. Вип. 44. С. 296 – 301.
5. Сяський А.О., Комбель С.М. Граничні умови контактних задач для нескінченної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска. Волинський математичний вісник. Рівне, 2002. Вип. 9. С. 93 – 97.
6. Сяський В.А. Вплив тертя на розподіл напружень при контакті гладких циліндричних тіл і штампів з кутовими точками. Волинський математичний вісник. Рівне, 1999. Вип. 6. С. 127 – 134.
7. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 464 с.
8. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
9. Сяський А.О., Шинкарчук Н.В. Мішана контактна задача для пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска. Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. 2010. Вип. 7 (16). С. 199 – 209.

Рецензент: Турбал Юрій Васильович, завідувач кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, доктор технічних наук, професор.