УДК 621.914: 519.23 DOI 10.36910/775.24153966.2025.81.15

Н.О. Балицька, О.І. Прилипко, Л.Є. Глембоцька

Державний університет «Житомирська політехніка»

МНОЖИННА РЕГРЕСІЙНА МОДЕЛЬ СИЛ РІЗАННЯ ПРИ ТОРЦЕВОМУ ФРЕЗЕРУВАННІ СПЛАВУ NiTi

Стаття присвячена описанню методики статистичної обробки експериментальних даних вимірювання сил різання при торцевому фрезеруванні плоских поверхонь сплаву $Ni_{56,5}Ti_{43,5}$ при змінних режимах різання (швидкість різання, подача, глибина різання). Здійснено побудову степеневої, показникової та лінійної множинних регресійних моделей сил різання та виконано порівняльний аналіз якості цих моделей для даної множини експериментальних даних.

Ключові слова: *лінійна регресія, показникова регресія, поліноміальна регресія, сили різання*

N. Balytska, O. Prylypko, L. Hlembotska

MULTIPLE REGRESSION MODEL OF CUTTING FORCES IN FACE MILLING OF NiTi ALLOY

The present article is devoted to the description of the methodology for statistical processing of experimental data on the measurement of cutting forces during face milling of flat surfaces of $Ni_{56.5}Ti_{43.5}$ alloy under variable cutting conditions (cutting speed, feed, depth of cut). The study involved the development of power, exponential, and linear multiple regression models for cutting forces, followed by a comparative analysis of the quality of these models for a specific set of experimental data. The present study determines the degree of influence of cutting modes on the value of the equivalent cutting force. The findings of this study may be useful for further investigation of the cutting process and development of effective technologies for machining NiTi alloys.

Key words: *linear regression, exponential regression, polynomial regression, cutting forces*

Постановка проблеми. Нітинол (сплав Ni-Ti) – важкооброблюваний матеріал, який характеризується особливими властивостями ефекту пам'яті форми, високими міцністю та корозійною стійкістю, демпфуючою здатністю, і широко використовується в різних галузях промисловості. Сплави NiTi належать до важкооброблюваних матеріалів через високе деформаційне зміцнення, низьку теплопровідність, високу питому теплоємність і низький ефективний модуль пружності. Ці властивості зумовлюють критично низьку оброблюваність нітинолів внаслідок високої питомої енергії різання, сильної адгезії, ускладненого стружкоутворення та надлишкового утворення задирок [1–4].

Торцеве фрезерування є одним з малодосліджених методів обробки нітинолів і вимагає особливої уваги до вибору інструменту та призначення режимів різання для забезпечення необхідної ефективності обробки [5, 6]. В цьому розрізі виникає необхідність у дослідженні та аналізі залежності сил різання від умов обробки [7, 8]. Для аналізу будь-яких процесів в різних галузях промисловості, в тому числі і в машинобудуванні, широко застосовуються множинні регресійні моделі. Вони дозволяють дослідити вплив різних факторів (наприклад, режими різання, геометричні параметри інструменту, властивості оброблюваного та інструментального матеріалів і т.д.) на значення сил різання, що дозволяє приймати обґрунтовані рішення при розробці технологій механічної обробки. Отже, побудова регресійної моделі залежності сил різання від режимів різання при торцевому фрезеруванні нітинолу є актуальною задачею для різних галузей сучасної промисловості.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Множинні регресійні моделі почали активно застосовувати для аналізу процесів різання приблизно в середині 20-го століття. Це було зумовлено розвитком комп'ютерних технологій та методів статистичного аналізу [9, 10].

Для аналізу та оптимізації процесу торцевого фрезерування доцільно застосовувати множинні регресійні моделі [10–12], що описують вплив декількох факторів на сили різання, які, в свою чергу, здійснюють великий вплив на ефективність обробки [8–10]. В таких задачах постає питання вибору між різними моделями регресії. Тому, в даній статті авторами пропонується для визначення найбільш адекватної регресійної моделі порівняти якість множинних регресійних моделей (лінійної, степеневої, показникової), побудованих на основі експериментальних даних, та оцінити вплив режимів різання на рівнодійну силу різання при торцевому фрезеруванні нітинолу.

Мета роботи – побудувати та порівняти якість множинних регресійних моделей (лінійної, степеневої, показникової) залежності рівнодійної сили різання від режимів різання при торцевому фрезеруванні плоских поверхонь нітинолу.

Виклад основного матеріалу. Експеримент проводився на обробному центрі моделі

© Н.О. Балицька, О.І. Прилипко, Л.Є. Глембоцька

DMU80eVo Deckel Maho в умовах сухого симетричного фрезерування. Фрезерувалися плоскі поверхні заготовок розміром 30×30 мм із аустенітного нітинолу (сплав $Ni_{56,5}Ti_{43,5}$, мас. %). Обробка проводилася торцевою фрезою [13], оснащеною круглими твердосплавними пластинами [14] без покриття. Сили різання вимірювали за допомогою динамометра Kistler 9257B [15]. Режими різання та максимальні отримані значення рівнодійної сили різання наведені в табл. 1.

Табл. 1

Експериментальні дані

№	Подача S_z, мм/зуб	Глибина різання t, мм	Швидкість різання v, м/хв	Рівнодійна сила різання, R, Н
1	0,05	0,5	50	755,5613978
2	0,05	1	20	1414,547686
3	0,05	1	50	1248,269858
4	0,15	1	50	2413,568367
5	0,05	0,5	20	707,2040837
6	0,15	1	20	2705,256116
7	0,15	0,5	50	1559,302635
8	0,15	0,5	20	1363,408273
9	0,1	0,75	35	1594,660137

За даними результатами побудовано три множинні регресійні моделі, а саме степеневу, показникову та лінійну, за допомогою надбудови Microsoft Excel Data Analysis.

Степенева множинна регресійна модель матиме вигляд:

$$R = C_0\, S_z^{\,b_1} t^{b_2} V^{b_3}, \tag{1}$$

де C_o, b_1, b_2 і b_3 – невідомі коефіцієнти, які знаходимо за допомогою регресійного аналізу моделі.

Для того, щоб застосувати метод найменших квадратів і знайти C_o, b_1, b_2, b_3 степеневу регресійну модель (1) за допомогою логарифмування перетворено у лінійну регресійну модель:

$$lnR = lnC_o + b_1 lnS_z + b_2 lnt + b_3 lnV. \tag{2}$$

Введено наступні позначення: $lnR = y,\ lnC_o = b_o,\ lnS_z = x_1,\ lnt = x_2,\ lnV = x_3$.

Тоді рівність (2) у нових змінних має вигляд:

$$y = b_o + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3\,. \tag{3}$$

В результаті здійснення вищевказаних перетворень отримано таблицю 2.

Табл. 2

Параметри степеневої регресійної моделі

№	x_1	x_2	x_3	y
1	-2,99573	-0,69315	3,912023	6,627461
2	-2,99573	0	2,995732	7,254565
3	-2,99573	0	3,912023	7,129514
4	-1,89712	0	3,912023	7,788862
5	-2,99573	-0,69315	2,995732	6,561319
6	-1,89712	0	2,995732	7,902952
7	-1,89712	-0,69315	3,912023	7,351994
8	-1,89712	-0,69315	2,995732	7,217743
9	-2,30259	-0,28768	3,555348	7,374416

Лінійна множинна регресійна модель залежності функції y від факторних ознак x_1, x_2 та x_3 методом найменших квадратів:

$$y_i = b_o + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + b_3 x_{i3}\,. \tag{4}$$

При цьому сума *s* квадратів відхилень:

$$s = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_o - b_1 x_{i1} - b_2 x_{i2} - b_3 x_{i3})^2 \to min. \tag{5}$$

Розраховано парні коефіцієнти кореляції і побудовано кореляційну матрицю (табл. 3).

Позиції табл. 3, що розташовані вище головної діагоналі незаповнені, оскільки табл. 3 є симетричною відносно головної діагоналі. Також її дані вказують, що відсутні тісно пов'язані між

собою пари серед факторних ознак x_1, x_2 та x_3. Очевидно, що існує зв'язок між функцією y і факторними ознаками x_1 ($r \approx 0{,}7534$) та x_2 ($r \approx 0{,}6488$) і практично відсутній зв'язок між функцією y і факторною ознакою x_3 ($r \approx -0{,}0028$).

Табл. 3

Кореляційна матриця

	x_1	x_2	x_3	y
x_1	1			
x_2	0,004917519	1		
x_3	0,006402013	0,004163889	1	
y	0,753417119	0,648799119	-0,00281997	1

Використовуючи додаток аналізу даних Excel, будується лінійна регресійна модель: $y = b_o + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$ (табл. 4).

Табл. 4

Таблиця регресійного аналізу

Регресійна статистика	
Множинний коефіцієнт кореляції *r*	0,991917437
Коефіцієнт детермінації	0,983900201
Скоригований коефіцієнт детермінації	0,974240322
Стандартна похибка	0,072220339
Спостереження	9

Дисперсійний аналіз					
	Df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимість F*
Регресія	3	1,593747989	0,53124933	101,854295	6,66145E-05
Залишки	5	0,026078887	0,005215777		
Загальне	8	1,619826876			

Коефіцієнти		*Стандартна похибка*	*t-статистика*	*P-значення*	*Нижні межі 95% надійного інтервалу*	*Верхні межі 95% надійного інтервалу*
Y-перетин (b_0)	9,05295971	0,22640312	39,98602015	1,8444E-07	8,47097196	9,63494745
x_1 (b_1)	0,61230639	0,04630919	13,22213991	4,4212E-05	0,49326487	0,73134791
x_2 (b_2)	0,83629355	0,07355812	11,36915327	9,2113E-05	0,64720638	1,02538072
x_3 (b_3)	-0,01009849	0,05558318	-0,18168239	0,8629678	-0,15297959	0,13278262

Для перевірки статистичної значущості коефіцієнтів множинної регресії застосовується критерій Стьюдента. Спочатку для рівня значущості α знаходиться $t_{\text{кр}} = t_{\text{кр}}(\alpha, n - m - 1)$. При цьому $t_{\text{кр}}$ повинно бути меншим за t_i ($|t_i| > |t_{\text{кр}}|$). У цьому випадку оцінка відповідного коефіцієнта рівняння регресії є статистично значущою. У іншому – відповідну змінну необхідно виключити з рівняння регресії і розрахунок регресії виконати заново.

В даному випадку загальна кількість спостережень $n = 9$, кількість факторів регресійної моделі $m = 3$, $\alpha = 0{,}05$, тому $t_{\text{кр}} = t_{\text{кр}}(0{,}05, 5) \approx 2{,}5706$. Для коефіцієнта при змінній x_3, яка відповідає швидкості різання *V* у початковій табл. 4 модуль значення $t_3 < t_{\text{кр}}$, тому його значення не є статистично значущим (при цьому і відповідне *P*-значення дорівнює наближено 0,863 і є більшим за рівень значущості $\alpha = 0{,}05$). Тобто сила різання в даному випадку практично не залежить від швидкості різання. Отже, змінна x_3 виключається з рівняння регресії. Далі розрахунок регресії виконується заново і відповідно до вищенаведеного.

У формулах (1)–(3) коефіцієнт b_3 дорівнює нулю і тому відповідні формули запишуться у вигляді виразів (6)–(8).

Степенева регресійна модель буде мати вигляд:

$$R = C_0\, S_z^{\,b_1} t^{b_2}, \tag{6}$$

де C_o, b_1 і b_2 – невідомі коефіцієнти, які знаходимо за допомогою регресійного аналізу моделі.

Для того, щоб застосувати метод найменших квадратів і знайти коефіцієнти C_o, b_1 і b_2 степеневу регресійну модель (6) за допомогою логарифмування перетворено у лінійну регресійну модель:

$$lnR = lnC_o + b_1 lnS_z + b_2 lnt, \quad (7)$$

Після цього вводимо наступні позначення: $lnR = y,\ lnC_o = b_o,\ lnS_z = x_1,\ lnt = x_2$.

Тоді рівність (2) у нових змінних запишеться наступним чином:

$$y = b_o + b_1 x_1 + b_2 x_2\ . \quad (8)$$

В результаті здійснення вищевказаних перетворень отримано таблицю 5.

Табл. 5

№	x_1	x_2	y
1	-2,99573	-0,69315	6,627461
2	-2,99573	0	7,254565
3	-2,99573	0	7,129514
4	-1,89712	0	7,788862
5	-2,99573	-0,69315	6,561319
6	-1,89712	0	7,902952
7	-1,89712	-0,69315	7,351994
8	-1,89712	-0,69315	7,217743
9	-2,30259	-0,28768	7,374416

Побудуємо лінійну множинну регресійну модель залежності функції y від факторних ознак x_1 та x_2. Це можна здійснити методом найменших квадратів:

$$y_i = b_o + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2}\ . \quad (9)$$

При цьому сума *s* квадратів відхилень:

$$s = \sum_{i=1}^{n} (y_i - b_o - b_1 x_{i1} - b_2 x_{i2})^2 \to min. \quad (10)$$

Далі розраховуються парні коефіцієнти кореляції і будується кореляційна матриця.

Табл. 6

	x_1	x_2	y
x_1	1	0,004917519	0,753417119
x_2	0,004917519	1	0,648799119
y	0,753417119	0,648799119	1

Використовуючи додаток аналізу даних Excel, будується лінійна регресійна модель $y = b_o + b_1 x_1 + b_2 x_2$. В результаті отримано таблицю регресійного аналізу.

Табл. 7

Таблиця регресійного аналізу

Регресійна статистика	
Множинний коефіцієнт кореляції *r*	0,991863859
Коефіцієнт детермінації	0,983793915
Скоригований коефіцієнт детермінації	0,978391887
Стандартна похибка	0,066145108
Спостереження	9

Дисперсійний аналіз					
	Df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимість F*
Регресія	2	1,593575824	0,796787912	182,1156534	4,25632E-06
Залишки	6	0,026251052	0,004375175		
Загальне	8	1,619826876			

Продовження таблиці 7

Коефіцієнти		*Стандартна похибка*	*t-статистика*	*P-значення*	*Нижні межі 95% надійного інтервалу*	*Верхні межі 95% надійного інтервалу*
Y-перетин (b_0)	9,01781765	0,107766079	83,67955583	1,9616E-10	8,754123551	9,281511744
x_1 (b_1)	0,61225269	0,042412747	14,4355821	6,9235E-06	0,508472444	0,716032953
x_2 (b_2)	0,83623833	0,067369779	12,41266236	1,66932E-05	0,671390414	1,001086237

В даному випадку $n = 9$, $m = 2$, $\alpha = 0{,}05$. Тому $t_{\text{кр}} = t_{\text{кр}}(0{,}05{,}6) \approx 2{,}2469$. Нерівність $|\mathrm{t}_i| > |\mathrm{t}_{\text{кр}}|$ виконується для усіх коефіцієнтів b_0, b_1 і b_2, тому вони є статистично значущими. Наближені значення коефіцієнтів: $b_0 \approx 9{,}018$, $b_1 \approx 0{,}612$, $b_2 \approx 0{,}836$.

Тому множинна лінійна регресійна модель (8) має наступний вигляд:

$$y_{\text{розр}} = 9{,}018 + 0{,}612x_1 + 0{,}836x_2 \,.$$

Відповідні значення y_i та $y_{i\,\text{розр}}$ приведені в табл. 8.

Табл. 8

№	y_i	$y_{i\,\text{розр}}$
1	6,627461	6,604035276
2	7,254565	7,183673871
3	7,129514	7,183673871
4	7,788862	7,856300808
5	6,561319	6,604035276
6	7,902952	7,856300808
7	7,351994	7,276662213
8	7,217743	7,276662213
9	7,374416	7,367481665

Якість побудованої регресійної моделі перевіряється за критерієм Фішера, тобто порівнянням статистики F-моделі із критичним значенням $F_{\text{кр}}$. За результатами табл. 7 перевіряється адекватність побудованої моделі: $F \approx 182{,}116$ та можна знайти за формулою:

$$F = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{i\,\text{розр}} - \bar{y}_{i\,\text{розр}}\right)^2}{m} \cdot \frac{n-m-1}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{i\,\text{розр}}\right)^2}\,, \tag{11}$$

де y_i та $y_{i\,\text{розр}}$ – значення залежної змінної та розрахункове значення залежної змінної при i-му спостереженні, $\bar{y}_{i\,\text{розр}}$ – середнє розрахункове значення залежної змінної $\left(\bar{y}_{i\,\text{розр}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{i\,\text{розр}}\right)$.

Критичне значення $F_{\text{кр}}$ знаходиться за допомогою статистичної функції $F_{\text{кр}}(\alpha, k_1, k_2)$, де α – рівень значущості, $k_1 = m$, $k_2 = n - m - 1$. Тоді $k_1 = 2$, $k_2 = 9 - 2 - 1 = 6$, $\alpha = 0{,}05$ знайдено критичне значення $F_{\text{кр}}(0{,}05, 2, 6) \approx 5{,}143$. В даному випадку $F > F_{\text{кр}}$, тому рівняння регресії є значущим і модель є достовірною на рівні значущості $\alpha = 0{,}05$. Дана модель є також достовірною на рівні значущості $\alpha = 0{,}01$, бо в цьому випадку критичне значення $F_{\text{кр}}(0{,}01, 2, 6) \approx 10{,}925$ і $F > F_{\text{кр}}$. Крім того, критеріальна статистика показує, що рівняння регресії є значущим на рівні 0,00004.

Множинний коефіцієнт кореляції $r \approx 0{,}992$ вказує на сильну залежність результативної ознаки від обраних факторних ознак та обчислюється за формулою:

$$r = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{i\,\text{розр}}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}}\,. \tag{12}$$

Адекватність регресійної моделі вибірковим даним можна оцінити за коефіцієнтом детермінації r^2, що показує частину варіації значень результативної ознаки y, що описується рівнянням регресії. Коефіцієнт детермінації нашої моделі $r^2 \approx 0{,}984$, тобто 98,4% варіації даних результативної ознаки y описуються рівнянням регресії.

Скоригований коефіцієнт детермінації r_{adj}^2:

$$r_{adj}^2 = 1 - (1 - r^2) \cdot \frac{n-1}{n-m-1}\,. \tag{13}$$

Значення $r_{adj}^2 \approx 0{,}978$ і дозволяє стверджувати про адекватність даної моделі.

Для наочності висновків побудовано емпіричну y і теоретичну $y_{\text{розр}}$ лінії регресії (рис. 1).

Існує методика детальної оцінки регресійних моделей за допомогою певних абсолютних, порівняльних та якісних характеристик. Усі ці характеристики відносяться до прогнозних похибок залежної розрахункової змінної $y_{\text{розр}}$.

Абсолютні похибки прогнозу:

1. Середня похибка, або показник зміщення прогнозу (mean error ($M.E.$)):

$$M.E. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{i\,\text{розр}}\right). \quad (14)$$

2. Середня абсолютна похибка прогнозу (mean absolute error ($M.A.E.$)):

$$M.A.E. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|y_i - y_{i\,\text{розр}}\right|. \quad (15)$$

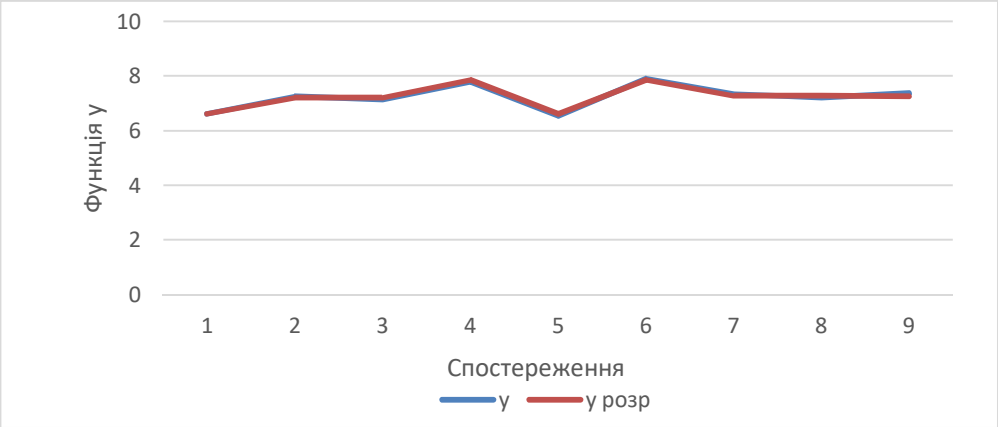

Рис. 1. **Емпірична та теоретична лінії регресії**

3. Середньоквадратична похибка прогнозу (mean squared error ($M.S.E.$)):

$$M.S.E. = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{i\,\text{розр}}\right)^2}. \quad (16)$$

В нашому випадку $M.E. \approx 1{,}2829 \cdot 10^{-15} \approx 0$, $M.A.E. \approx 0{,}0496$, $M.S.E. \approx 0{,}054$.

Порівняльні показники оцінювання якості прогнозу:

1. Відносний показник зміщення прогнозу у відсотках, або середнє відхилення у відсотках (mean percentage error ($M.P.E.$)):

$$M.P.E. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{y_i - y_{i\,\text{розр}}}{y_i}\right) \cdot 100\%. \quad (17)$$

2. Середня абсолютна похибка прогнозу у відсотках (mean absolute percentage error ($M.A.P.E.$)):

$$M.A.P.E. = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - y_{i\,\text{розр}}}{y_i}\right| \cdot 100\%. \quad (18)$$

3. Коефіцієнт невідповідності Тейла (Theil inequality coefficient K_T):

$$K_T = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_{i\,\text{розр}}\right)^2} \Big/ \left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2} + \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{i\,\text{розр}}^2}\right). \quad (19)$$

Отримано $M.P.E. \approx -0{,}0059\%$, $M.A.P.E. \approx 0{,}681\%$, $K_T \approx 0{,}004$. Чим ближчі $M.P.E.$ та коефіцієнт невідповідності Тейла K_T до нуля, тим кращий якісний прогноз множинної регресійної моделі. Рівень показника $M.A.P.E.$ та роз'яснення (табл. 8).

Табл. 8

№	Рівень $M.A.P.E.$	Висновки
1	Менше 10%	Висока якість
2	Від 10% до 20%	Досить добра якість
3	Від 21% до 50%	Задовільна якість
4	Понад 50%	Незадовільна якість

Аналізуючи отримані характеристики проміжної множинної регресійної моделі, можна зробити висновок, що дана проміжна модель дає практично незміщений прогноз.

Оскільки $M.A.P.E. \approx 0{,}681\%$ (що менше 1%) і коефіцієнт невідповідності Тейла близький до нуля ($K_T \approx 0{,}004$), то проміжна модель дає прогноз високої якості.

Далі за допомогою потенціювання перейдемо від регресійної моделі (7) до степеневої регресійної моделі (6). Для цього спочатку знайдемо коефіцієнт C_0: $C_0 = e^{b_0} \approx e^{9{,}018} \approx 8248{,}756$.

© Н.О. Балицька, О.І. Прилипко, Л.Є. Глембоцька

Отже $R_{\text{розр}} = 8248{,}756 \cdot {S_z}^{0{,}612} t^{0{,}836}$. Відносна похибка обчислень: $\Delta = \frac{|\text{R} - \text{R}_{\text{розр}}|}{|\text{R}|}$.

Табл. 9

№	R, Н	$\text{R}_{\text{розр}}$, Н	Відносна похибка	
1	755,5613978	738,06820664	0,023152574	2,315%
2	1414,547686	1317,73875072	0,068438085	6,844%
3	1248,269858	1317,73875072	0,055652143	5,565%
4	2413,568367	2581,95157785	0,069765254	6,977%
5	707,2040837	738,06820664	0,043642456	4,364%
6	2705,256116	2581,95157785	0,045579617	4,558%
7	1559,302635	1446,15643249	0,072562054	7,256%
8	1363,408273	1446,15643249	0,060692135	6,069%
9	1594,660137	1583,64263269	0,006908998	0,691%
Середнє	1529,086506	1527,941396	0,049599258	4,960%
Максимум			0,072562054	7,256%

Середня відносна похибка $M.A.P.E.$ наближено дорівнює 4,960%, а максимальна – 7,256%. На рис. 2 зображено емпіричну R і теоретичну $R_{\text{розр}}$ лінії регресії моделі.

Рис. 2. **Емпірична та теоретична лінії регресії**

Якість остаточної побудованої степеневої регресійної моделі перевіряється за критерієм Фішера $F \approx 75{,}619$, а критичне значення $F_{\text{кр}}(0{,}05, 2, 6) \approx 5{,}143$, при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$, $k_1 = 2$, $k_2 = 9 - 2 - 1 = 6$. В даному випадку $F > F_{\text{кр}}$, тому рівняння регресії є значущим і модель є достовірною. Рівняння регресії є значущим і модель є достовірною також і на рівні значущості $\alpha = 0{,}01$, бо $F_{\text{кр}}(0{,}01, 2, 6) \approx 10{,}925$ і при цьому нерівність $F > F_{\text{кр}}$ також буде виконуватись.

Значення множинного коефіцієнта кореляції $r \approx 0{,}989$, який показує сильну залежність результативної ознаки від обраних факторних ознак. Зв'язок між досліджуваними характеристиками є тісним, оскільки $r > 0{,}9$.

Адекватність регресійної моделі вибірковим даним можна оцінити за коефіцієнтом детермінації r^2, що показує частину варіації значень результативної ознаки R, що описується рівнянням регресії. Значення коефіцієнту детермінації $r^2 \approx 0{,}978$, тобто 97,8% варіації даних результативної ознаки R описуються рівнянням регресії. Значення скоригованого коефіцієнта детермінації $r^2_{adj} \approx 0{,}965$ і воно є високе, що дозволяє стверджувати про адекватність даної моделі.

Абсолютні похибки прогнозу: $M.E. \approx 1{,}145$, $M.A.E. \approx 79{,}248$, $M.S.E. \approx 93{,}562$. Далі за формулами (13)–(15) визначено $M.P.E. \approx -0{,}146\%$, $M.A.P.E. \approx 4{,}960\%$, $K_T \approx 0{,}028$. Аналізуючи здобуті характеристики степеневої регресійної моделі, можна зробити висновок, що модель дає практично незміщений прогноз. Оскільки відносна похибка проміжного прогнозу $M.A.P.E. \approx 4{,}960\%$ (що менше 5%) і коефіцієнт невідповідності Тейла близький до нуля ($K_T \approx 0{,}028$), то степенева множинна регресійна модель дає прогноз високої якості.

Також побудуємо показникову та лінійну регресійні моделі для того ж набору експериментальних даних.

Показникова множинна регресія матиме вигляд: $R = a_0\, a_1{}^{S_z} a_2{}^{t}$, де a_o, a_1, a_2 – невідомі коефіцієнти. В результаті обчислень отримано наступну показникову регресійну модель:

$$R_{\text{розр}} = 300{,}136 \cdot 830{,}253^{S_z} \cdot 3{,}186^{t}\ .$$

На рис. 3 зображено емпіричну R і теоретичну $R_{\text{розр}}$ лінії регресії.

Лінійну множинну регресію розглянемо у вигляді: $R = C_o + C_2 S_z + C_3 t$, де C_o, C_1, C_2 – невідомі коефіцієнти. В результаті обчислень отримано наступну лінійну регресійну модель:

$$R_{\text{розр}} = -723{,}464 + 9789{,}881 S_z + 1698{,}083 t\ .$$

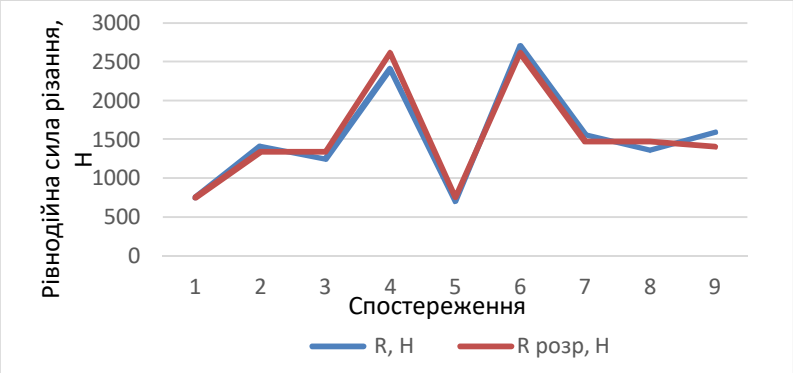

Рис. 3. **Емпірична і теоретична лінії регресії**

На рис. 4 зображено емпіричну R і теоретичну $R_{\text{розр}}$ лінії регресії моделі:

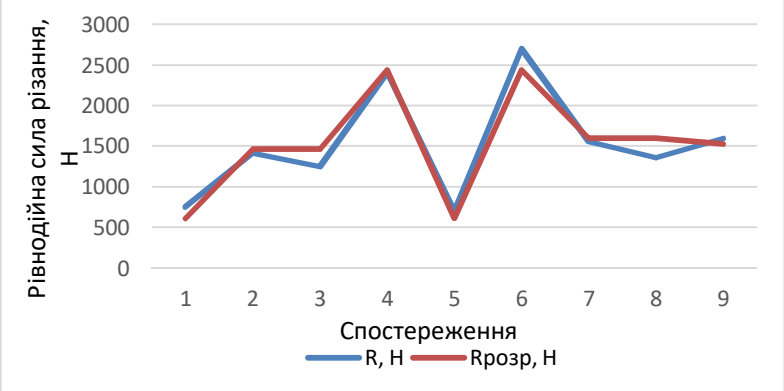

Рис. 4. **Емпірична та теоретична лінії регресії**

В порівняльних таблицях 10 і 11 наведені похибки прогнозування рівнодійної сили різання для усіх трьох регресійних моделей.

Табл. 10

Відносна похибка прогнозування сили різання для кожного експерименту

№ експе-рименту	R, H	Степенева регресійна модель		Показникова регресійна модель		Лінійна регресійна модель	
		$R_{\text{розр}}$, H	Відносна похибка, %	$R_{\text{розр}}$, H	Відносна похибка, %	$R_{\text{розр}}$, H	Відносна похибка, %
1	755,561	738,068	2,315	749,695	0,776	615,072	18,594
2	1414,548	1317,739	6,844	1338,106	5,404	1464,113	3,504
3	1248,270	1317,739	5,565	1338,106	7,197	1464,113	17,291
4	2413,568	2581,952	6,977	2620,666	8,581	2443,101	1,224
5	707,204	738,068	4,364	749,695	6,008	615,072	13,028
6	2705,256	2581,952	4,558	2620,666	3,127	2443,101	9,691
7	1559,303	1446,156	7,256	1468,269	5,838	1594,060	2,229
8	1363,408	1446,156	6,069	1468,269	7,691	1594,060	16,917
9	1594,660	1583,643	0,691	1401,678	12,102	1529,087	4,112
Середнє	1529,087	1527,941	4,960	1528,350	6,303	1529,087	9,621

Аналіз показників побудованих регресійних моделей прогнозування сили різання свідчить про найвищу якість степеневої регресійної моделі:

$$R_{\text{розр}} = 8248{,}756 \cdot {S_z}^{0{,}612} t^{0{,}836}.$$

З отриманої математичної залежності випливає, що в інтервалі зміни режимів різання не встановлено впливу швидкості різання на значення рівнодійної сили різання; високий вплив на значення сили різання здійснює глибина різання (коефіцієнт кореляції 0,753), і помірний вплив – подача (коефіцієнт кореляції 0,649).

Табл. 11

Показники регресійних моделей прогнозування сили різання

№	*Регресійні моделі*	r	r^2	r^2_{adj}	F	$M.A.P.E.$	K_T
1	Степенева	0,989	0,978	0,965	75,619	4,960%	0,028
2	Показникова	0,983	0,966	0,945	50,339	6,303%	0,035
3	Лінійна	0,971	0,942	0,908	27,229	9,621%	0,046

Висновки. На основі експериментальних досліджень сили різання при торцевому фрезеруванні сплаву NiTi було побудовано степеневу, показникову та лінійну множинні регресійні моделі залежності рівнодійної сили різання від режимів різання. Було описано методику статистичної обробки експериментальних даних та виконано порівняльний аналіз якості цих моделей.

Встановлено, що усі регресійні моделі адекватні та дають прогноз високої якості за коефіцієнтами кореляції та детермінації (вище 0,9), критерієм Фішера (з рівнем значущості не менше 0,01), показником середньої абсолютної похибки прогнозу (до 10%) та коефіцієнтом невідповідності Тейла (не вище 0,046). При цьому степенева множинна регресійна модель має найбільшу якість за усіма показниками. Згідно побудованої степеневої множинної регресійної моделі в інтервалі зміни режимів різання не встановлено впливу швидкості різання на значення рівнодійної сили різання, високий вплив на значення сили різання здійснює глибина різання (коефіцієнт кореляції 0,753), і помірний вплив – подача (коефіцієнт кореляції 0,649). Отримані результати можуть бути корисними для подальшого дослідження процесу різання і розробки ефективних технологій механічної обробки нітинолів.

Список використаних джерел

1. Kaya, E., Kaya, İ. A review on machining of NiTi shape memory alloys: the process and post process perspective. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2019. 100 (7), pp. 2045–2087. https://doi.org/10.1007%2Fs00170-018-2818-8.

2. Velmurugan, C., Senthilkumar, V., Dinesh, S. & Arulkirubakaran, D. Machining of NiTi-shape memory alloys – A review. Machining Science and Technology, 2018. 22 (3), pp. 355–401. https://doi.org/10.1080/10910344.2017.1365894.

3. Томашевський О.О., Балицька Н.О., Прилипко О.І. Скінченно-елементне моделювання процесу мікрофрезерування нітинолу. Технічна інженерія. Серія: Механічна інженерія, 2024. Вип. 1(93). С. 81–88. – Режим доступу: https://doi.org/10.26642/ten-2024-1(93)-81-88.

4. Балицька Н.О., Мельничук П.П. Мікрофрезерування, як спосіб текстурування поверхонь сплавів Ni-Ti для модифікації змочуваності. Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки, 2025. Вип. 347(1). С. 478–485. https://heraldts.khmnu.edu.ua/index.php/heraldts/article/view/1287/1364.

5. Altas, E., Gokkaya, H. and Ozkan, D. Investigation of the effects of machining parameters on tool life and surface roughness during the face milling of the NiTi shape memory alloy with uncoated tools. Materials Science, Preprints, 2020. 2020080383. https://doi.org/10.20944/preprints202008.0383.v1

6. Балицька Н.О. Особливості торцевого фрезерування сплавів Ni-Ti з ефектом пам'яті форми. Технічна інженерія, 2022. № 2(90). С. 3–12. https://doi.org/10.26642/ten-2022-2(90)-3-12.

7. Виговський Г.М., Громовий О.А., Плисак М.М. Дослідження впливу сил різання при чистовому торцевому фрезеруванні на процеси формоутворення оброблюваних поверхонь. Технічна інженерія, 2023. (2(92). С. 53–59. https://doi.org/10.26642/ten-2023-2(92)-53-59.

8. Глембоцька Л.Є., Мельничук П.П. Моделювання силових залежностей при торцевому фрезеруванні. Вісник ТДТУ, Тернопіль, 2008. 13(3). С. 79–87. http://elartu.tntu.edu.ua/handle/123456789/17209

© Н.О. Балицька, О.І. Прилипко, Л.Є. Глембоцька

9. Лапач С.М. Проблеми побудови регресійних моделей процесів різання металів. Вісник НТУУ «КПІ». Серія: Машинобудування, 2014. №3 (72). С. 40-47. http://nbuv.gov.ua/UJRN/VKPI_mash_2014_3_8

10. Радченко С.Г. Методологія регресійного аналізу. К.: Корнійчук, 2011. 376 с.

11. Бахрушин В.Є. Методи аналізу даних: навчальний посібник для студентів. Запоріжжя: КПУ, 2011. 268 с. http://elib.chdtu.edu.ua/e-books/4122

12. Літнарович Р.М. Побудова і дослідження математичної моделі за джерелами експериментальних даних методами регресійного аналізу: навч. посібник, Рівне. МЕГУ, 2011. 140 с.

13. Торцева фреза Coromill-300 / Sandvik Coromant [Electronic resource]. – Доступно за адресою: https://www.sandvik.coromant.com/en-us/product-details?c=R300-052C5-08H.

14. Вставка для фрезерування CoroMill®300 / Sandvik Coromant [Electronic resource]. – Доступно за адресою: https://www.sandvik.coromant.com/en-us/product-details?c=R300-0828E-KL%20%20%20%20%20%20%20H13A

15. Multicomponent dynamometers 9257B / KISTLER [Electronic resource]. – Доступно за адресою: https://www.kistler.com/INT/en/cp/multicomponent-dynamometers-9257b/P0000675

Рецензент: Полонський Л.Г., д.т.н., проф., професор кафедри механічної інженерії Державного університету «Житомирська політехніка»

© Н.О. Балицька, О.І. Прилипко, Л.Є. Глембоцька