

Р. М. Пастернак

Луцький національний технічний університет

ПОРІВНЯННЯ КІНЕМАТИКИ РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ ЧАСТИНОК У ПРОСТОРІ-ЧАСІ ТА ЕВКЛІДОВИМУ 4-ПРОСТОРІ

Запропоновано геометричне трактування кінематики частинок темної матерії і темної енергії в евклідовому 4-просторі та схему синтезу з них лептонів і нуклонів. Введено поняття космічних та супутніх з розширенням Всесвіту систем координат. Показано, що накладене на частинки обмеження займати лише частину площини Мінковського в просторі-часі фізично не обґрунтоване. На прикладі задачі про перегони продемонстровано відмінності кінематики частинок в просторі-часі та евклідовому 4-просторі. Отримано підтвердження, що хід метричного часу збігається з ходом абсолютного часу класичної механіки і безпосередньо пов'язаний зі швидкістю розширення Всесвіту.

Ключові слова: темні частинки, супутня система координат, власний напрям системи координат.

R. Pasternak

COMPARISON OF THE KINEMATICS OF RELATIVISTIC PARTICLES IN SPACE-TIME AND EUCLIDIAN 4-SPACE

A geometric interpretation of the kinematics of dark matter and dark energy particles in Euclidean 4-space and a scheme for synthesizing leptons and nucleons from them are proposed. The concept of cosmic and coordinate systems accompanying the expansion of the Universe is introduced. It is shown that the restriction imposed on particles to occupy only a part of the Minkowski plane in space-time is not physically justified. The differences in the kinematics of particles in space-time and Euclidean 4-space are demonstrated using the example of the race problem. Confirmation is obtained that the course of metric time coincides with the course of absolute time in classical mechanics and is directly related to the rate of expansion of the Universe.

Keywords: dark particles, co-occurring coordinate system, proper direction of the coordinate system.

Постановка завдання. Порівняти кінематику релятивістських частинок у просторі-часі [1] та евклідовому 4-просторі [2], показати тотожність абсолютного часу класичної механіки і метричного часу релятивістської механіки частинок змінної маси (МЗМ) [2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В [1] показано, що величина 4-швидкості усіх частинок на світовій лінії в просторі-часі однакова і не залежить від напрямку їхнього поширення. У [2] висунули гіпотезу, що причиною однакових величин 4-вимірних швидкостей релятивістських частинок є розширення Всесвіту. Побудована на основі простору-часу польова Стандартна космологічна модель (Λ CDM) [1] та порівняння результатів розрахунків з астрономічними спостереженнями показали, що кривина Всесвіту практично відсутня: $\Omega_k = (0,001 \pm 0,002)$ [3]. Додатково виявилось, що простір-час (в енергетичному вимірі) на 95 % заповнений неспостережуваними візуально (темними) матерією та енергією [3]. Серед недоліків Λ CDM-моделі виявилось протиріччя Габбла [4], як наслідок неузгодження системи координат простору-часу з властивостями симетрії Всесвіту. Використання 4-вимірної геометрії (на відміну від тривимірної простору-часу) і внутрішнє означення ходу часу [2] дають ширші можливості аналізу та інтерпретації релятивістських процесів з різновимірними частинками [5].

Метою даної роботи є надання фізичного змісту перетворенням Лоренца та розвиток апарату релятивістської механіки в адекватній їй 4-вимірній геометрії.

1. Частинки та їхні координати в 4-просторі

1.1. Космічні системи координат. Відповідно до космологічного принципу [4] та поданої в [2] моделі, Всесвіт центральносиметричний, однорідний, ізотропний та рівномірно розширюється без обертання. Зважаючи на властивості симетрії, початок системи координат в евклідовому просторі $\mathcal{R}^4$ з ортами $(\vec{\zeta}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ природно розміщувати в центрі симетрії (полюсі) Всесвіту. Враховуючи центральну симетрію, систему координат доповнюють поняттям власного напрямку $\vec{\zeta}$, який збігається з напрямом радіус-вектора спостерігача та називають космічною (КСК) [2]. Для зручності подальших трактувань власний напрям будемо також називати *вертикальним* (темним, візуально неспостережуваним), а ортогональну до нього гіперповерхню (об'єм) з ортами $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – *горизонтальною* (візуально спостережуваною).

1.2. Метричний час. 4-швидкість та її складові в КСК. Нехай траєкторія частинки є аналітичною вектор-функцією $\vec{R}(\chi)$ скалярного параметра $\chi = ct$, пропорційного часу t [2]. Відповідно до означення [6] вектор 4-швидкості частинки дорівнює:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{R}}{dt} = c \frac{d\vec{R}}{d\chi} = c\vec{\xi}. \quad (1)$$

Тут скаляр $c = \text{const}$, а $\vec{\xi}$ – одиничний 4-вектор напрямку дотичної до траєкторії частинки. Зважаючи, що прирости часу t пропорційні метричній мірі $dR = cdt$ простору $\mathcal{R}^4$, означений так час називають *метричним* [2]. Отже, величини 4-швидкості усіх частинок однакові, дорівнюють c і не залежать від напрямку їхнього поширення. Відповідно, 4-швидкість $\vec{V}$ та 4-пришвидження $\vec{A}$ частинок ортогональні: $(\vec{V}, \vec{A}) = 0$.

Скориставшись записом елементарного переміщення частинки з виділеними вертикальною та горизонтальною складовими $d\vec{R} = ds\vec{\xi} + d\vec{r}$, представимо 4-вектор $\vec{V}$ сумою $\vec{v}_0$ вертикальної та $\vec{v}$ горизонтальної складових 4-швидкості:

$$\vec{V} = \vec{\xi} \frac{ds}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\xi}v_0 + v\vec{\tau}. \quad (2)$$

Тут $\vec{\tau}$ – одиничний вектор напрямку горизонтальної складової швидкості частинки. Зважаючи, що $(\vec{\xi}, \vec{\tau}) = \cos \alpha$, де α – (введений Дж. Бредлі) кут астрономічної аберації [4], перепишемо вирази для величин складових 4-швидкості частинок у зручній для геометричної інтерпретації формі:

$$v_0 = c \cos \alpha; \quad v = c \sin \alpha. \quad (3)$$

На доповнення до метричного, в кожній з КСК існує поняття часу Габбла t_H [2], що відповідає часовій відстані від полюсу Всесвіту до його конкретної точки $s = ct_H$ [2], де стала c збігається зі швидкістю розширення Всесвіту. (Додамо, що хід часу Габбла збігається з ходом власного часу частинок на світовій лінії простору-часу.)

1.3. Спостережувані та неспостережувані (темні) частинки. В евклідовому 4-просторі дискретної МЗМ [2] холодній темній матерії [1] (ефіру Лоренца у трактуванні [2]) ставлять у відповідність одновимірні (скалярні) фундаментальні частинки (DaM), а темній енергії – тривимірні (векторні) фундаментальні частинки (DaE) [1] (носії електромагнетної та, гіпотетично, гравітаційної взаємодій). Частинки DaM та DaE ортогональні, тому, як правило, не взаємодіють між собою. У роботі [2] виходять з гіпотези, що первісно 4-простір був заповнений хаосом фундаментальних частинок DaM та DaE. Високоенергетичні зустрічні фундаментальні частинки гіпотетично могли взаємно перетворюватися $\text{DaE} + \text{DaE} \leftrightarrow \text{DaM} + \text{DaM}$, перерозподіляючи енергію рівномірно по чотирьох ступенях вільності. Тобто, на одновимірні DaM припадало 25 %, а на тривимірні DaE – 75 % густини енергії [3].

Крім названих DaM та DaE, ΛCDM -модель [1] допускає існування гібридних чотиривимірних (спостережуваних) частинок (яких в енергетичному вимірі біля 5 % [3]), більшість з яких утворилися в процесі Великого Вибуху у результаті об'єднання частинок DaM та DaE [4]. Якщо в [5] класи елементарних частинок розрізняють за числом спінових поляризацій, то в [2] запропоновано їх альтернативне трактування: DaM – одновимірні частинки зі спіном нуль, DaE – тривимірні частинки зі спіном одиниця, а чотиривимірні – зі спіном $\frac{1}{2}$ [2].

Відповідно до законів збереження енергії та векторів 4-імпульсу частинок, у результаті Великого Вибуху [4] із DaE могли утворюватися парні лептони за схемою [2]: $\text{DaE} + \text{DaE} \leftrightarrow \text{електрон} + \text{позитрон}$ (ефект Швінгера [5]) (енергія зв'язку між DaM та DaE в електрона та позитрона дорівнює половині енергії спокою електрона).

У [2] допускають, що нуклони могли утворюватися в результаті дисоціації частинок DaE під дією частинок DaM на два віртуальні фрагменти – двовимірний глюон та одновимірний залишок; спостережуваними є лише їхні комплекси (колірний конфайнмент [5]). Синтез нуклонів міг відбуватися з трьох DaM та трьох DaE – $3\text{DaM} + 3\text{DaE} \rightarrow \text{нуклон} + \text{DaE}$ за наведеною на рис. 1 схемою. При цьому виділяється енергії зв'язку, що еквівалентна енергії частинки DaE. У [5] віртуальним компонентам нуклона відповідають три кварки – гібриди глюона та DaM, як наведено

на рис. 2. У [2] аромати кварків та кольори глюонів [5] пов'язують з різними енергіями та просторовою орієнтацією їхніх складових. Взаємоперетворення DaM та DaE можна спостерігати, наприклад, при взаємодії високоенергетичних протонів: $p + p \rightarrow p + p + p + \tilde{p}$ [5] з породженням антипротона $\tilde{p}$ (аналогічно до описаної вище енергії зв'язку електрона).

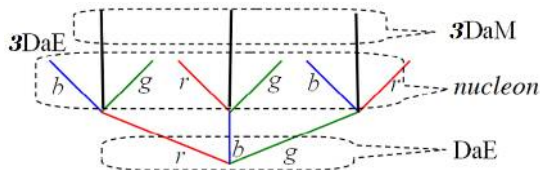


Рис. 1. Схема синтезу нуклона

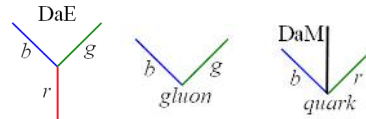


Рис. 2. Схеми частинок DaE, глюона і кварка

2. Порівняння кінематики частинок в евклідовому 4-просторі та просторі-часі

2.1. Площина переміщень в евклідовому 4-просторі. Виділимо в просторі $\mathcal{R}^4$ векторами $\vec{r}$ і $\vec{\zeta}$ площину, як подано на рис. 3, де наведено ділянки траєкторій однакової довжини (відповідають проміжку метричного часу $2t_1$) трьох різних за властивостями частинок. Відповідно до симетрії Всесвіту та (1), траєкторія частинок холодної темної матерії лежить виключно у вертикальному напрямі (повністю відсутня горизонтальна складова швидкості – $\alpha = 0$), а траєкторія частинок DaE ортогональна до траєкторії частинок DaM, тобто лежить в горизонтальній гіперплощині (виключно при $\alpha = \pi/2$). Спінори, що містять як DaM так і DaE частинки, займають весь 4-простір (за виключенням напрямів $\alpha = 0$ та $\alpha = \pi/2$), тобто третя частинка здійснює зворотно-поступальний рух в горизонтальній гіперплощині з незмінною за величиною швидкістю v та поступальний рух вздовж вертикального напрямку зі швидкістю $\vec{v}_0$.

Нехай в початковий момент усі три частинки знаходяться в околі точки A з координатами $\{0,0\}$. Ділянки траєкторії DaM відповідає відрізок AE , DaE – відрізок AF , а складовими траєкторії спінора – ламана лінія ABD , що містить розміщені під кутом α до власного напрямку $\vec{\zeta}$ КСК два прямолінійні відрізки AB та BD . За проміжок часу t_1 спінор переміститься в точку простору з координатами $\{ct_1 \sin \alpha, ct_1 \cos \alpha\}$, а на ділянці траєкторії BD в точку: $\{0, 2ct_1 \cos \alpha\}$. Отже, прирости часу Габбла для трьох частинок різні: для DaM він збігається з метричним $\Delta t_{H1} = 2ct_1$, для DaE відсутній, а для спінора дорівнює $\Delta t_{H3} = 2t_1 \cos \alpha$.

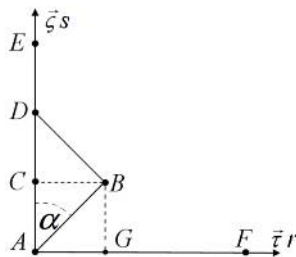


Рис. 3. Ділянки траєкторій трьох різних типів частинок.

2.2. Супутня система координат. Площина Мінковського. Позначимо аббревіатурою КСК_C окрему КСК, що пов'язана з власним радіус-вектором спостерігача та наведемо її інтерпретацію як аналог простору-часу супутньої з розширенням Всесвіту системи координат (ССК). Нехай орти $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ у КСК_C збігаються з відповідними ортами ССК простору-часу, а вісь координатного (габблового) часу ССК відкладена вздовж власного напрямку $\vec{\zeta}_C$ КСК_C. Покажемо, що особливість простору-часу полягає у використанні проекції четвертого виміру на власний напрям $\vec{\zeta}_C$ КСК_C.

Оскільки власним часом світової лінії (координатним) [2] є час Габбла t_H , запишемо вектор 4-швидкості $\vec{V}_H$ частинки, визначеної за цим часом:

$$\vec{V}_H = \frac{d\vec{V}}{dt} \frac{dt}{dt_H} = c\vec{\zeta}_H + ctg\alpha \vec{\tau}_H = \vec{v}_{0H} + \vec{v}_H. \quad (4)$$

Тут $\vec{v}_{0H}$ та $\vec{v}_H$ – неспостережувана та спостережувана складові 4-швидкості $\vec{V}_C$, що визначені за часом Габбла. Зважаючи, що при $\alpha > \pi/4$ величина $v_H = c \operatorname{tg} \alpha > c$, у спеціальній теорії відносності (СТВ) [1] зміни кута α обмежують $\alpha < \pi/4$. Насправді, швидкість v_H є лише проміжною змінною при перетвореннях Лоренца, отже обмеження $\alpha < \pi/4$ введено штучно.

Якщо прямий перехід від метричного часу до координатного однозначний, то зворотна процедура, тобто перехід від координатного часу до метричного, неоднозначна – одному координатному часу може відповідати безліч метричних часів різних частинок. Більше того, якщо використання координатного часу призводить до моделі Всесвіту у формі сферичної поверхні, то в МЗМ Всесвіт моделюють сферою, що заповнена матеріальними частинками [2].

2.3. Тракткування перетворень Лоренца в евклідовому 4-просторі. Запропонований Г. А. Лоренцом спосіб деформації інтервалів полягає у відновленні повної довжини траєкторії та містить два етапи. На першому траєкторію частинки проєктують на радіус-вектор спостерігача та отримують залежність проєкцій ділянок траєкторій за часом Габбла:

$$ds(t_H) = dR(t)(\vec{\xi}, \vec{\zeta}) = dR(t) \cos \alpha. \quad (5)$$

На другому етапі вираз (5) деформують так, щоб отримати залежність довжини $\ell(t)$ траєкторії частинки від метричного часу t :

$$d\ell(t) = \frac{ds(t_H)}{\cos \alpha} = \gamma ds(t_H) = dR(t). \quad (6)$$

Тут $\gamma = (\cos \alpha)^{-1}$ – Лоренц-фактор.

3. Кінематика перегонів у класичній та релятивістській механіках

Вперше задачу про перегони сформулював в VI ст. до н. е. Зенон Елейський для умовних Ахілла та черепахи, тому надалі будемо використовувати саме такі назви для матеріальних точок та запропонований ним спосіб розв'язку [7]. Нехай задано величини однакових за напрямом швидкостей v_A Ахілла та v_T черепахи і початкову відстань a між ними. Необхідно визначити проміжок часу, протягом якого Ахілл наздожене черепаху.

3.1. Класична кінематика перегонів. Оскільки перегони відбуваються вздовж прямої, Ахілл подолає відстань a за проміжок абсолютного часу класичної механіки $t_1 = a/v_A$. За той же проміжок часу черепаха відповзе на відстань $b = v_T t_1 = a(v_T/v_A)$, що в $q = v_T/v_A$ разів відрізняється від початкової відстані a між ними, тобто $b = qa$. На другій ітерації, за проміжок часу $t_2 = b/v_A = qt_1$, Ахілл подолає відстань b , натомість черепаха відповзе на відстань $c = v_T t_2 = t_1 q^2$. Нев'язку доведеться долати нескінченне число разів, а час погоні складе:

$$T = t_1(1 + q + q^2 + \dots + q^n), \text{ де } n \rightarrow \infty. \quad (7)$$

3.2. Кінематика перегонів у МЗМ. У просторі $\mathcal{R}^4$ задачу про перегони геометрично моделюють прямолінійними траєкторіями на площині $\{\vec{i}, \vec{\zeta}\}$. На рис. 4 наведено суміщені схеми траєкторій Ахілла та черепахи на першій ітерації (для економії місця рисунок повернуто на $\pi/2$).

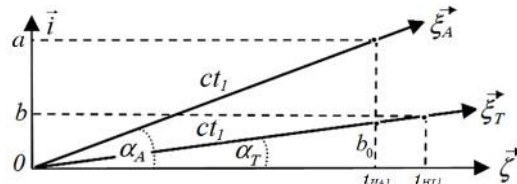


Рис. 4. Геометрична схема першої ітерації

Відповідно до (3), траєкторія Ахілла у КСК складає з його власним напрямом $\vec{\zeta}$ кут α_A , траєкторія черепахи – кут α_T [2]. Форма запису величини горизонтальної складової 4-швидкості $\vec{v}_A$ Ахілла вздовж орта $\vec{i}$ збігається з класичною [7]

$$v_A = c \sin \alpha_A = c \frac{a}{ct_1} = \frac{a}{t_1}, \quad (8)$$

© Р. М. Пастернак

а проміжок метричного часу t_1 , протягом якого Ахілл подолає відстань a в напрямі орта $\vec{i}$, також збігається з відповідним у класичній механіці $t_1 = a / v_A$. Горизонтальна складова швидкості черепахи дорівнює $v_T = c \sin \alpha_T$, тому за час t_1 вона долає в напрямі орта $\vec{i}$ відстань

$$b = v_T t_1, \quad (9)$$

що збігається з наведеною вище класичною.

Величини горизонтальних переміщень після кожної наступної ітерації будуть в $q = b / a$ разів відрізнятись від відповідних величин на попередній ітерації

$$q = \frac{b}{a} = \frac{v_T t_1}{v_A t_1} = \frac{v_T}{v_A} = \frac{\sin \alpha_T}{\sin \alpha_A}, \quad (10)$$

а вираз для метричного часу T перегонів не відрізнятиметься від виразу (7). Тобто, хід метричного часу МЗМ збігається з ходом абсолютного часу класичної механіки:

$$T = \frac{t_1}{1 - q} = \frac{a}{c(\sin \alpha_A - \sin \alpha_T)} = \frac{a}{v_A - v_T}. \quad (11)$$

3.3. Назад, до стартів. Розглянемо усю ділянку перегонів від стартів до фінішу за умови $cT \ll R_H$, де R_H – радіус Габбла [4] (квазістаціонарність Всесвіту). Якщо в класичній механіці точки старту та фінішу бігунів перебувають на одній прямій, то на площині $\{\vec{i}, \vec{\zeta}\}$ в просторі $\mathcal{R}^4$ траєкторії Ахілла та черепахи перетинаються лише в точці фінішу F , як наведено на рис. 5. Тут S_A – точка старту Ахілла, S_T – точка старту черепахи.

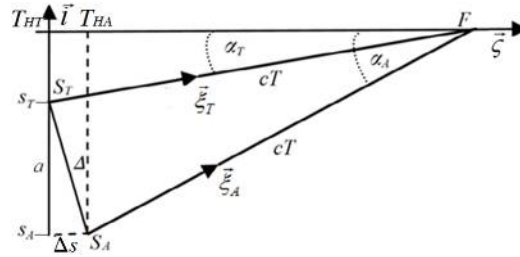


Рис. 5. Траєкторії бігунів на площині $\{\vec{i}, \vec{\zeta}\}$ 4-простору.

Нехай старт та фініш перегонів відбувалися в одній КСК_C спостерігача. Оскільки за час T перегонів Ахілл подолав відстань $a_A = v_A T$ у напрямі $\vec{i}$, а черепаха – $a_T = v_T T$, то початкова відстань між ними в напрямі орта $\vec{i}$ складала класичну $a = (v_A - v_T)T$. Із рис. 5 видно, що при однакових проміжках метричного часу T бігунів часи Габбла $T_{HA} = T \cos \alpha_A$ Ахілла та $T_{HT} = T \cos \alpha_T$ черепахи відрізняються, причому їхня різниця складає

$$\Delta T_H = (T_{HT} - T_{HA}) = T(\cos \alpha_A - \cos \alpha_T), \quad (12)$$

а відносна різниця часів Габбла

$$\frac{\Delta T_H}{T} = 2 \sin \frac{\alpha_A - \alpha_T}{2} \sin \frac{\alpha_A + \alpha_T}{2} \quad (13)$$

досягає максимального значення одиниці при $\alpha_A = \pi / 2$ та $\alpha_T = 0$. Оскільки додатково відбулась зміна відстані між Ахіллом та черепахою вздовж власного напрямку КСК_C на величину $\Delta s = c \Delta T_H$, сумарна початкова відстань між бігунами у просторі $\mathcal{R}^4$ складала:

$$\Delta = \sqrt{a^2 + \Delta s^2} = \sqrt{2} a \sqrt{1 + \cos(\alpha_A - \alpha_T)}. \quad (14)$$

У двох суддів на роздільних стартах S_A , та S_T (їхні проєкції на горизонтальний напрям позначено символами s_A та s_T) виникають проблеми з синхронізацією годинників, подолати які можна, використовуючи поняття проміжків однакового часу Габбла від полюсу Всесвіту до точок стартів (цей алгоритм тут не розписано).

Висновки

Показано, що різноманіття частинок може бути породжене двома типами темних частинок DaM та DaE. Накладені в просторі-часі обмеження на частинки займати всю площину Мінковського фізично не обґрунтовані. На прикладі задачі про перегони продемонстровано переваги інтерпретації кінематики частинок у 4-просторі поряд з простором-часом Мінковського. Отримано підтвердження, що хід метричного часу збігається з ходом абсолютного часу класичної механіки і безпосередньо пов'язаний зі швидкістю розширення Всесвіту.

Література

1. Soffel, M., Han, W. Applied General Relativity. Springer, 2019, 535 p.
2. Пастернак, Р.М. Структура Всесвіту в чотиривимірному просторі. Наукові нотатки №77, 2024, с. 7-12. DOI 10.36910/775.24153966.2024.77.1.
3. Aghanim, N. et al. [Planck 2018 results] Astronomie & Astrophysics, Volume 641, id.A6, 67 pp. arXiv:1807.06209v4 [astro-ph.CO] 9 Aug 2021.
4. Weinberg, S. Cosmology. Oxford University Press, 2008, 612 p.
5. Derdzinski, A. Geometry of the Standard Model of Elementary Particles. Springer, Berlin, 1992, 197 p.
- 6 Lipman, B. Calculus, V2. Holt Inc., New York, 1969, 932 p.
7. Gorben, H.C., Stehle, P. Classical Mechanics. Dover Publications, New York, 1994, 389 p.