

Н.В. Шинкарчук

Рівненський державний гуманітарний університет

**МІШАНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ
З КРУГОВИМ ОТВОРОМ І ПРУЖНОГО ДИСКА**

Пропонується розв'язок контактної задачі для ортотропної пластинки з круговим отвором і ізотропного пружного диска за наявності на лінії розмежування матеріалів зони спаю, гладкого контакту і відставання. Побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій, через які виражаються контактні зусилля на контурі отвору пластинки і диска. Методом механічних квадратур і колокації досліджується напружений стан пластинчастої конструкції. Подано результати числових розрахунків задачі.

Ключові слова: контактна задача, напружений стан, ортотропна пластинка, пружний диск, сингулярні рівняння, зона контакту.

N.V. Shynkarchuk

**MIXED CONTACT PROBLEM FOR THE ORTHOTROPIC PLATE
WITH CIRCULAR HOLE AND ELASTIC DISK**

The enhancement of the reliability of machine components designed as piecewise-homogeneous plates is one of the critical issues in modern engineering mechanics. Their durability largely depends on the presence of defects, such as cuts or cracks, at the material interface, which may arise during the manufacturing process and significantly reduce the permissible external load on the component during operation.

A solution is proposed for the contact problem of an infinite orthotropic plate with a circular hole and a flexible isotropic disk, which are bonded together along one part of their common boundary, while a symmetric crack exists along the rest of the contour between them. Under the action of a concentrated force applied at the center of the disk, the edges of the crack in the plate-like structure make partial or full contact along the entire length. Frictional forces in the contact area between the plate and the disk are absent.

The solution to this problem involves determining the components of the stress state at the interface between the materials of the plate and the disk, as well as establishing the dimensions and position of the contact zone.

The boundary conditions of the problem on the smooth contact region are chosen as the equality of normal displacements at the contour points of the plate and the disk, while on the bonding region, the boundary conditions are defined by the equality of displacements. The relationships between the components of the displacement vector at the contour points of the orthotropic plate and the elastic disk, and the contact stresses, are expressed as integral equations with logarithmic kernels. By substituting these expressions into the boundary conditions of the problem, a system of four singular integral equations is constructed to determine the functions through which the contact forces on the contact and bonding regions are expressed. In addition to the derived system of equations, the condition of force equilibrium of the disk must be satisfied. An approximate solution to the problem is implemented using the method of mechanical quadratures and collocation. The dichotomy method determines the size and position of the contact zone.

For a homogeneous orthotropic plate with a symmetric circular crack, whose edges make partial or full contact under the action of a force load, the influence of material orthotropy on the distribution of contact and hoop stresses has been studied. The value of the critical angle of the crack zone at which the complete contact separation occurs at its endpoints has been determined. The results of numerical calculations are presented in two figures and a table.

Keywords: contact problem, tense state, orthotropic plate, elastic disk, singular equations, zone of contact.

Постановка проблеми. Довговічність елементів конструкцій та деталей машин, спроектованих у вигляді однорідних і кусково-однорідних пластин, в значній мірі залежить від наявності на лінії поділу матеріалів дефектів типу тріщин (розрізів), які суттєво знижують допустиме зовнішнє навантаження та експлуатаційний ресурс конструкцій в цілому. Зародження тріщин може призвести до передчасного руйнування деталі чи споруди. З'ясування питання, чи береги розрізу за дії силового навантаження розходяться чи контактують, має важливе значення з погляду забезпечення непроникності або герметичності конструкції.

Тому значний теоретичний і практичний інтерес, у сучасній інженерній механіці, становить дослідження та оцінка напружено-деформованого стану в околі таких дефектів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В роботах [1, 2] проведено розрахунок напруженого стану в кусково-однорідних ізотропних і ортотропних пластинках із впаєюною круговою шайбою за наявності на лінії їхнього спаю одного або системи розрізів.

Розрахунок і аналіз напружено-деформованого стану в кусково-однорідній ортотропній пластинці, яка перебуває в умовах силового навантаження в центрі жорсткого диска, за наявності на лінії розділу матеріалів зон спаю, гладкого контакту і відставання, здійснено в [3].

Числово-аналітичний розв'язок задачі про напружений стан кусково-однорідної ізотропної пластинки з коловим розрізом по лінії умовного поділу матеріалів пластинки і пружного диска за умови контактування їхніх берегів, представлено в [4].

Мета статті. Реалізувати розв'язок мішаної контактної задачі для нескінченної ортотропної пластинки з круговим отвором та ізотропного пружного диска за наявності на лінії їхнього сполучення симетричного розрізу по дузі кола, береги якого контактують за дії силового навантаження прикладеного в центрі диска.

Постановка задачі. Розглянемо нескінченну ортотропну пластинку товщиною $2h$, послаблену круговим отвором одиничного радіуса з контуром γ в який без зазору і натягу вставлено круглий пружний ізотропний диск такої ж товщини. Систему прямокутних (x, y) і полярних (ρ, λ) координат в серединній площині пластинки оберемо таким чином, щоб початок відліку співпадав з центром отвору, а полярна вісь співпадала з віссю абсцис.

На симетричній ділянці $\gamma_3 = [\pi - \beta_0, \pi + \beta_0]$ контуру γ диск спаяний з пластинкою. На іншій частині цього контуру між ними наявний наскрізний симетричний розріз (тріщина). В центрі диска прикладено зосереджену силу X_0 , внаслідок цього диск вступає у гладку контактну взаємодію з пластинкою на ділянці $\gamma_1 = [-\alpha_0, \alpha_0]$, а на ділянках $\gamma_2 = [\alpha_0, \pi - \beta_0] \cup [\pi + \beta_0, 2\pi - \alpha_0]$ контакт між ними відсутній (рис. 1).

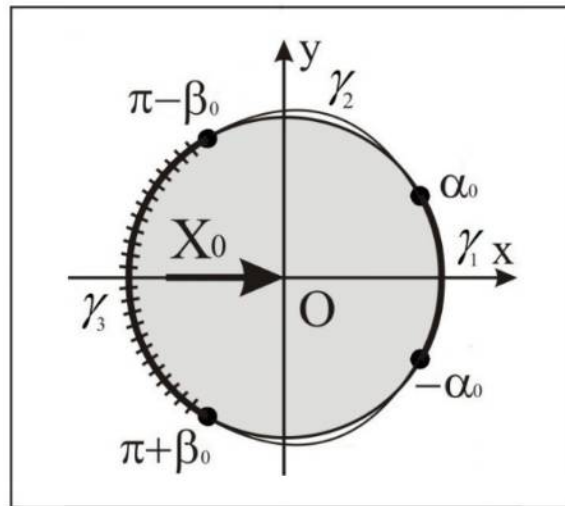


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Розв'язок поставленої задачі передбачає визначення величини розрізу, для якого: зона контакту збігається з розрізом, причому нормальні зусилля на кінцях цієї зони відмінні від нуля (повний контакт берегів розрізу); зона контакту збігається з розрізом, але нормальні зусилля на кінцях зони дорівнюють нулю (зародження зон відставання); існує ізольована зона контакту і дві зони відставання, які прилягають до кінців зони спаю. Для кожного з цих випадків потрібно визначити напружений стан на контурі γ .

Виклад основного матеріалу. Граничні умови задачі в зоні гладкого без тертя контакту $\gamma_1 = [-\alpha_0, \alpha_0]$ обираємо у вигляді рівності нормальних зміщень пластинки і диска [4, 5]

$$\cos \lambda (U - U^{(1)}) + \sin \lambda (V - V^{(1)}) = 0; \quad S_{\rho\lambda} = S_{\rho\lambda}^{(1)} = 0, \quad T_\rho = T_\rho^{(1)}, \quad \lambda \in \gamma_1, \quad (1)$$

а в зоні спаю $\gamma_3 = [\pi - \beta_0, \pi + \beta_0]$ пластинки і диска граничні умови записуємо у вигляді рівності зміщень їх контурних точок [4, 6]

$$U - U^{(1)} = 0, \quad V - V^{(1)} = 0; \quad S_{\rho\lambda} = S_{\rho\lambda}^{(1)}, \quad T_\rho = T_\rho^{(1)}, \quad \lambda \in \gamma_3. \quad (2)$$

Тут T_ρ , $S_{\rho\lambda}$, $T_\rho^{(1)}$, $S_{\rho\lambda}^{(1)}$ – нормальні та дотичні зусилля на контурі отвору ортотропної пластинки і пружного диска.

Компоненти вектора зміщення контурних точок ортотропної пластинки при заданому навантаженні, мають наступний вигляд [3]

$$\begin{aligned}
 2E_x hU &= (\beta_{11}\beta_{22} - \nu_x) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt + \\
 &+ \frac{\beta_{11} + \beta_{22}}{\pi} \left[\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt \right] + c_1, \\
 2E_x hV &= (\beta_{11}\beta_{22} - \nu_x) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt + \frac{X_0 (\beta_{11}\beta_{22} - \nu_x)}{\pi} \lambda - \\
 &- \frac{\beta_{11}\beta_{22}(\beta_{11} + \beta_{22})}{\pi} \left[\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt \right], \quad \lambda \in \gamma, \quad (3)
 \end{aligned}$$

а компоненти вектора зміщення контурних точок пружного диска з урахування (1) – (2) і за умов

$$f_1^{(1)'}(t) = f_1'(t), \quad f_2^{(1)'}(t) = f_2'(t)$$

набувають вигляду [7]

$$\begin{aligned}
 2E^{(1)} hU^{(1)} &= (1 - \nu^{(1)}) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_1'(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt - \\
 &- \frac{2}{\pi} \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \frac{1 + \nu^{(1)}}{2\pi} X_0 \cos 2\lambda - T^0 \cos \lambda + c_1^{(1)}, \\
 2E^{(1)} hV^{(1)} &= (1 - \nu^{(1)}) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_2'(t) dt + \frac{X_0(1 - \nu^{(1)})}{2\pi} \lambda + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \\
 &+ \frac{2}{\pi} \int_{\pi - \beta_0}^{\pi + \beta_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \frac{1 + \nu^{(1)}}{2\pi} X_0 \sin 2\lambda - T^0 \sin \lambda, \quad \lambda \in \gamma, \quad (4)
 \end{aligned}$$

де $f_1 + if_2 = i \int_{-\alpha_0}^{\lambda} (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) e^{it} dt$, $T^0 = \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} (f_2'(t) \cos t - f_1'(t) \sin t) dt$, E_x , ν_x – модуль Юнга

і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини в напрямку осі Ox ; $E^{(1)}$, $\nu^{(1)}$ – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу диска; β_{11} , β_{22} – корені характеристичного рівняння [8]; c_1 , $c_1^{(1)}$ – дійсні сталі. Решта позначень такі ж як і в [9].

Підставляючи (3), (4) в граничні умови (1) – (2) та використавши позначення:

$$\begin{aligned}
 f_1'(\lambda) + if_2'(\lambda) &= f_1^{\circ'}(\lambda) + if_2^{\circ'}(\lambda), & \lambda \in [-\alpha_0, \alpha_0], \\
 f_1'(\pi + \tilde{\lambda}) + if_2'(\pi + \tilde{\lambda}) &= \tilde{f}_1'(\tilde{\lambda}) + i\tilde{f}_2'(\tilde{\lambda}), & \tilde{\lambda} \in [-\beta_0, \beta_0],
 \end{aligned} \quad (5)$$

одержимо систему з чотирьох сингулярних інтегральних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій $f_1^{\circ'}$, $f_2^{\circ'}$, $\tilde{f}_1'$, $\tilde{f}_2'$ на ділянках контакту і спаю

$$\begin{aligned}
 &\cos \lambda \left[((\beta_{11}\beta_{22} - \nu_x) - (1 - \nu^{(1)})k) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_1^{\circ'}(t) dt - \frac{1 + \nu^{(1)}}{2\pi} kX_0 \cos 2\lambda + \right. \\
 &+ \frac{\beta_{11} + \beta_{22} + 2k}{\pi} \left[\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2^{\circ'}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + \\
 &+ kT^0 \cos \lambda \left. \right] + \sin \lambda \left[((\beta_{11}\beta_{22} - \nu_x) - (1 - \nu^{(1)})k) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_2^{\circ'}(t) dt - \frac{\beta_{11}\beta_{22}(\beta_{11} + \beta_{22}) + 2k}{\pi} \times \right. \\
 &\times \left[\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1^{\circ'}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda - t}{2} \right| dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1'(\tilde{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda - \tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + \frac{X_0 (\beta_{11}\beta_{22} - \nu_x)}{\pi} \lambda -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{(1-\nu^{(1)})k}{2\pi}X_0\lambda - \frac{1+\nu^{(1)}}{2\pi}kX_0\sin 2\lambda + kT^0\sin \lambda \Big] = \tilde{c}_1 \cos \lambda, \\ f_1^{\circ'}(\lambda)\cos \lambda + f_2^{\circ'}(\lambda)\sin \lambda = 0, \quad \lambda \in [-\alpha_0, \alpha_0]. \quad (6)$$

$$\left((\beta_{11}\beta_{22} - \nu_x) - (1-\nu^{(1)})k \right) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_1^{\circ'}(t) dt + kT^0 \cos \lambda + \frac{\beta_{11} + \beta_{22} + 2k}{\pi} \times \\ \times \left[\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2^{\circ'}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2^{\circ'}(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] - \frac{1+\nu^{(1)}}{2\pi} kX_0 \cos 2\lambda = \tilde{c}_1, \\ \left((\beta_{11}\beta_{22} - \nu_x) - (1-\nu^{(1)})k \right) \int_{-\alpha_0}^{\lambda} f_2^{\circ'}(t) dt + \frac{X_0}{\pi} \frac{(\beta_{11}\beta_{22} - \nu_x)}{2} \lambda - \frac{(1-\nu^{(1)})k}{2\pi} X_0 \lambda - \\ - \frac{\beta_{11}\beta_{22}(\beta_{11} + \beta_{22}) + 2k}{\pi} \left[\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1^{\circ'}(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_1^{\circ'}(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\tilde{\lambda}-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} \right] + \\ + kT^0 \sin \lambda - \frac{k(1+\nu^{(1)})X_0 \sin 2\lambda}{2\pi} = 0, \quad \lambda \in [\pi - \beta_0, \pi + \beta_0], \quad \tilde{\lambda} \in [-\beta_0, \beta_0]. \quad (7)$$

Тут $k = \frac{\sqrt{E_x E_y}}{E^{(1)}}$, $\tilde{c}_1 = kc_1^{(1)} - c_1$.

Окрім цієї системи рівнянь повинна виконуватися умова силової рівноваги диска [6, 10]

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2^{\circ'}(t) dt + \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \tilde{f}_2^{\circ'}(\tilde{t}) d\tilde{t} = -X_0, \quad (8)$$

яка необхідна для визначення сталої $\tilde{c}_1$.

Якщо функції $f_1^{\circ'}$, $f_2^{\circ'}$, $\tilde{f}_1^{\circ'}$, $\tilde{f}_2^{\circ'}$ стануть відомі, то нормальні та дотичні зусилля на контурі отвору пластинки, з врахуванням позначень (5), визначаються за формулою [10]

$$T_{\rho} + iS_{\rho\lambda} = (f_2^{\circ'}(\lambda) - if_1^{\circ'}(\lambda))(\cos \lambda - i \sin \lambda), \quad \lambda \in \gamma. \quad (9)$$

Кільцеві зусилля T_{λ} на контурі отвору ортотропної пластинки визначаються за формулами, наведеними в [3] при $\varepsilon = 0$, $a = b = 1$, $Y_0 = 0$. Кільцеві зусилля $T_{\lambda}^{(1)}$ на контурі пружного диска визначаються за формулою, наведеною в [4].

Наближений розв'язок задачі. Знаходження точного розв'язку системи (6) – (7), за умов силової рівноваги диска (8), пов'язано із значними математичними труднощами.

Оскільки, система рівнянь (6) – (8) має таку ж структуру, як і відповідна система для випадку кусково-однорідної ізотропної пластинки з коловим розрізом [4], то для наближеного її розв'язання використано числовий метод механічних квадратур і колокації, ефективність якого продемонстрована в роботах [4, 5, 7], яким досліджується вплив на розподіл компонент

напруженого стану величини $k = \frac{\sqrt{E_x E_y}}{E^{(1)}}$ за умов повного та неповного контакту берегів розрізу.

Методом дихотомії визначається величина і положення зони контакту.

Результати числового розрахунку. Характеристики досліджуваних ортотропних матеріалів і лінії, які відповідають цим матеріалам на рисунках, подано в таблиці 1.

Для ортотропної пластинки з круговим отвором і ізотропного пружного диска в центрі якого прикладено зосереджену силу X_0 , встановлено величину граничного кута зони розрізу для якого точка розмикання зони контакту збігається з кінцем розрізу. Для цього випадку досліджено вплив ортотропії матеріалу на напружений стан пластинки і диска. Результати числового розрахунку нормальних, дотичних та кільцевих зусиль на контурі отвору пластинки і диска при $k = 1$, $\nu^{(1)} = 0.3$ проілюстровано на рис. 2-3. Для відповідного матеріалу пластинки в таблиці 2 подано величини граничного кута зони розрізу та значення нормальних зусиль в центрі ділянки контакту і спаю.

Табл. 1.

Характеристики досліджуваних ортотропних матеріалів

Матеріал пластинки	β_{11}	β_{22}	ν_x	E_x/E_y	Вид лінії
Епоксид-графіт	0.143	1.401	0.010	1/25	— — —
Епоксид-скло	0.440	1.310	0.083	1/3	- · - · - · -
Ізотропний	1	1	0.300	1	=====
Скло-епоксид	2.271	0.762	0.250	3	- · - · - · -
Графіт-епоксид	6.999	0.714	0.250	25	- · - · - · -

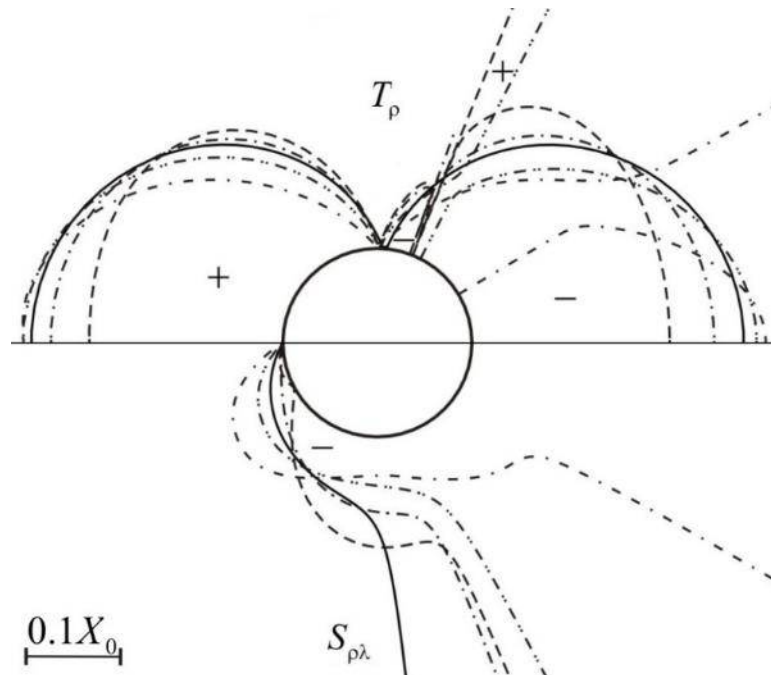


Рис. 2. Розподіл нормальних і дотичних зусиль при $k = 1$

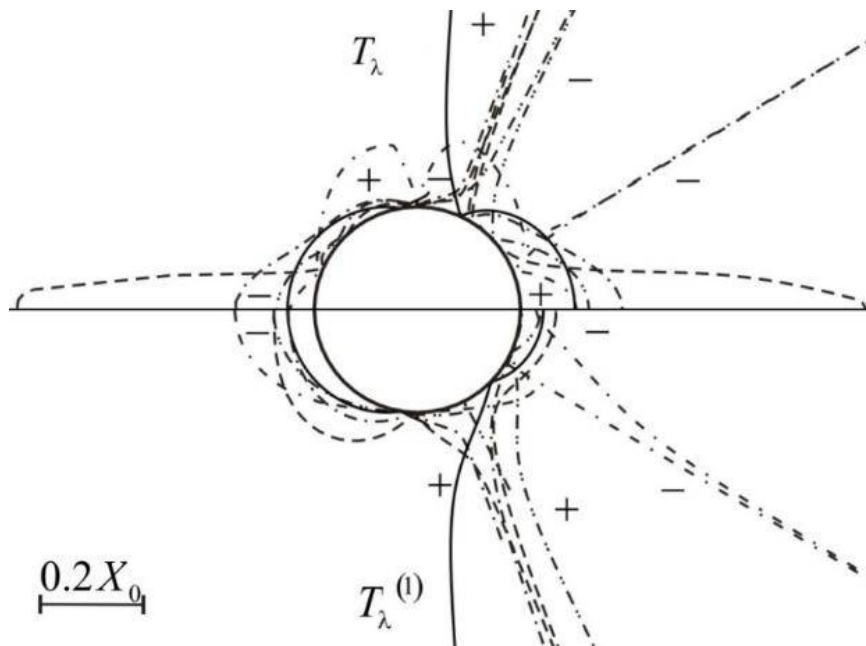


Рис. 3. Розподіл кільцевих зусиль T_λ для пластинки та $T_\lambda^{(1)}$ для пружного диска при $k = 1$

Результати розрахунку величин α_0 і T_ρ

Матеріал пластинки	α_0 (град)	$T_\rho (\lambda = 0)$	$T_\rho (\lambda = \pi)$
Епоксид-графіт	68.03	-0.2093	0.2052
Епоксид-скло	69.94	-0.2564	0.2457
Ізотропний	84.50	-0.2876	0.2662
Скло-епоксид	62.91	-0.3013	0.2750
Графіт-епоксид	30.88	-0.3110	0.2765

Висновки. В даній роботі розглянуто задачу про контакт берегів розрізу між ортотропною пластинкою з круговим отвором і круглим ізотропним пружним диском за умов дії зосередженого силового навантаження в центрі диска. Встановлено величину граничного кута зони розрізу для якого розмикання повного контакту відбувається в кінцевих його точках. Досліджено вплив ортотропії матеріалу на напружений стан пластинки і диска.

Аналіз результатів числових розрахунків приводить до таких висновків: при збільшенні відношення E_x/E_y спостерігається плавне зростання значень T_ρ у центрі зони контакту і спаю; вплив ортотропії матеріалу на розподіл контактних зусиль в зоні контакту і спаю незначний; внаслідок дії зосередженої сили X_0 на пружний диск у напрямку осі симетрії колового розрізу, ортотропія матеріалу пластинки дає найбільший вплив на кільцеві зусилля T_λ ; доцільно в сучасній інженерній практиці, використовувати ортотропні матеріали для яких $E_x/E_y > 1$, задля збільшення міцності пластинчастої конструкції.

Список використаних джерел:

1. Гриліцький Д.В., Луцишин Р.М. Напруження в пластинках з коловою лінією розмежування граничних умов. Львів: Вища школа, 1975. 115 с.
2. Гриліцький Д.В., Луцишин Р.М. Напряженное состояние анизотропной пластинки с впаянным изотропным ядром при наличии разрезом на спае. Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1962. №2. С. 159 – 165.
3. Сяський А.О., Шинкарчук Н.В. Мішана контактна задача для ортотропної пластинки з еліптичним отвором і жорсткого диска. Вісник Тернопільського національного технічного університету. Тернопіль, 2010. Т.15, №4. С. 7 – 13.
4. Сяський А.О., Шинкарчук Н.В., Кот В.В. Напружений стан кусково-однорідної ізотропної пластинки з коловим розрізом. Вісник Тернопільського національного технічного університету. Тернопіль, 2014. №4 (76). С. 63 – 70.
5. Сяський А.О., Шинкарчук Н.В. Мішана контактна задача для пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска. Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. 2010. Вип. 7 (16). С. 199 – 209.
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
7. Сяський В.А. Вплив тертя на розподіл напружень при контакті гладких циліндричних тіл і штампів з кутовими точками. Волинський математичний вісник. Рівне, 1999. Вип. 6. С. 127 – 134.
8. Лехницький С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 464 с.
9. Шинкарчук Н.В. Односторонній контакт ізотропної пластинки з коловим отвором і пружного диска. Наукові нотатки : Міжвузівський збірник (за напрямом «Машинобудування та металообробка», «Інженерна механіка», «Металургія та матеріалознавство»). Луцьк: Луцький національний технічний університет, 2014. Вип. 44. С. 296 – 301.
10. Сяський А.О., Шинкарчук Н.В. Мішана контактна задача для пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска. Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. 2010. Вип. 7 (16). С. 199 – 209.

Рецензент: Турбал Юрій Васильович, завідувач кафедри комп'ютерних наук та прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, доктор технічних наук, професор.