УДК 513.88:517.44: 539.3 DOI 10.36910/775.24153966.2024.79.23

**Т. Г. Войтік**
*Одеський національний морський університет*

## РІВНЯННЯ СПОРІДНЕНЕ ІЗ ЗАДАЧЕЮ РІМАНА З РАЦІОНАЛЬНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ, ОБОРОТНИМ В ОДНОМУ З ПІДКІЛЕЦЬ ФАКТОРИЗАЦІЙНОЇ ПАРИ

***Повідомляється про результат продовження дослідження розв'язності абстрактного рівняння щодо двох раціональних функцій із підкілець. Реалізації рівняння можуть виражати крайові умови задачі, спорідненої для крайової задачі Рімана (Рімана-Гільберта, Рімана-Гільберта-Привалова) з теорії аналітичних функцій. Розглянуто випадок, коли коефіцієнт є раціональною функцією, що належить одному з підкілець факторизаційної пари кільця та оборотна в цьому підкільці. Рівняння задається у всій комплексній площині, а крайова умова виявляється його звуженням на зімкнуту дійсну вісь. Застосовується відрізняющийся алгебраїчністю підхід, що спрощує докази. У підході поєднуються основні положення теорії кілець та функціонального аналізу, теорії лінійних операторів, рівнянь у кільцях із факторизаційними парами. Встановлено теорему існування та єдності із загальними формулами шуканих рішень. Наведено ілюстративний приклад. Використовуваний апарат вільний від теорії інтегралів типу Коші та Фур'є, вимоги гельдеровості функцій, поняття індексу.***

***Ключові слова:*** *задача Рімана, рівняння, кільце, проектор, факторизаційна пара, споріднена задача.*

**T.G. Voytik**

## AN EQUATION RELATED TO THE RIEMANN PROBLEM WITH A RATIONAL COEFFICIENT THAT IS INVERTIBLE IN ONE OF THE SUBRINGS OF A FACTORIZATION PAIR

***We report the results of a continuation of the study on the solvability of an abstract equation involving two rational functions from subrings. By the equation can be describe the boundary conditions of a problem related to the Riemann (Riemann-Hilbert, Riemann-Hilbert-Privalov) boundary value problem in the theory of analytic functions. We consider the case when the coefficient is a rational function belonging to one of the subrings of a factorization pair of the ring and is invertible in this subring. The equation is solved in the entire complex plane, and the boundary condition is obtained by restricting it to the closed real axis. We employ an approach that is distinguished by its algebraicity and simplifies the proof. This approach combines fundamental principles of ring theory and functional analysis, the theory of linear operators, and equations in rings with factorization pairs. A theorem on existence and uniqueness is established, along with general formulas for the desired solutions. An illustrative example is provided. The method used avoids the theory of Cauchy and Fourier-type integrals, the requirement of function Holder's and the concept of index.***

***Keywords:*** *Riemann problem, equation, ring, projector, factorization pair, related problem.*

**Постановка проблеми.** Відома важливість розвитку теорії рівнянь нових класів, видів рівнянь, у тому числі, що виражають крайові умови із задачи Рімана (Рімана-Гільберта, Рімана-Гільберта-Привалова) для аналітичних функцій. Нагадаємо, що вона виникає або використовується в математиці, механіки, їх додатках. У тому числі, в теорії диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, інтегральних рівнянь типу згортки, при вивченні відповідних диференціальних рівнянь математичної фізики, теорії пружності, задачах про кручення. Зазначені обставини можна виявити у відповідних роботах І.І. Привалова, Ф.Д. Гахова, Ю.І. Черського, М.Г. Крейна, І.М. Рапопорта, Н.І. Мусхелішвілі, С.М. Мхітаряна; Ю.І. Черського, П.В. Керекеші, Д.П. Керекеші; Г.Я. Попова, П.В. Керекеші, В.Є. Круглова та інших. Згадане підтверджує, що актуальними є дослідження загальних положень про розв'язання рівнянь, пов'язаних із задачею Рімана-Гільберта або спорідненими їй. Зокрема, умов розв'язності, загальних формул для побудови рішень, у тому числі, коли коефіцієнт з підколець, кільця раціональних функцій, що розглядається нижче. В статті, у відповідному кільці раціональних функцій, відшукуються рішення для рівнянь:

$$A(z)X^{+}(z)+Y_{-}(z)=B(z);\, z\in C\cup\{\infty\}. \tag{1}$$

Рівняння (1) при $z=x\in\{-\infty,\infty\}$ може виражати крайові умови наступної, званої спорідненої, задачі. Спорідненою, - по відношенню до задачі Рімана-Гільберта. Формулювання її таке.

Задача. "*Для заданиях раціональних функцій – коефіцієнтів $A(x)$, $B(x)$, $-\infty<x<\infty$ знайти пару раціональних функцій $X^{+}(z)\in\Re_{r}^{+}, Y_{-}(z)\in\Re_{r-}$, $z\in C$, всі полюси першої з яких, при існуванні, розташовані тільки в середині нижньої, а другої–тільки в середині верхньої з напівплощин, обмежених зімкнутою дійсною віссю, відповідно, та які задовольняють на цій осі лінійному рівнянню:*

$$A(x)X^{+}(x)+Y_{-}(x)=B(x);x\in\{-\infty;\infty\}."\qquad(2)$$

Тут контуром виступає зімкнута дійсна вісь [1, 3-5].

**Аналіз досліджень та публікацій.** Розвиток точних методів вивчення задачі Рімана - Гільберта походить, зокрема, до досліджень І.І. Привалова, Ф.Д. Гахова, Ю.І. Черського, М.Г. Крейна та іншим. На зв'язок теорії інтегральних рівнянь на напівпрямій з ядром, що залежить від різниці аргументів і цим завданням, вперше звернув увагу І.М. Рапопорт (1948). З огляду на зазначеного в [1, с. 114] з посиланням на книгу Н.І. Мусхелішвілі (1945), можна зробити висновок, що, зазвичай, це завдання вирішували у припущенні виконання для відповідних функцій додаткової умови Гельдера на контурі. Часто використовувався апарат теорії інтеграла типу Коші, поняття індексу. Такі підходи можуть спричинити необхідність подолання значних аналітичних труднощів. Не завжди виправданих. Нові ідеї та можливі шляхи дослідження, в інших припущеннях, без вимоги виконання умови Гельдера функцій , з'явилися в [1]. Серед робіт, пов'язаних із задачею Рімана-Гільберта, інтегральними рівняннями типу згортки, але присвячених абстрактним рівнянням в асоціативних кільцях зі спеціальною парою підкілець, а також реалізаціям їх у конкретних кільцях, вкажемо [2-5]. Відповідні публікації підтверджують збереження актуальності використання положень про задачу Рімана та близьких проблем. Поряд з іншими, важливий випадок, коли у такого типу задачі Рімана-Гільберта-Привалова коефіцієнти є раціональними функціями. Відомо, зокрема, що такий випадок виникає у зв'язку з дослідженням диференціальних рівнянь з кусково-постійними коефіцієнтами на осі. У ситуації, що розглядається нижче, від задачі Рімана-Гільберта-Привалова можна перейти до спорідненої Задачі. Вважаючи при цьому коефіцієнти і шукані функції, які належать відповідним підмножинам раціональних. Споріднена задача і відповідне рівняння, що розглядається нижче, – її крайова – умова, виникли в роботах Г.С. Полєтаєва, зокрема, із співавторами Т.Г. Войтік та С.А. Яценка. Вільних від використання апарату інтегралів типу Коші, досить простих і вичерпних, суворо викладених методів дослідження такої Задачі, до їх публікацій, не було відомо. До теперішнього часу не вичерпана необхідність, врахування специфіки випадків, коли коефіцієнт спорідненої задачі і рівняння, що розглядається, разом з його зворотним належать одному з підкілець, що утворюють факторизаційну пару кільця, в якому йде вивчення. Тому актуальними є **пошуки** рішень рівнянь (1) у такій ситуації.

Постановкою задачі та метою статті є встановлення виду загальних формул рішень абстрактних рівнянь (1) у випадках, коли коефіцієнт $A(z)$ разом із його зворотним є функціями підкільця $\Re_r^+$ розглянутого кільця раціональних, всі полюси яких, при існуванні, кінцеві і недійсні [1]. Мета досягається використанням відповідних положень та підходів, теорем, формул рішень, встановлених, наприклад, в [1-5].

**Виклад основного матеріалу дослідження**

1. Будем використовувати позначення та положення з [2-5].

1.1. Через $R$ позначимо довільне комутативне асоціативне кільце з одиницею $e$. Нехай $p^+, p^-$ - комутуючі проектори, тобто адитивні та ідемпотентні відображення $R\to R$ [2]. Нехай: $p^0:=p^+p^-(=p^-p^+)$, $p_{\mp}:=p^{\mp}-p^0$, $p_*:=p_+-p_-$. Для любої підмножини $B\subseteq R$ позначимо $B^{\mp,0}:=p^{\mp,0}B$; $B_{\mp}:=p_{\mp}B$; $B^*=B^++B^-$; $B_*=B_++B_-$. Для будь-якого елемента $x\in R$ вважаємо $x^{\mp,0}:=p^{\mp,0}x$; $x_{\mp}:=p_{\mp}x$, $x_*:=p_*x$.

*Визначення 1.* Пару підколень $\left(R^+,R^-\right)$ комутативного кільця $R$ з одиницею $e$ називатимемо його факторизаційною парою (ФП), якщо вона породжена діючими в R комутуючими проекторами $p^+,p^-: R^{\mp}=p^{\mp}(R)$,і виконуються такі аксіоми (пор. [2]):

$$e\in R^0\left(=R^{\mp}\bigcap R^{\pm}\right);\qquad(*)$$

$$p^0(=p^{\mp}p^{\pm})\text{ – кільцевий гомоморфізм }\ R^+ \ i\ \ R^-\ \ в\ \ R^0\qquad(**)$$

$$R^+R^-\subseteq R^++R^-\quad\left(:=R^*\right).\qquad(***)$$

*Визначення* 2. Будь-яке кільце $R$ з одиницею $e$, що розглядається разом з фіксованою ФП підкілець $(R^+,R^-)\ [\equiv(R^-,R^+)]$, тобто. підкілець, що мають аксіоматично задані властивості (*), (**) , (***), називатимемо «кільцем з факторизаційною парою». Коротко, кільцем із ФП.

1.2. Будемо говорити, що елемент $a \in R$ допускає у комутативному кільці $R$ факторизацію по факторизаційній парі $(R^+, R^-)$(- по ФП$(R^+, R^-)$), якщо існують елементи $r^+ \in R^+, s^0 \in R^0$, $t^- \in R^-$ такі, що: $a = r^+ s^0 t^-$. Ця факторизація називається: правильною факторизацією (п.ф.), якщо $r^+ \in R^+, s^0 \in R^0$ – оборотні у своїх підкільцях; - нормованою факторизацією (н.ф.), якщо $t^0 = r^0 = e$; - нормованою правильною факторизацією (н.п.ф.), якщо вона є (п.ф.) та $t^0 = r^0 = e$. Правильну факторизацію елемента кільця $R$ з ФП $(R^+, R^-)$ можна нормувати [2].

Нормована правильна факторизація є єдина.

**2. Кільце $\Re_r$**

2.1. Позначимо через $\Re_r$ сукупність всіх раціональних функцій, взагалі, комплексного змінного $z \in C$, всі полюси яких, при існуванні, кінцеві та нематеріальні. Границі функцій з $\Re_r$ на нескінченності існують і кінцеві. Нехай $\Re_r^+$ ($\Re_r^-$) - сукупності функцій з $\Re_r$, всі полюси яких, при існуванні, розташовані всередині нижньої (верхньої) напівплощини $\Pi_-(\Pi_+)$ відповідно (пор. [1]; с.14,15). Перевіряється, що $\Re_r$ - асоціативне комутативне кільце з мультиплікативною одиницею $e = f(z) := 1, z \in C$ щодо звичайних операцій складання та множення функцій, а $\Re_r^+, \Re_r^-$ - його підкільця з одиницею. Проектори на ці під кільця: $\Re_r \to \Re_r^{\mp}$. Позначимо $p^{\mp}$, відповідно. Ці проектори комутують. Проектор $p^+$ (Проектор $p^-$) кожної функції з $\Re_r$ ставить у відповідність частину її, що залишилася після видалення з розкладання цієї функції у суму константи і найпростіших дробів першого і другого типів всіх доданків із полюсами з $\Pi_+$, (з $\Pi_-$), відповідно. Вважаємо: $p^0(= p^{\mp} p^{\pm}$, $p_+ := p^+ - p^0$, $p_- := p^- - p^0$, $p_* := p_+ - p_-$, $\Re_r^{\pm,0} = p^{\pm,0}(\Re_r)$, де $\Re_r^0 = \Re_r^+ \cap \Re_r^-$. Можна показати, що $\Re_r$ - кільце з *ФП* ($\Re_r^+, \Re_r^-$). Для будь-якої функції $A(z) \in \Re_r$ справедливе розкладання: $A(z) := A^0 + A_+(z) + A_-(z)$.

Встановимо формули рішень для (1) за відповідних цілей статті припущеннях.

**3. Головний результат**

3.1. З огляду на результатів Г.С. Полєтаєва із співавторами, зокрема з [4, 5], має місце таке твердження.

*Теорема 1.* Нехай функція $A(z) \in \Re_r$ не має дійсних нулів і $\lim_{z\to\infty} A(z) = const \neq 0$.

Якщо, при цьому, $A^{-1}(z)$ допускає нормовану правильну факторизацію: $A^{-1}(z) = \Gamma^+(z) S^0(z) T^-(z)$, $z \in C$ по факторизаційній парі ($\Re_r{}^+, \Re_r{}^-$), тоді абстрактне рівняння (1) та задача, що до $X^+(z) \in \Re_r^+, Y_-(z) \in \Re_{r-}$, за будь-якої правої частини $B(z) \in \Re_r$, в $\Re_r$ можна, однозначно, розв'язати. За будь-якої правої частини $B(z) \in \Re_r$, шукане рішення можна знайти за формулами:

$$X^+(z) = \Gamma^+(z) S^0 [T^-(z) B^+(z)]^+, \; Y_-(z) = B_-(z) + (T^-(z))^{-1} [T^-(z) B^+(z)]_-, \tag{3}$$

де

$$S^0 := S^0(z) = const.$$

3.2. Припустим, що мають місце загальні припущення попередньої теореми, а коефіцієнт $A(z) \in \Re_r^+$ і оборотний у своєму підкільці. Тоді формулювання умов та результата з теореми 1 можливо спростити. Покажемо це безпосередньо в наступному твердженні.

*Теорема* 2. Нехай коефіцієнт рівняння (1) є функцією $A(z) \in \Re_r$, яка не має дійсних нулів і $\lim_{z\to\infty} A(z) = const \neq 0$. Якщо, крім того, $A(z) \in \Re_r^+$ і має в підкільці $\Re_r^+$ зворотний $A^{-1}(z) \in \Re_r^+$ тоді, за будь-якої правої частини $B(z) \in \Re_r$, абстрактне рівняння (1) щодо невідомих функцій $X^+(z) \in \Re_r^+, Y_-(z) \in \Re_{r-}$ має в $\Re_r$ одне та тільки одне рішення. Це рішення можна знайти за формулами:

$$X^{+}(z)=A^{-1}(z)B^{+}(z),\ Y_{-}(z)=B_{-}(z);z\in C\cup\{\infty\}. \quad (4)$$

Доказ. Нехай виконані припущення теореми 2 та функції $X^{+}(z)\in\Re_{r}^{+},Y_{-}(z)\in\Re_{r-}$ становлять деяке рішення в $\Re_r$ рівняння (1), за його існування. Тоді має місце рівність (1). Застосовуючи до рівності (1), послідовно, проектори $p^{+},p_{-}$, з урахуванням їх визначень, властивостей адитивності та ідемпотентності, властивостей підколець $\Re_r^{+},\Re_r^{-}$, відповідно, отримуємо:

$$A(z)X^{+}(z)=B^{+}(z),p_{-}(Y_{-}(z))=p_{-}(B(z));z\in C\cup\{\infty\}.$$

З останніх рівностей, при зроблених припущеннях, випливає, що формули (4), необхідно, мають місце. З іншого боку, за загальних умов теореми 2 та будь-якої фіксованої функції $B(z)\in\Re_r$ з рівняння (1), праві частини формул (4) існують та визначають деякі функції $X^{+}(z)\in\Re_r^{+}$, $Y_{-}(z)\in\Re_{r-}$ відповідні цій $B(z)\in\Re_r$. Підстановкою в ліву частину рівняння (1) правих частин уявлень (4), можна переконатися в наступному:

$$A(z)X^{+}(z)+Y_{-}(z)=A(z)[A^{-1}(z)B^{+}(z)]+B_{-}(z)=[A(z)A^{-1}(z)]B^{+}(z)+$$
$$+B_{-}(z)=B^{+}(z)+B_{-}(z)=B(z);z\in C\cup\{\infty\}.$$

Отже, формулами (4), у припущеннях, що розглядаються, дійсно, визначається рішення в $\Re_r$ рівняння (1) з обраною правою частиною $B(z)$.

Встановимо єдиність рішення, вирушаючи від протилежного. Нехай за умов теореми та фіксованої правої частини $B(z)\in\Re_r$ існують два рішення рівняння (1):

$$X_1^{+}(z)\in\Re_r^{+},Y_{1-}(z)\in\Re_{r-}\text{ і }\quad X_2^{+}(z)\in\Re_r^{+},Y_{2-}(z)\in\Re_{r-}.$$

Тоді:

$$A(z)X_1^{+}(z)+Y_{1-}(z)=B(z);A(z)X_2^{+}(z)+Y_{2-}(z)=B(z);z\in C\cup\{\infty\}.$$

Віднімаючи відповідні частини останніх рівностей та спрощуючи результати, отримаємо:

$$A(z)(X_1^{+}(z)-X_2^{+}(z))=Y_{2-}(z)-Y_{1-}(z);z\in C\cup\{\infty\}.$$

У зв’язку з припущенями і властивостями операцій у кільцях, що розглядаються, ліва частина останньої рівності належить підкільцю $\Re_r^{+}$, а права підкільцю $\Re_{r-}$. Тому обидві вони дорівнюють нулю:

$$A(z)(X_1^{+}(z)-X_2^{+}(z))=0,\ Y_{2-}(z)-Y_{1-}(z)=0;z\in C\cup\{\infty\}.$$

Отже,

$$X_1^{+}(z)-X_2^{+}(z)=(A^{-1}(z))\cdot 0=0,\ X_1^{+}(z)=X_2^{+}(z),Y_{1-}(z)=Y_{2-}(z);z\in C\cup\{\infty\}.$$

Єдиність рішення, та з нею і теорема повністю, доведено.
Зазначимо, що теорему 2 можна встановити також, спираючись на теорему 1.

3.3. Наслідок. Якщо, за умов теореми 2, $B(z)=1$, тоді відповідне рішення рівняння (1) $\Re_r$ можно знайти за формулами:

$$X_e^{+}(z)=A^{-1}(z),\ Y_{e-}(z)=0;z\in C\cup\{\infty\}. \quad (5)$$

3.4. Ілюстративний приклад. *Приклад.* Нехай для рівняння виду (1) потрібно знайти рішення $\Re_r$ при:

$$A(z)=\frac{5z^2+15iz-10}{3z^2+24iz-45};\qquad B(z)=\frac{11z+11i}{z^2+22iz-120}+\frac{1}{2(z-5i)}.$$

Тоді

$$A^0=\frac{5}{3};\ A(z)=\frac{5(z+i)(z+2i)}{3(z+3i)(z+5i)};\ A^{-1}(z)=\frac{3z^2+24iz-45}{5z^2+15iz-10}=\frac{3(z+3i)(z+5i)}{5(z+i)(z+2i)};$$

$$B(z)=\frac{11(z+i)}{(z+10i)(z+12i)}+\frac{1}{2(z-5i)};B(z)=B^+(z)+B_-(z),$$

$$B^+(z)=B_+(z)=\frac{11(z+i)}{(z+10i)(z+12i)},\ B^-(z)=B_-(z)=\frac{1}{2(z-5i)}.$$

З наведених виразів ясно, що у цьому прикладі $A(z),A^{-1}(z)\in\Re_r^+$. Отже, через теорему 2, можна використовувати формули (4). За цими формулами обчислюємо шукане рішення в $\Re_r^+$ рівняння (1) із заданими $A(z)$ та правою частиною $B(z)$ у формі:

$$X^+(z)=\frac{3(z+3i)(z+5i)}{5(z+i)(z+2i)}\cdot\frac{11(z+i)}{(z+10i)(z+12i)}=\frac{33(z^2+8iz-15)}{5(z^3+24iz^2-164z-240i)},Y_-(z)=\frac{1}{2(z-5i)}.$$

Таким чином, знайдено шукане єдине рішення:

$$X^+(z)=\frac{33}{5}\cdot\frac{z^2+8iz-15}{z^3+24iz^2-164z-240i},Y_-(z)=\frac{1}{2(z-5i)};z\in C\cup\{\infty\}.$$

**Висновки**. За умов теореми 2, вивчено рівняння (1), а отже і Задача з коефіцієнтом та його зворотним, одночасно, з підкільця $\Re_r^+$. Вказано ознаку існування та единості рішення рівняння (1) в $\Re_r^+$. Встановлено загальні формули рішень у $\Re_r^+$ цього рівняння. Вони простіші і зручніші за отримані раніше [4]. Остання обставина є наслідком обліку специфіки. Отримані результати можуть використовуватися при вирішенні конкретних рівнянь виду (1). Можуть служити схемою дослідження рівнянь, а також відповідних їм подібних задач, що моделюються аналогічно. У перспективі залишаються ситуації, коли коефіцієнт $A(z)$ та його зворотний з другого підкільця факторизаційної пари кільця раціональних функцій, що розглядається, а також з різних підкілець; - коли факторизація для $A^{-1}(z)$ відрізняється від правильної. Цікавими є і розширення класів рівнянь, прикладні аспекти.

**Список використаних джерел**

1. Krejn M.G. Integral equations on a half-line with kernels dependent on the difference of the arguments. Uspechi Math. Nauk 13 (1958), no. 5(83), 3-120;

Transl. Amer. Math. Soc. Ser. 2, 22(1962), 163-288.

2. McNabb A., Schumitzky A. Factorization of Operators I: Algebraic Theory and Examples. J. Functional Analysis. 1972. Vol. 9. № 3. P. 262-295.

3. Poletaev G.S. The abstrakt analogue paired equations of convolution type in a ring with factorization pair. Ukraine Math. J. 43 (1991), no. 9, 1201-1213.

4. Voytik T.G., Poletaev G.S., Yatsenko S.A. Projector approach to the general linear equation with variables from the subring of the rational functions and a factorable coefficient. J. of Physics: Conf. Series. 2017. Vol. 918 (2017) 012032 doi:10.1088/1742-6596/918/1/012032 Scopus. - P. 1-5.

5. Полетаев Г.С. Про метод розв'язування абстрактних рівнянь з двома невідомими. Механіка та математичні методи. Одеса: ОДАБА, 2020. ІІ №1.С. 81- 88.