

Р. М. Пастернак

Луцький національний технічний університет

КОСМОЛОГІЧНІ В'ЯЗИ РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ КОРПУСКУЛЯРНОЇ ТА ХВИЛЬОВОЇ МЕХАНІК

Запропоновано модель релятивістської корпускулярної механіки у 4-вимірному евклідовому просторі, де абсолютна величина швидкості усіх частинок однакова та незмінна, а час співставний із метричною мірою довжин ділянок 4-траєкторій частинок. Оптимізовано набір космологічних в'язей та використано відмінне від класичного означення інерційної системи. У релятивістській хвильовій механіці сталу Планка пов'язано зі швидкістю розширення Всесвіту.

Ключові слова: космологічні в'язі, інерційна космічна система, неспостережувані частинки.

R. Pasternak

COSMOLOGICAL CONNECTIONS OF RELATIVISTIC PARTICLE AND WAVE MECHANICS

The model of relativistic corpuscular mechanics is proposed in 4-dimensional Euclidean space, where the absolute value of the speed of all particles is the same and unchanged, and time is comparable to the metric measure of the lengths of plots of 4-trajectories of particles. A set of cosmological knitters is optimized and different from the classic definition of the inertial system. In a relativist wave mechanics, a steel bar is associated with the speed of expansion of the universe.

Key words: cosmological bonds, inertial cosmic frame of reference, unobservable particles.

Постановка завдання. Використовуючи метод абдукції оптимізувати кількість в'язей (принципів) релятивістської [1] та хвильової механік [2] в евклідовому 4-просторі центральносиметричного Всесвіту, в рамках апарату механіки ввести трактування ходу часу [3], пов'язати сталу Планка [4] із величиною швидкості розширення Всесвіту [5].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Побудовані на сумісному виконанні законів збереження енергії та імпульсу частинок апарати релятивістської корпускулярної механіки у просторі-часі [1] чи хвильової у просторі кватерніонів [2] використовують 4-простори. В основу апарату ньютоніоподібної релятивістської корпускулярної механіки незмінної маси покладено класичне диференціальне означення енергії E частинки відповідно до формули Ж. Понселе $dE = (\vec{f}, \vec{v})dt$, де \vec{f} – 3-вектор сили, \vec{v} – 3-вектор швидкості частинки, а dt – приріст координатного часу (четвертого виміру) і запропонований А. Айнштайном та А. Пуанкаре релятивістський 3-імпульс $\vec{p} = m_0\gamma\vec{v}$, де $\gamma = (1 - (v/c)^2)^{-1/2}$ – Лоренц-фактор, m_0 – маса спокою частинки, а c – швидкість поширення світла у вакуумі [1]. З метою симуляції метрики 4-вимірного простору в (3+1)-вимірному просторі-часі Г. Мінковський запропонував фізично необгрунтоване приєднання Лоренц-фактора γ у формулі для релятивістського імпульсу $\vec{p} = m_0\gamma\vec{v}$ до швидкості частинки $\vec{p} = m_0(\gamma\vec{v})$, замість $\vec{p} = (m_0\gamma)\vec{v}$ [1], чим порушив принцип А. Айнштайна $E = c^2m$ еквівалентності її маси m та енергії E . (Інтерпретація наступних перетворень фізичних змінних суттєво вплинула на область застосування цього апарату [6].) Натомість апарат релятивістської хвильової механіки П. Дірака [2] використовує інтегральне означення енергії відповідно до 4-вимірного гамільтоніану частинки

$$E = cP = c(m_0^2c^2 + p^2)^{1/2},$$

де P – величина 4-імпульсу \vec{P} частинки в 4-просторі кватерніонів. Реальність фізичного існування четвертого виміру підтвердили астрономічні спостереження, що виявили темну холодну матерію та темну енергію [7], які неспостережувані (темні) у супутній з розширенням Всесвіту системі відліку (ССВ).

Висновки, зроблені на основі прецизійних вимірювань анізотропії космічного мікрохвильового фону [8] поглибили розуміння та вимагали змін класичного поняття інерційна система. У даній роботі запропоновано апарат механіки змінної маси в евклідовому 4-просторі [3] для моделювання поведінки всіх частинок (включно з темними) у Всесвіті.

Метою роботи є адаптація апаратної та інтерпретаційної складових релятивістських корпускулярної й хвильової механік до використання 4-вимірного евклідового простору з урахуванням неспостережуваних (темних) у ССВ частинок.

1. Космологічні в'язі корпускулярної механіки

1.1. *Перша космологічна в'язь.* Відповідно до принципів П. Дірака $E = cP$ пропорційності енергії частинки величині її 4-імпульсу [2], А. Айнштейна еквівалентності маси частинки її енергії $E = c^2 m$ [1] та розширеного на 4-простір принципу Л. Ейлера $\vec{P} = m\vec{V}$ [3] можна побудувати модель, де величина 4-швидкостей усіх частинок у Всесвіті незмінна:

$$V = const = c. \quad (1)$$

У моделі [3] фундаментальна стала c відповідає величині швидкості розширення фронту 4-вимірного центральносиметричного Всесвіту, а частинки геометрично є нескінченними векторними кривими. Логічно допустити, що четвертий вимір Всесвіту заповнюють неспостережувані частинки [5], наприклад, нерухомого в інерційній ССВ ефіру Г.А. Лоренца [1], чи холодної темної матерії в Λ CDM-моделі Всесвіту [5]. Як наслідок (1), отримуємо, що:

- скаляри маси, енергії та величина 4-імпульсу лінійно пов'язані $E = cP = c^2 m$ для усіх частинок;

- на відміну від координатного часу t ССВ [1] у Всесвіті його зміни співставні з приростами dR довжини 4-траєкторії частинки евклідового 4-простору [3] (перша космологічна в'язь)

$$dR = c dt, \quad (2)$$

де dt – зміна її параметру t (часу) [3]. При побудові апарату релятивістської корпускулярної механіки достатньо обмежитись лише умовою (1), принципами П. Дірака $E = cP$, Л. Ейлера $\vec{P} = m\vec{V}$ і однією змінною – вектором \vec{P} 4-імпульсу частинки.

1.2. *Системи координат у Всесвіті.* Для опису поведінки частинок, відповідно до симетрії великомасштабної структури центральносиметричного Всесвіту [5], зручно послуговуватися системою полярних координат, початок якої знаходиться в центрі симетрії Всесвіту, а напрями полярних осей кожної з координатних систем S збігаються з напрямками радіальних променів, що виходить з його центру симетрії. Останні будемо характеризувати одиничними напрямними 4-векторами $\vec{\zeta}_s$, тобто власними напрямками конкретних систем координат у Всесвіті (СКВ). Останні враховують умову (1) незмінності величини швидкості розширення фронту Всесвіту, а область дії СКВ обмежується космічними комірками [5].

Враховуючи умову (1), спостережувану \vec{v} та неспостережувану в ССВ \vec{v}_0 складові векторів 4-швидкості \vec{V} у СКВ S зручно записувати з використанням полярного кута α частинки, де $\cos \alpha = (\vec{\zeta}_s, \vec{\xi})$ [3]:

$$\vec{v} = c \sin \alpha \vec{\tau}, \quad \vec{v}_0 = c \cos \alpha \vec{\zeta}_s. \quad (3)$$

Отже, величина неспостережуваної складової швидкості частинки пов'язана з величиною її спостережуваної складової:

$$v_0 = c \cos \alpha = c \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = c \sqrt{1 - v^2 c^{-2}} = c \gamma^{-1}. \quad (4)$$

Відповідно до принципу суперпозиції, 4-імпульс $\vec{P} = m\vec{V}$ довільної частинки буде векторною сумою спостережуваної в ССВ складової $\vec{P}_\tau = p\vec{\tau} = m v \vec{\tau}$, де p – величина релятивістського 3-імпульсу частинки [1], v – величина спостережуваної складової 4-швидкості \vec{V} , а $\vec{\tau}$ – одиничний 4-вектор, що ортогональний до власного вектора $\vec{\zeta}_s$ СКВ S [3]

$$(\vec{\zeta}_s, \vec{\tau}) = 0, \quad (5)$$

та власного імпульсу $\vec{P}_s = p_0 \vec{\zeta}_s = m v_0 \vec{\zeta}_s$ частинки в СКВ S , де p_0 – величина власного імпульсу:

$$P \vec{\xi} = \vec{P}_s + \vec{P}_\tau = m v_0 \vec{\zeta}_s + m v \vec{\tau}. \quad (6)$$

Тут $\vec{\xi}$ – одиничний 4-вектор напрями поширення частинки в СКВ.

1.3. *Друга космологічна в'язь.* В основу класичного означення інерційної системи покладено відсутність пришвидження тіла відліку [1]. Оскільки в апараті 4-вимірної механіки тілом відліку виступає нерухомий у СКВ Всесвіт, як ціле, означення інерційної системи необхідно доозначити.

Відповідно до підходу Г.А. Лоренца існування неспостережуваного в ССВ нерухомого ефіру [1], умова інерційності кожної з СКВ вимагає незмінності вектора власного імпульсу частинок [3], що належать даній СКВ:

$$\vec{P}_s = p_0 \vec{\xi}_s = \text{const} \quad \forall t \quad (7)$$

(друга космологічна в'язь). Аналогічне означення інерційної системи використовував П. Дірак [2].) Прецизійні вимірювання анізотропії космічного мікрохвильового фону [8] підтвердили валідність умови (7). Якщо класичне означення інерційної системи допускає перетворення Г.А. Лоренца для усіх частинок [1] (крім темних), то в СКВ, де власний напрям фіксований радіальними променями Всесвіту, перетворення Г.А. Лоренца для частинок з $p_0 \neq 0$ незастосовні: переходити від однієї СКВ до іншої можуть лише частинки з $p_0 = 0$ (фотони).

1.4. *Власна маса.* Поширимо рівняння руху Р. Декарта [1] на евклідов 4-простір $d\vec{P} = \vec{F}dt$, увівши поняття 4-сили \vec{F} . Відповідно до (7) складова 4-сили вздовж власного напрямку інерційної системи дорівнює нулю, тому $\vec{F} = (0, \vec{f})$, а робота сили на переміщенні $dE = (\vec{F}, d\vec{R}) = (\vec{f}, \vec{v})dt$ збігається з класичною формулою Ж. Понселе [1] (у [3] показано, що формула Ж. Понселе є наслідком рівняння руху в механіці змінної маси).

З умови (7) другої космологічної в'язі випливає зв'язок

$$p_0 = m v_0 = m_0 c = \text{const}, \quad (8)$$

де m_0 – власна (мінімальна) маса частинки (у динамічному Всесвіті поняття маси спокою відсутнє). Враховуючи (8), деталізуємо принцип Дірака

$$E = cP = c^2 m = \sqrt{(m v_0)^2 + (m \vec{v})^2} = c \sqrt{(m_0 c)^2 + (m \vec{v})^2}, \quad (9)$$

що збігається зі старанно перевіреним виразом для гамільтоніану частинки [7], тобто сумісний з означенням (7) інерційної системи (та вступає в протиріччя з її класичним означенням).

Підстановкою (4) у (8) отримуємо явну залежність власної маси частинки m_0 від її маси m :

$$m_0 = m \gamma^{-1}. \quad (10)$$

(Поняття власної маси має виключне значення при розгляді властивостей частинок у гравітаційному полі [6].) Незважаючи на відсутність у фотона власної маси, відповідно до гамільтоніану та принципу П. Дірака, фотон має енергію $E = cp$ та масу $m = c^{-1}p$.

2. Космологічні в'язі хвильової механіки

2.1. *Принцип М. Планка.* На відміну від векторних кривих корпускулярної, у хвильовій механіці [4] частинки описують хвильовими пакетами. В її основу покладено розширений на 4-простір принцип М. Планка пропорційності енергії частинки величині її циклічної частоти Ω [2]:

$$E = \hbar \Omega. \quad (11)$$

Тут $\hbar = \text{const}$ – стала П. Дірака [2]. Помноживши зв'язок (11) на одиничний 4-вектор $\vec{\xi}$ напрямку поширення частинки в СКВ S та враховуючи принцип П. Дірака $E = cP$ [2], отримуємо формулу для зв'язку вектора 4-імпульсу частинки з 4-вектором її циклічної частоти [4]:

$$\vec{P} = \hbar c^{-1} \vec{\Omega}. \quad (12)$$

Аналогічно до розкладу вектора 4-імпульсу \vec{P} на власну \vec{P}_0 та спостережувану \vec{p} складові в інерційній СКВ S корпускулярної механіки, введемо поняття 4-векторів $\vec{\Omega}_0$ неспостережуваної та $\vec{\omega}$ спостережуваної складових 4-вектора $\vec{\Omega} = \Omega \vec{\xi} = \Omega_0 \vec{\xi}_s + \omega \vec{\tau}$, причому $\Omega^2 = \Omega_0^2 + \omega^2$. Для порівняння з корпускулярною механікою, власний імпульс буде $\vec{P}_0 = m_0 c \vec{\xi}_s = \hbar c^{-1} \vec{\Omega}_0$, а спостережуваний $\vec{p} = m \vec{v} = (\hbar/c) \vec{\omega}$. Оскільки маса m частинки залежить від швидкості v , однозначний зв'язок між масою m та частотою Ω можна отримати лише для власного імпульсу частинки (де відсутнє поняття величини спостережуваної складової швидкості v). Наприклад, для електрона частота $\Omega_0 = 7,76 \cdot 10^{20}$ рад/с, якій відповідає довжина неспостережуваної (комптонівської) довжини хвилі $\Lambda_0 = 3,86 \cdot 10^{-13}$ м (класичний радіус електрона $4,458 \cdot 10^{-16}$ м, а експериментально знайдений радіус протона – $8,418 \cdot 10^{-16}$ м [7]).

2.2. *Канонічно-спряжені величини та одиниці їхнього вимірювання.* Зважаючи, що в інерційній системі власний імпульс частинок незмінний, при розгляді задач динаміки у хвильовій механіці обмежуються використанням лише спостережуваного підпростору та спостережуваної складової ω частоти Ω , а в ССВ замість єдиного зв'язку (12) використовують окремі формулювання для часової та просторової змінних

$$ET_v = h; \quad p\lambda = h, \quad (13)$$

де $h = 2\pi\hbar = \text{const}$ – стала Планка, $T_v = 2\pi/\omega$ – спостережуваний період коливань, а $\lambda = cT_v$ – довжина хвилі у спостережуваному підпросторі. Якщо вибрати одиниці вимірювання змінних так, щоб $c = h = 1$ (безрозмірні одиниці), зв'язки (13) отримають вигляд $ET_v = 1$ та $p\lambda = 1$, де одиниця вимірювання енергії обернена до одиниці вимірювання часу, а одиниця вимірювання імпульсу обернена до одиниці вимірювання довжини [2]. Такі змінні та їхні одиниці вимірювання у хвильовій механіці називають канонічно-спряженими [4].

Отже, усі одиниці вимірювання хвильової механіки можна звести до двох груп канонічно-спряжених, де одиниці вимірювання енергетичних характеристик (енергії, імпульсу) обернені до одиниць вимірювання просторових (довжини, часу). (Використання канонічно-спряжених величин зумовило перехід апарату релятивістської хвильової механіки від 4-вимірному евклідовому до гіперкомплексного 4-простору кватерніонів В. Гамільтона [2], де визначено поняття оберненого кватерніона.)

Незважаючи на принципову відсутність у хвильовій механіці поняття маси, у SI величину сталої Планка означають за допомогою трьох одиниць вимірювання: довжини, часу та маси [9]. Зважаючи на канонічну спряженість пар одиниць вимірювання, у хвильовій механіці можна виключити надлишкове поняття маси. Тоді в системі SI [9] отримаємо зв'язок між c та \hbar :

$$\hbar = c^{-4}. \quad (14)$$

2.3. *Принцип невизначеності В. Гайзенберга.* На відміну від корпускулярної механіки, де частинки є нескінченними векторними кривими, у хвильовій механіці цуги хвиль мають скінченну довжину, внаслідок чого їхні хвильові функції неможливо описати однією частотою ω , а доводиться використовувати смугу частот $\langle \omega \rangle \pm \Delta\omega$. Для порівняння хвильових властивостей частинок з корпускулярними, В. Гайзенберг запропонував використовувати середні значення частоти $\langle \omega \rangle$ та середні значення енергії $\langle E \rangle$ хвильового пакету частинки, обов'язково супроводжуючи їх середньоквадратичними відхиленнями $\Delta\omega$ і ΔE [4]. Отримане методами хвильової механіки співвідношення невизначеностей стверджує [4], що добуток невизначеностей енергії ΔE частинки на невизначеність тривалості $\Delta\tau$ цугу хвиль задовольняє співвідношення:

$$\Delta E \Delta\tau \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (15)$$

Зважаючи на принцип Дірака, запишемо аналогічне співвідношення для невизначеності Δp величини імпульсу p та невизначеності Δq координати q частинки у 3-просторі ССВ:

$$\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (16)$$

Наприклад, при випромінюванні світла в оптичному діапазоні (з енергією $\langle E \rangle \approx 2,5 \text{ eV} = 4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$) природна довжина τ цугу хвиль за нормальних умов (невизначеність координати) складає біля 3 м, а невизначеність часу випромінювання $\Delta t = \tau \approx 10^{-8} \text{ с}$ [10]. Відповідно до (15), відносна природна невизначеність енергії фотона складає $\Delta E/E \approx 10^{-7}$. Шляхом компресії [10] цугу хвиль вдається отримати піко-, фемпто- та навіть аттосекундні імпульси (тривалістю біля 10^{-17} с), для яких, відповідно до (15), $\Delta E/E > 1$.

З іншого боку, створюючи спеціальні умови для усунення впливів фононної взаємодії та енергії віддачі (явище Р.Л. Мессбауера резонансного поглинання ядерних γ -квантів [1]), відносну невизначеність енергії частинки можна зменшити до $\Delta E/E \approx 10^{-17}$ [1].

Засобами хвильової механіки показано, що знак рівності в (15) та (16) задовольняється лише для конкретного розподілу власної функції частинки (гаусової функції похибок [4]). Оскільки у хвильовій механіці визначальними є не окремо енергія та тривалість процесу, (чи імпульс та

хвильовий вектор), а їхній добуток, розклад у збіжний ряд однієї зі спряжених величин (просторової) призводить до появи розбіжного ряду для спряженої величини (енергетичної). Хоча неможливо побудувати хвильову функцію так, щоб вона одночасно визначала обидві канонічно-спряжені величини, в експериментах з потоками частинок їх можна достатньо точно визначати незалежно.

Тобто назване вище обмеження можна обійти процедурою перенормування [11] – підстановкою експериментально знайденого значення спряженої величини.

2.4. Віртуальні еталони одиниць вимірювання в системі SI. Відповідно до рекомендацій Міжнародного комітету мір і ваг [9] для юстування приладів вимірювання часу замість матеріальних еталонів довжини та маси використовують їхні віртуальні цифрові, де є лише одна основна одиниця – секунда, якій відповідає частота 9192631770 Гц (точно) надтонкого розщеплення основного стану атому цезію-133 [9], а решта похідні. Так, одиницю вимірювання довжини пов'язують з одиницею вимірювання часу відповідно до умови (1), де $c = 299792458$ м/с (точно), а одиницю вимірювання маси – відповідно до сталої Планка [9]. Комітет з даних для науки і техніки рекомендував використовувати значення сталої Планка $h = 6.62606957 \pm 4.4 \cdot 10^{-34}$ Дж·с [9], що отримане усередненням вимірів відповідно до декількох методик: ватових терезів, розсіяння рентгенівських променів, сталої Дірака, магнітного резонансу та сталої Фарадея.

2.5. Причини розбіжностей між \hbar та \hbar^* . Підставивши табличне значення c у (14), отримаємо $\hbar^* = 1,23799 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, що на 17% більше від табличного значення $\hbar = 1,054571817 \cdot 10^{-34}$ Дж·с [9]. Причинами розбіжностей між експериментально поміряним значенням \hbar та отриманим \hbar^* за формулою (14) можуть бути впливи енергії віддачі при випромінюванні фотонів, неточності вимірювання фундаментальної сталої c , вплив форми хвильового пакету, тощо, розгляд окремих з яких подано нижче.

2.5.1. Особливості взаємодії частинок. Нехай взаємодіють дві частинки з 4-імпульсами \vec{P}_1 та \vec{P}_2 , результатом якої могла б бути частинка з 4-імпульсом \vec{P}_3 . Використовуючи закони збереження імпульсу та енергії (зважаючи на принцип Декарта $E = cP$ та умову інерційності СКВ), запишемо:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_3; \quad P_1 + P_2 = P_3 \quad P_{01} + P_{02} = P_{03}. \quad (17)$$

Із (16) випливає, що спільне використання законів збереження імпульсу та енергії в евклідовому просторі для тривіткового вузла взаємодії реалізувати неможливо. Загальна теорія відносності [5] для узгодження законів збереження в тривітковому вузлі взаємодії використовує криволінійний простір. Натомість в апараті релятивістської механіки змінної маси [3] запропоновано використовувати непланарні вузли взаємодії частинок в евклідовому 4-просторі, що містять не менше чотирьох віток (додаткова вітка – акцептор енергії). Так, процес випромінювання фотона можна представити схемою: збуджена частинка \rightarrow не збуджена частинка + фотон + фонон (енергію фонона, тобто кінетичну енергію віддачі, не завжди враховують [1]).

Аналогічно, при поглинанні фотона його енергія йде не тільки на збудження атому, але й на надання йому додаткової кінетичної енергії [1]. Наприклад, для ефекту Дірака, з наведених вище числових значень для \hbar та \hbar^* , енергія фотона складе лише частину різниці енергій куперівської пари до та після випромінювання:

$$\hbar\omega = z(E_1 - E_2) = czp, \quad \text{де } z < 1. \quad (18)$$

Відповідно до (17), стала Дірака буде на коефіцієнт $1/2$ більшою, ніж поражена без врахування енергії віддачі. Порівнюючи числові значення \hbar та \hbar^* , коефіцієнт z складе $z = 0,852$. У процесі випромінювання фотона може відбутись розпад куперівської пари, а енергія її зв'язку вплине на енергію випроміненого фотона. Не виключений також вплив невизначеностей В. Гайзенберга на результат вимірювання енергії фотона.

2.5.2. Вплив похибки вимірювання фундаментальної сталої c . У результаті прецизійних вимірювань анізотропії космічного мікрохвильового фону було виявлено пекулярну швидкість Сонячної системи, що становить $v_p = (368 \pm 2)$ км/с [8], якій відповідає полярний кут $1,22 \cdot 10^{-3}$ рад.

Отже, система відліку, пов'язана з Сонячною системою, не відповідає умові (7) інерційності. Відповідно до (3), фундаментальна стала c повинна бути більшою від поміряної на Землі швидкості поширення світла у вакуумі, тобто $2,997926839 \cdot 10^8$ м/с (відносна похибка складає $\varepsilon = 7,5 \cdot 10^{-5}$). У

результаті вплив похибки вимірювання величини релятивістської космологічної в'язі (1) на значення \hbar не перевищує 10^{-5} .

Висновки. З наведеного в першому розділі розгляду зв'язків між змінними механіки зроблено висновок, що апарат релятивістської механіки змінної маси можна будувати лише на основі першої космологічної в'язі в евклідовому 4-просторі інерційної космічної системи відліку та принципах П. Дірака і Л. Ейлера (постулати А. Айнштейна про світло відносяться лише до супутньої системи відліку з іншим означенням інерційної системи відліку).

У другому розділі показано, що основа апарату хвильової механіки відрізняється від основи апарату корпускулярної лише принципом М. Планка (замість Л. Ейлера). Звернено увагу, що рекомендована Міжнародним комітетом мір і ваг вимірність сталої Планка містить відсутнє у хвильовій механіці поняття маси. Для усунення неузгодженостей встановлено зв'язок сталої Планка з фундаментальною сталою c .

Література

- 1 Joos, G. Theoretical Physics, Dover Publications, New York, 1987, 885 p.
2. Dirac, P.A.M. Principles of Quantum Mechanics (4th ed.). Oxford science publications. 2008, 314 p.
3. Pasternak, R. Means of the restrictions elimination of the space-time apparatus in relativistic mechanics. Вісник ТНТУ, № 1 (89), 2018, с. 64-71.
4. Wit, B., Smith, J. Field theory in particle physics. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1986, 487 p.
5. Weinberg, S. Cosmology. Oxford University Press, New York, 2008, p.593.
6. Пастернак, Р. М. Релятивістські рівняння руху в потенціальному силовому полі. Комп'ютерно-інтегровані технології. №50, 2023, с. 90-94. DOI: <https://doi.org/0000-0001-9668-9161>.
7. Derdzinski, A. Geometry of the Standard Model of Elementary Particles. Springer-Verlag, Berlin, 1992, 197 p.
8. Smoot, G. F. UFN. 177, 12 (2007). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0177.200712d.1294>.
9. The International System of Units (SI). <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/SpecialPublications/NIST.SP.330-2019.pdf>
10. Steiner, R. L., Williams, E. R.; Liu, R., Newell, D. B. Uncertainty Improvements of the NIST Electronic Kilogram. IEEE Trans. Instrum. Meas. 56 (2), 2007, p. 592–596. [https://doi:10.1109.TIM.2007.890590](https://doi:10.1109/TIM.2007.890590).
11. Demtröder, W. Laser spectroscopy. Springer-Verlag, Berlin., 2003,963 p.
9. The International System of Units (SI). <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/SpecialPublications/NIST.SP.330-2019.pdf>
10. Steiner, R. L., Williams, E. R.; Liu, R., Newell, D. B. Uncertainty Improvements of the NIST Electronic Kilogram. IEEE Trans. Instrum. Meas. 56 (2), 2007, p. 592–596. [https://doi:10.1109.TIM.2007.890590](https://doi:10.1109/TIM.2007.890590).
11. Demtröder, W. Laser spectroscopy. Springer-Verlag, Berlin., 2003,963 p.