

УДК 524.8

DOI 10.36910/775.24153966.2024.77.1

Р.М. Пастернак

Луцький національний технічний університет

СТРУКТУРА ВСЕСВІТУ В ЕВКЛІДОВОМУ ЧОТИРИВИМІРНІЙ ПРОСТОРИ

Аналіз постулатів релятивістської механіки показав, що простір імпульсів частинок принципово 4-вимірний, величина швидкості кожної з частинок однакова, а маса може змінюватися. Перехід апарату релятивістської корпускулярної механіки від простору-часу до однорідного 4-простору вимагав доповнення набору частинок фундаментальними частинками темної холодної матерії та темної енергії, що не спостережувані у просторі-часі. Кожна з частинок у 4-просторі може бути описана векторною кривою (4-траєкторією), що існує від одного вузла взаємодії до іншого. Відповідно до незмінної величини 4-швидкості, параметр 4-траєкторії (час) лінійно пов'язаний з її метричною мірою. Узгодження розв'язків у 4-просторі з аналогічними у просторі-часі можливі лише при використанні виділеної за Г.А. Лоренцом інерційної системи відліку. Апарат 4-вимірної механіки частинок застосовано до аналізу структури центральносиметричного Всесвіту і встановлено причини його структурованості: секторальної – галактик, космічних комірок, та часової – первинного синтезу частинок речовини, останнього розсіювання їхньої надлишкової енергії та шару реіонізованого водню.

Ключові слова: хід часу, фізичний вакуум, нативні частинки, частинки-номади.

R.M. Pasternak

STRUCTURE OF THE UNIVERSE IN EUCLIDEAN FOUR-DIMENSIONAL SPACE

The analysis of the postulates of relativistic mechanics showed that the momentum space of particles is fundamentally 4-dimensional, the velocity of each particle is the same, and the mass can change. The transition of the apparatus of relativistic corpuscular mechanics from space-time to homogeneous 4-space required the addition of a set of particles with fundamental particles of cold dark matter and dark energy, which are not observed in space-time. Each of the particles in 4-space can be described by a vector curve (4-trajectory) that exists from one node of interaction to another. According to the invariant value of the 4-velocity, the 4-trajectory parameter (time) is linearly related to its metric measure. Reconciliation of solutions in 4-space with similar ones in space-time is possible only when using the method selected by G.A. Lorentz of the inertial frame of reference. The apparatus of 4-dimensional particle mechanics was applied to the analysis of the structure of the centrally symmetric universe and the reasons for its structure were established: sectoral – galaxies, cosmic cells, and temporal – the primary synthesis of four-dimensional particles, the last dissipation of their excess energy and a layer of reionized hydrogen.

Key words: passage of time, physical vacuum, native particles, nomadic particles

Постановка завдання. Модель Фрідмана-Леметра-Робертсона-Вокера (ФЛРВ) пояснює властивості космічного мікрохвильового фону (КМФ) розширенням Всесвіту [1]; при цьому його розширення жодним чином не впливає на властивості баріонів [1]. У роботі зроблено спробу розглянути причини такої невідповідності та структурованості Всесвіту.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Виконані відповідно до Стандартної космологічної моделі (Λ CDM) [2] розрахунки показали, що кривина Всесвіту $\Omega_k = (0,001 \pm 0,002)$, тобто (в межах похибки) він просторово плоский, що вступає в протиріччя з метрикою ФЛРВ [1]. Іншим важливим результатом використання Λ CDM-моделі було підтвердження гіпотези Ф. Цвіккі [1] існування темної матерії [2]. В результаті прецизійних вимірювань анізотропії КМФ [3] було виявлено пекулярну швидкість Сонячної системи, що становить $v = (368 \pm 2) \text{ км} \cdot \text{с}^{-1}$ у напрямі на сузір'я Лева (у Нобелівській лекції Дж. Смут назвав їх «новим дослідом Майкельсона-Морлі» [3]). У [4] запропоновано альтернативний апарат релятивістської корпускулярної механіки (АРМ) в евклідовому 4-просторі, де присутні засоби опису як спостережуваних, так і неспостережуваних безпосередньо (темних) частинок [2] та міститься пов'язане з метрикою 4-простору означення ходу часу.

Метою роботи є адаптація можливостей поданого в [4] апарату АРМ до аналізу властивостей Всесвіту, зокрема, врахування космологічних в'язей, розгляду задач про лінійність, однорідність, динамічність та структурованість центральносиметричного [1] Всесвіту.

1. Космічні системи відліку

1.1. Динамічність Всесвіту. Час. Основними характеристиками частинок у корпускулярній релятивістській механіці є їхні повна енергія E та повновимірний імпульс \vec{P} [5], причому врахування вимірності простору імпульсів є принциповим [4]. П. Дірак висунув гіпотезу [5], що повна енергія E частинки пропорційна величині P її повновимірного імпульсу

$$E = cP, \quad (1)$$

де c – фундаментальна стала [1]. З іншого боку, відповідно до принципу А. Айнштейна, повна енергія E частинки еквівалентна її повній масі m [6]:

$$E = c^2m. \quad (2)$$

Об'єднуючи (1) та (2), отримуємо розширений принцип еквівалентності:

$$E = cP = c^2m. \quad (3)$$

Отже, повні маса та енергія не самостійні, а лише характеризують величину повновимірного імпульсу частинки.

Відповідно до принципу Л. Ейлера [6] повна маса m є коефіцієнтом пропорційності між колінеарними векторами повновимірного імпульсу \vec{P} та повновимірної швидкості \vec{V} частинки $\vec{P} = m\vec{V}$, тобто величина повновимірної швидкості усіх частинок однакова:

$$|\vec{V}| = c = \text{const}. \quad (4)$$

Якщо в просторі-часі стала c відповідає величині швидкості поширення світла у вакуумі, то в АРМ вона є космологічною сталою, що пов'язана зі швидкістю розширення Всесвіту [4].

Із наведених постулатів випливає, що вимірність простору переміщень релятивістської механіки більша від трьох. Опираючись на космологічний принцип [1], у релятивістській механіці достатньо використовувати евклідові 4-простір \mathbb{R}^4 з базисом $(\vec{\zeta}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, де $\vec{\zeta}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ його орти, а частинки є векторними кривими – 4-траєкторіями [7]. Відповідно до (4), величина dR кожного з елементів $d\vec{R}$ 4-траєкторії довільної частинки пропорційна зміні її параметру t (часу) – перша космологічна в'язь:

$$dR = cdt. \quad (5)$$

1.2. Системи відліку в динамічному Всесвіті. Різновимірні частинки. Результати вимірювань у динамічному Всесвіті залежать від вибору системи відліку [1]. Надалі будемо розглядати дві такі системи: КСВ – космічну, виміри в якій проводять відносно Всесвіту, як цілісного космічного об'єкта, та ССВ – супутню з розширенням Всесвіту, де тіло відліку належить ССВ. Логічно допустити, що 4-вимірний швидкість \vec{V} довільної частинки в КСВ є векторною сумою її спостережуваної в ССВ складової \vec{V} та неспостережуваної в просторі-часі складової \vec{v}_0 швидкості тіла відліку ССВ:

$$\vec{V} = c\vec{\chi} = v_0\vec{\zeta} + v\vec{\tau}. \quad (6)$$

Тут $\vec{\chi}$ – одиничний вектор напрямку 4-швидкості \vec{V} , $\vec{\tau}$ – одиничний 4-вектор, що відповідає напрямку спостережуваної в ССВ швидкості \vec{V} , а $\vec{\zeta}$ – одиничний 4-вектор напрямку неспостережуваної в ССВ швидкості \vec{v}_0 (власний напрям). Умовою неспостережуваності \vec{v}_0 є ортогональність векторів $\vec{\zeta}$ і $\vec{\tau}$:

$$(\vec{\zeta}, \vec{\tau}) = 0. \quad (7)$$

Порівняно з простором-часом, в евклідовому 4-просторі існують ширші можливості для опису частинок різних класів. Якщо в [5] класи елементарних частинок – скалярні, векторні, спінові – розрізняють за числом спінових поляризацій, то тут запропоновано їх альтернативне трактування за вимірністю (мінімальною кількістю координат, необхідних для запису їхнього імпульсу): одновимірні – частинки темної матерії (DaM, аналог скалярних у просторі-часі) [1], двовимірні – кварки та глюони [7], тривимірні частинки темної енергії (DaE, аналог векторних у просторі-часі) [1] та чотиривимірні – лептони і адрони (аналог спінових у просторі-часі) [7]. Відповідно до Λ CDM-моделі, частинки DaM та DaE в енергетичному вимірі сумарно складають біля 95 % матерії Всесвіту [1]. (Властивості неспостережуваних у просторі-часі частинок DaM та DaE постульовано в подальшому викладі. Зазвичай, у Всесвіті вони не взаємодіють між собою, утворюючи конденсат – фізичний вакуум [1].)

1.3. Виділені інерційні КСВ. Натурні частинки. Античастинки та номади. Відповідно до космологічного принципу [1] Всесвіт центральносиметричний, тобто власні напрями $\vec{\zeta}$ КСВ повинні збігатися з напрямками $\vec{\zeta}_s$ радіальних променів, що виходять з центру симетрії Всесвіту, а напрями поширення частинок DaM бути колінеарними їм. Таких КСВ безліч.

Враховуючи принцип Л. Ейлера та (6), 4-імпульси \vec{P} частинок в евклідовому просторі \mathbb{P}^4 можна записати векторною сумою $\vec{P} = p_0 \vec{\zeta}_s + p \vec{\tau}$ їх неспостережуваних в ССВ складових \vec{p}_0 (власних), та спостережуваних у ССВ складових \vec{p} . Зіставляючи темну холодну матерію з нерухомим ефіром Г.А. Лоренца [5], умовою виділеної інерційної КСВ є друга космологічна в'язь:

$$\vec{p}_0 = p_0 \vec{\zeta}_s = \text{const} \forall t. \quad (8)$$

Для кожної КСВ за знаком скалярного добутку $(\vec{\chi}, \vec{\zeta}_s)$ розрізнятимемо три різновиди частинок: власне матерії, при $(\vec{\chi}, \vec{\zeta}_s) > 0$, антиматерії, при $(\vec{\chi}, \vec{\zeta}_s) < 0$ та нейтральних, при $(\vec{\chi}, \vec{\zeta}_s) = 0$.

Наслідком умов (7) та (8) є відмова від принципу загальної коваріантності [6] – кожна локальна виділена інерційна КСВ відрізнялася від інших власними (нативними) частинками, для яких $\vec{\zeta} = \vec{\zeta}_s$. 4-імпульс нативних частинок DaM та DaE може бути представлений в основному стані: для одновимірних DaM – $\vec{P}_M = (p_0, \vec{0})$, де присутня лише неспостережувана в ССВ компонента, а для тривимірних DaE – $\vec{P}_E = (0, \vec{p})$, де присутня лише спостережувана в ССВ складова. Відповідно до (7) напрям поширення нативних частинок DaE ортогональний до $\vec{\zeta}_s$ [4]. Вони не пов'язані другою космологічною в'яззю і можуть вільно переміщуватися між різними КСВ. Зважаючи на цю особливість тривимірні частинки називатимемо номадами. Обмежившись розглядом лише інерційних КСВ, усуваємо з розгляду гравітаційну взаємодію, тому надалі частинки DaE зіставлятимемо лише з фотонами.

2. Часова структурованість Всесвіту

2.1. *Первинний синтез речовини. Гомогенність Всесвіту.* У роботі виходять з гіпотези, що до народження Всесвіту весь простір \mathbb{R}^4 був заповнений хаосом фундаментальних частинок DaM та DaE. Взаємодіючи, зустрічні фундаментальні частинки гіпотетично могли взаємно перетворюватися: DaE + DaE ↔ DaM + анти DaM (парні частинки). З іншого боку, в результаті взаємодії частинок DaE, могли утворюватися парні лептони: DaE + DaE ↔ електрон + антиелектрон (ефект Швінгера [7]). В АРМ постулюють, що глюони та кварки утворювалися в результаті дисоціації фотона під дією частинки DaM. У рамках Стандартної моделі [7] глюону відповідає двовимірний фрагмент фотона, а кварку – гібрид його одновимірного фрагменту та частинки DaM [7]. В АРМ [4] їхні аромати та кольори пов'язують з орієнтацією складових векторів 4-імпульсів. Мінімальна енергія гібридних частинок (та античастинок) – об'єднань частинок DaM та DaE (кварків, лептонів та адронів) квантується.

У результаті первинного синтезу речовини простір \mathbb{R}^4 був заповнений плазмою різновимірних частинок, а їхнє взаємоперетворення призвело до рівномірного перерозподілу матерії (в енергетичному вимірі) по кожному з чотирьох вимірів простору \mathbb{R}^4 [1]. Важливо, що в позачасовому хаосі первинної плазми виникали також пари стійких частинок – електронів і позитронів та протонів і антипротонів, які при зустрічах анігілювали.

Процес народження Всесвіту почався з виникнення в околі окремих точок простору \mathbb{R}^4 локальних неоднорідностей напрямів поширення одновимірних частинок. За таких умов частинки та античастинки у середньому розносилися в протилежних напрямках (наслідок СРТ-інваріантності [7]), що необоротно зменшувало кількість актів анігіляції (таких зародків могло бути безліч). Сепарація частинок та античастинок призвела до народження Всесвіту, запустивши відлік часу, а сам процес народження займав значну причинно-зв'язану область. Внаслідок сепарації частинок та античастинок матерія в центральносиметричному Всесвіті (поза областю первинного синтезу речовини) стає гомогенною - практична відсутність антиматерії (відповідно до наведеного в підрозділі 1.4 означення).

2.2. *Лінії реєстрованих подій.* На рис. 1 наведено схему перерізу простору \mathbb{R}^4 Всесвіту, де точкою B позначено його центр симетрії, точкою C – місцезнаходження спостерігача, а точкою O – космічного об'єкта. Власні напрями локальних КСВ₀ космічного об'єкта та КСВ_C спостерігача колінеарні радіальним променям, відповідно \vec{L}_0 та \vec{L}_C , як наведено на рис. 1, а Θ – кут між ними. Лінія зору спостерігача в КСВ_C ортогональна до променя \vec{L}_C , як наведено на рис. 1. Вектори 4-імпульсів фотонів, що випромінюються нерухомим космічним об'єктом O , ортогональні до \vec{L}_0 (нативні в КСВ₀). У загальному випадку в точці C можна спостерігати лише

ті космічні об'єкти, які перебувають на лінії реєстрованих подій – колі *COBC* діаметром, що дорівнює радіусу Габбла $R_H = (4,235 \pm 0,002)$ Гпк [2]. Доступними оптичним спостереженням будуть об'єкти, що знаходяться на усіх можливих лініях реєстрованих подій (в гіпероб'ємі реєстрованих подій).

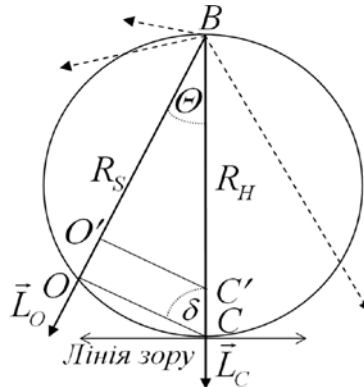


Рис. 1. Лінія реєстрованих подій

2.3. *Натуралізація частинок-номад.* Нехай у KCB_O випромінюється фотон з 4-імпульсом $\vec{P}_O = P_O \vec{\xi}_O$, для якого $(\vec{\xi}_O, \vec{\zeta}_O) = 0$. Тут $\vec{\xi}_O$ – напрям поширення фотона у Всесвіті, а $\vec{\zeta}_O$ – власний напрям KCB_O , як наведено на рис. 1. При переході фотона з системи відліку KCB_O до KCB_C , з власним напрямом $\vec{\zeta}_C$, для яких $(\vec{\zeta}_C, \vec{\zeta}_O) = \cos \Theta > 0$, фотон-мандрівник матиме надлишкову енергію $E_0 = cp_0 = cP_O \sin \Theta$ поряд з фотоном, породженим у KCB_C . У роботі використана гіпотеза, що в результаті взаємодії фотона-мандрівника з нерухомою чотиривимірною частинкою у KCB_C , він натуралізується, тобто стає нативним, а надлишкова енергія поглинається чотиривимірною частинкою. (Процес натуралізації фотонів фізично еквівалентний генерації частинок ДаМ.) У процесі натуралізації випромінюється (чи реєструється) новий фотон з 4-імпульсом $\vec{P}_C = P_C \vec{\xi}_C$, для якого $(\vec{\xi}_C, \vec{\zeta}_C) = 0$ та

$$P_C = P_O \cos \Theta. \quad (9)$$

2.4. *Зсув спектру випромінювання.* У спектроскопії вимірюють не величини імпульсів фотонів, а їхні частоти ω , зв'язок між якими для нативних частинок задається формулою М. Планка $E = cP = cp = \hbar\omega$ [6], де \hbar – стала Дірака. Відповідно до формули Планка переписемо (9) у вигляді: $\omega_C = \omega_O \cos \Theta$. Оскільки в астрономії використовують параметр z відносного зсуву спектру $z = \omega_O / \omega_C - 1$ [1], формула (9) отримає вигляд:

$$\cos \Theta = (z + 1)^{-1}. \quad (10)$$

Космічні об'єкти спостерігають на небесній сфері [1], кожна точка якої є зображенням усієї лінії реєстрованих подій. Розосередити космічні об'єкти в просторі \mathbb{R}^4 можна, вивчаючи зміни параметра z . Враховуючи, що відстань від центру симетрії B Всесвіту до космічного об'єкта O $BO = R_S$ (див. рис. 1) пов'язана з радіусом Габбла R_H та кутом Θ (чи доповняльним $\delta = \pi / 2 - \Theta$), відповідно до (10) запишемо:

$$R_S = R_H \cos \Theta = R_H \sin \delta = R_H (z + 1)^{-1}. \quad (11)$$

Процес зсуву неперервного спектру теплового випромінювання [3] аналогічний зсуву лінійчатого спектру зірок. Оскільки при реєстрації теплового випромінювання користуються поняттям його температури T_S , що пропорційна хвильовому числу, на яке припадає максимум неперервного спектру [1], формулу (11) можна переписати:

$$T_C = T_S \cos \Theta = T_S \sin \delta = T_S (z + 1)^{-1}. \quad (12)$$

Тут $T_c = (2,72548 \pm 0,00057)$ К температура КМФ [3], яку реєструє спостерігач, а T_s – температура випромінювача. За помірними значеннями T_c та параметра z максимуму неперервного спектру можна розрахувати температуру T_s випромінювача.

2.5. *Перетворення проміжків часу.* На підтвердження гіпотези про напрями векторів 4-імпульсів фотонів розглянемо результати вимірювань тривалості спалахів наднових типу 1a (SN 1a) [1]. Якщо спалах починається в точці O' , а закінчується в точці O (див. рис. 1), то для спостерігача він почнеться в точці C' , а закінчиться в точці C . Відповідно до означення (5) проміжки часів Δt_o та Δt_c у локальних системах відліку пропорційні відрізкам $O'O$ та $C'C$, що пов'язані з власними напрямими двох різних КСВ (див. рис. 1). Враховуючи зв'язок (10), отримаємо:

$$\Delta t_o = \Delta t_c \cos \Theta = \Delta t_c (z+1)^{-1}. \quad (13)$$

Залежність (13) збігається з даними вимірювань тривалості спалахів SN 1a [8].

2.6. *Центральні об'єкти Всесвіту.* Усі точкові випромінювачі, що знаходяться на конкретній лінії реєстрованих подій, відображаються на небесній сфері окремими точками. Натомість центральний випромінювач (об'єкт, радіусом R_s , що охоплює усі власні напрями Всесвіту), проектується на всю небесну сферу (спостерігач знаходиться ніби всередині центрального випромінювача, тому збирати інформацію про його властивості можна з довільної точки небесної сфери та в довільних напрямках).

Для визначення розмірів центральних об'єктів Всесвіту використовують аналіз мультипольних моментів КМФ. Відповідно до [3], кутові розміри 2δ центральних об'єктів пов'язують з порядком ℓ поліному Лежандра [3]:

$$\delta = \pi / (2\ell). \quad (14)$$

На рис. 2 наведено взятий із [2] графік ТТ-спектру мультипольних моментів КМФ, що містить дві принципово різні області: першу, в межах $\ell < 30$ та другу, при $\ell \geq 30$ (обидві вимагали окремих алгоритмів усереднення вимірів [2]).

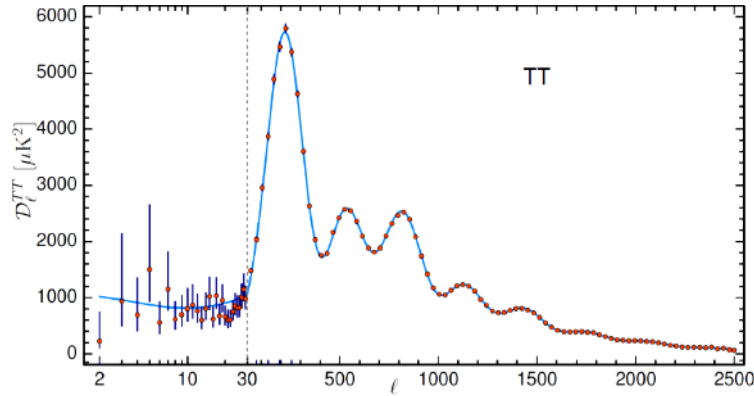


Рис. 2. ТТ-спектр мультипольних моментів КМФ

Ділянку ТТ-спектру при $\ell < 30$ можна розділити на три якісно різні області: при $\ell < 8$, де спостерігаються хаотичні виміри, спричинені випромінюванням дискретних зірок і галактик, при $8 \leq \ell < 20$, де на спектр дискретних космічних об'єктів накладається вплив випромінювання значних об'ємів реіонізованого водню, та при $20 \leq \ell < 30$, де вплив реіонізованого водню відсутній. Відповідно до (14), величині $\ell = 8$ відповідає значення кута δ центрального об'єкта $\delta = 0,098$ рад.

Зважаючи, що при $\delta < 0,1$ $\sin \delta \approx \delta$, для зручності наступних трактувань результатів вимірювань скористаємося лінеаризованими формулами (11), (12) та (14):

$$R_s = \frac{\pi}{4\ell} R_H, \quad z = \frac{4\ell}{\pi} - 1, \quad T_s = \frac{4\ell}{\pi} T_c. \quad (15)$$

Враховуючи (15), вимірам ТТ-спектру в діапазоні $8 \leq \ell < 20$, відповідає відносний зсув z спектру зірок в межах $(9,2 < z < 24)$, температури T_s центральних випромінювачів у межах

($28 < T_s < 70$) К та відносна відстань $x = R_s / R_H$ від центру симетрії Всесвіту ($0,039 < x < 0,098$) Порядку полінома Лежандра $\ell = 30$ відповідають параметри $z = 37$, $T_s = 104$ К та $R_s = 0,026R_H$.

При $\ell > 30$, переважає випромінювання, що породжене концентричними центральними об'єктами Всесвіту з кутами $\delta < 0,026$ рад.

За таких кутів фотони КМФ поширюються по твірних конусу з кутом при вершині, меншим від 2δ та віссю, що збігається з власним напрямом \vec{L}_C КСВ. На рис. 2 першому піку (при $\ell_1 = 210$) відповідає центральний випромінювач з кутовим розміром $2\delta_1 = 7,28 \cdot 10^{-3}$ рад, а третьому, при $\ell_3 = 860$, (аномально високим порівняно з прогнозованим моделлю Λ CDM [1]), центральний випромінювач з кутовим розміром $2\delta_3 = 1,82 \cdot 10^{-3}$ рад. Куту $\delta_1 = 3,74 \cdot 10^{-3}$ рад. відповідає теплове випромінювання із $z_1 = 266$, $R_s = 3,74 \cdot 10^{-3} R_H$ та температурою $T_1 = 729$ К.

Це випромінювання границі області останнього розсіяння [1], спричинене гіпотетично дисипацією кінетичної енергії речовини в космічних комірках, які лише формуються. Куту $\delta_3 = 9,13 \cdot 10^{-4}$ рад відповідають параметри $z_3 = 1094$, $R_s = 9,13 \cdot 10^{-4} R_H$ та температура $T_3 = 2984$ К, що близька до критичної для космологічної рекомбінації електронів та протонів [1]. Збіг значень кута δ_3 , порахованого різними способами (за космологічним зсувом та спектром мультипольних моментів КМФ) підтверджує гіпотезу лінійності Всесвіту.

Висновки

Показано, що Всесвіт 4-вимірний, динамічний. Для його моделювання запропоновано апарат релятивістської механіки, що використовує евклідов 4-простір із виділеними принципом Лоренца інерційними космічними системами відліку. Введено поняття частинок різних вимірів та різновидів – нативних, парних та номад. Для пояснення червоного зсуву спектру зірок та космічного мікрохвильового фону запропоновано використовувати поняття натуралізації фотонів при їхньому переході між різними космічними системами відліку. Зроблено аналіз причин гомогенності матерії у Всесвіті (практичну відсутність антиматерії). Встановлено причини радіальної та часової структурованості Всесвіту.

Література

1. Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. Oxford University Press. 612 p.
2. Aghanim, N. et al. 12 (2007). [Planck 13] arXiv:1303.5076v3 [astro-ph.CO] 20 Mar 2014.
3. Smoot, G. F. (2007). Anisotropy of Relic Radiation. *UFN*. 177, 12, pp. 1294-1317. DOI <https://doi.org/10.3367>.
4. Pasternak, R. (2018). Means of the restrictions elimination of the space-time apparatus in relativistic mechanics *Visnyk TNTU*, No 1 (89), p. 64-71.
5. Dirac, P.A.M. (2008). *Principles of Quantum Mechanics* (4th ed.). Oxford science publications, 314 p.
6. de Wit, B., Smith, J. (1986). *Field theory in particle physics*. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 502 p.
7. Derdzinski, A. (1992). *Geometry of the Standard Model of Elementary Particles*. Springer-Verlag, Berlin, 197 p.
8. Riess, A. G. et al. (2016). *Astrophys. J.* 826:56, 20 Jul. DOI <https://doi:10.3847/0004-637X/826/1/56>.