

М.П. Ярошевич, В.С. Пуць, В.Л. Мартинюк, П.П. Мелесь

Луцький національний технічний університет

ОСОБЛИВОСТІ ДИНАМІКИ НЕЗРІВНОВАЖЕНОГО РОТОРА З ВІБРУЮЧОЮ ВІССЮ

Розглядаються стаціонарні (близько стаціонарні) режими обертання незрівноваженого ротора з частотою коливань осі. З позицій вібраційної механіки наводяться пояснення механізму вібраційного захоплення обертання незрівноваженого ротора; продемонстровано, що динамічний (вібраційний) момент, що виникає внаслідок коливань прагне синхронізувати коливальний і обертальний рухи. Показано, що при встановленні стаціонарного режиму обертання ротора можуть збуджуватися значні, відносно повільні коливання його швидкості. Теоретичні результати підтверджуються комп'ютерним моделюванням.

Ключові слова: незрівноважений ротор, вібрація осі, вібраційний момент, нестаціонарний процес, повільні коливання.

M.P. Yaroshevich, V.S. Puts, V.L. Martyniuk, P.P. Meles

FEATURES OF THE DYNAMICS OF AN UNBALANCED ROTOR WITH A VIBRATING AXIS

Stationary (near stationary) rotation modes of an unbalanced rotor with the oscillation frequency of its axis are considered. From the standpoint of I.I. Blekhnman's vibrational mechanics, explanations of the mechanism of vibrational capture of the rotation of an unbalanced rotor are given; it is demonstrated that the vibration moment arising as a result of oscillations tends to synchronize vibrational and rotational movements, that its effect after the establishment of a stationary mode becomes unambiguous – either braking or accelerating. It is shown that when a stationary rotation mode is established, large, relatively slow oscillations of rotor's speed can occur. Theoretical results are confirmed by computer simulation.

Key words: unbalanced rotor, axis oscillations, vibration moment, vibrational capture, slow oscillations.

Постановка проблеми. Потреби розвитку та вдосконалення вібраційної техніки, з одного боку, та необхідність розуміння своєрідних явищ, пов'язаних з дією вібрації на механічні системи роблять актуальними задачі дослідження динаміки незрівноваженого ротора з вібруючою віссю. Суттєво, що ледве помітна вібрація осі незрівноваженого ротора може забезпечувати істотну передачу енергії ротору.

Вібраційне захоплення, а також вібраційна підтримка обертання незрівноваженого ротора під дією коливань осі є важливими нелінійними ефектами, які лежать в основі принципу дії низки вібраційних машин та пристроїв. Ефекти широко використовуються в інерційних дробарках, вібраційних грохотах, млинах та живильниках, а також у вібраційних перетворювачах руху. Крім того, ефекти знайшли успішне застосування у вібромашинах із дебалансними збудниками, що самосинхронізуються. Відомо, також про застосування ефекту вібраційної підтримки обертання незрівноваженого ротора для використання енергії морських хвиль.

Аналіз останніх досліджень та публікацій.

Дослідженню вібраційних ефектів присвячена значна кількість існуючих робіт. Мабуть вперше дослідження вказаних ефектів було виконано у роботі М.М. Боголюбова [1]. З використанням асимптотичного методу було отримано умову за якої можлива вібраційна підтримка обертання незрівноваженого ротора при вібрації осі ротора. Дослідження виконано для основного режиму обертання ротора при прямолінійних коливаннях його осі. Найбільш повний виклад та узагальнення основних результатів досліджень наведено у монографіях [2, 3].

Питанням практичного використання ефектів вібраційного захоплення, а також вібраційної підтримки обертання незрівноваженого ротора під дією коливань осі присвяченні статті [4-7]. У роботі [4] аналізуються можливі режими руху незрівноваженого ротора з автобалансуючим пристроєм. Показано, що за заданих параметрах динамічної системи є кілька якісно різних стійких режимів руху ротора. Проведено аналіз діапазонів стійкості всіх можливих режимів руху. У статті [5] було розроблено математичну модель та отримано чисельні результати динамічної поведінки маятника, який з'єднано з генератором постійного струму; при цьому, вісь маятник здійснювала вертикальні гармонічні коливання. Детально проаналізовано неідеальну взаємодію двигуна постійного струму з маятником. Праця [7] присвячена дослідженням коливань механічної системи збуджуваних інерційним віброзбудником, який приводиться в обертання електродвигуном асинхронного типу.

Серед останніх робіт у яких досліджується нелінійні вібраційні ефекти які мають місце при обертанні незрівноваженого ротора (інерційного віброзбудника) з вібруючою віссю слід відзначити статті [8, 9].

У монографії [2] звертається увага на те, що достатньо простий опис ефекту вібраційного підтримки обертання незрівноваженого ротора можна отримати за допомогою підходу вібраційної механіки. З використанням зазначеного підходу в пропонованій роботі отримано інженерну інтерпретацію явища вібраційної підтримки обертання. Для практично важливого випадку, коли опір обертанню ротора обумовлено лише тертям у підшипниках, запропоновано просту умову існування стаціонарного режиму обертання незрівноваженого ротора.

1. Опис динамічної системи та рівняння руху.

Розглянемо незрівноважений ротор (дебалансний віброзбудник), вісь якого здійснює вертикальні гармонічні коливання, що збуджуються ідеальним джерелом енергії за законом (рис. 1). Передбачається, що вісь ротора горизонтальна, а напрямок коливань перпендикулярний до осі. Зауважимо, що вивчений у [2] більш загальний випадок коливань осі у двох взаємно перпендикулярних напрямках, принципово не відрізняється від розглянутого, проте потребує більш громіздких обчислень.

Рівняння руху незрівноваженого ротора з віссю, яка вібрує, має вигляд

$$I\ddot{\varphi} = L(\dot{\varphi}) - R(\varphi) + m\varepsilon(\ddot{x} \cos \varphi \cos \omega t + g \cos \varphi), \quad (1)$$

де I – момент інерції незрівноваженого ротора; φ – кут повороту ротора; $L(\dot{\varphi})$ – обертовий момент електродвигуна; $R(\varphi)$ – момент сил опору обертання ротора; m, ε – маса та ексцентриситет ротора; A, ω – амплітуда та частота коливань осі ротора; g – прискорення вільного падіння.

Вважаємо, що момент $R(\varphi)$ може враховувати як опір в підшипниках ротора, так й корисне навантаження; ротор приводиться у обертання від електродвигуна асинхронного типу. Зважаючи на те, що нижче досліджуються стаціонарні режими руху, момент електродвигуна будемо враховувати за допомогою його статичної характеристики.

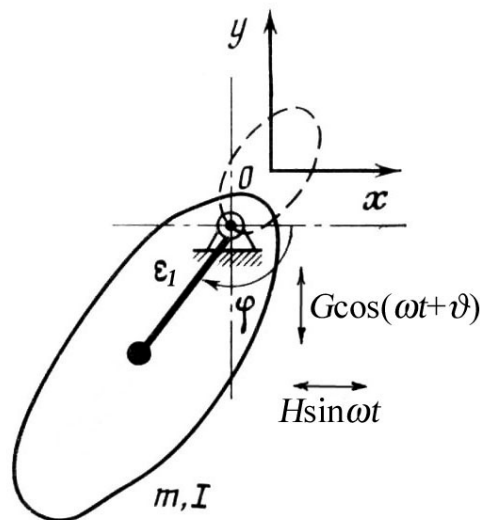


Рис. 1. Незрівноважений ротор з віброючою віссю

2. Основне рівняння вібраційної механіки

Проаналізуємо основний режим стаціонарного обертання незрівноваженого ротора, тобто, його обертання із середньою кутовою швидкістю $\dot{\varphi}_{cp}$ рівною (близькою) до частоти коливань осі ω . Обмежуючись рухом ротора, який мало відрізняється від рівномірного обертання, подамо рівняння (1) у вигляді

$$I\ddot{\varphi} + k(\dot{\varphi} - \omega) = \mu\Phi(\varphi, \omega t), \quad (2)$$

де $k = k_1 + k_2$ – сумарний коефіцієнт демпфування [2]; $\mu > 0$ – малий параметр; $\Phi(\varphi, \omega t) = L_\omega - R_\omega - m\varepsilon(\omega^2 A \cos \varphi \cos \omega t - g \cos \varphi)$.

При одержанні рівняння (2) виконана лінеаризація моментів $L(\dot{\varphi})$, $R(\dot{\varphi})$ поблизу частоти $\dot{\varphi} = \omega$, причому, $k_1 = -(dL(\dot{\varphi})/d\dot{\varphi})_{\dot{\varphi}=\omega} > 0$, $k_2 = (dR(\dot{\varphi})/d\dot{\varphi})_{\dot{\varphi}=\omega} > 0$ [2].

Використовуючи метод прямого розділення рухів, проаналізуємо обертання ротора виду $\varphi = \omega t + \alpha(t) + \psi(t, \omega t)$. При цьому, рахуємо $\alpha(t)$ – повільною, а $\psi(t, \omega t)$ малою швидкою 2π -періодичною по $\tau = \omega t$ функцією, середнє за період значення якої дорівнює нулю $\langle \psi(t, \omega t) \rangle = 0$. Кутові дужки $\langle \dots \rangle$ тут та нижче вказують на усереднення виразу, який в них знаходиться за період $2\pi/\omega$ по швидкому часі τ .

Слідуючи традиційній процедурі використовуваного методу, напишемо рівняння повільних і швидких рухів ротора у вигляді [1]

$$I\ddot{\alpha} + k\dot{\alpha} = \mu[L_\omega - R_\omega + V(\alpha)], \quad (3)$$

$$I\ddot{\psi} + k\dot{\psi} = \mu[m\varepsilon(\omega^2 A \cos \varphi \cos \omega t - g \cos \varphi) - V(\omega)], \quad (4)$$

де $V(\alpha) = -\langle m\varepsilon(\omega^2 A \cos \varphi \cos \omega t - g \cos \varphi) \rangle$.

У (3) вираз $V(\alpha)$ є, так званим, вібраційним моментом [2] – середнє значення додаткового моменту, що діє на незрівноважений ротор внаслідок коливань осі. З використанням зазначеного методу достатньо розв'язувати рівняння швидкого руху приблизно. Тоді, у вихідному наближенні маємо $\psi = \psi^{(0)} = 0$. З урахуванням цього розв'язку отримуємо $V(\alpha) = -V_{\max} \cos \alpha$, де

$$V_{\max} = \frac{m\varepsilon\omega^2 A}{2}.$$

З (3) випливає, що умовою існування стаціонарного режиму обертання ротора з частотою ω буде нерівність $\frac{|L_\omega - R_\omega|}{V_{\max}} \leq 1$, яка у випадку, коли кутові швидкості ω і $\dot{\varphi}$ додатні та не істотно

відрізняються одна від одної, набуває вигляду $\frac{k|\omega_0 - \omega|}{V_{\max}} \leq 1$, де ω_0 – кутова швидкість обертового ротора за відсутності коливань осі (так звана, парціальна швидкість ротора [1]). Для низки практично важливих випадків, коли момент сил опору обертанню ротора обумовлений переважно опором у підшипниках, цій умові можна надати більш практичний вигляд:

$$\frac{2L_{\omega n}|\omega_0 - \omega|}{F A(\omega_c - \omega_n)} \leq 1, \quad (5)$$

де $L_{\omega n}$, ω_n – номінальний момент і номінальна кутова швидкість електродвигуна; ω_c – синхронна швидкість двигуна; $F = m\varepsilon\omega^2$ – амплітуда вимушеної сили, яку розвиває незрівноважений ротор.

Зауважимо, при отриманні умови (6) враховано той факт, що вплив швидкості на обертаючий момент асинхронного електродвигуна виражений дуже стрімко, чого не можна сказати про момент сил опору в підшипниках ротора.

Умову (6) можна використовувати для грубої оцінки можливості існування стаціонарного режиму обертання ротора з частотою коливання осі. Очевидно, що при обертанні ротора зі швидкістю ω_0 , близької до частоти коливань ω , умова існування стаціонарного режиму обов'язково виконується.

При виконанні умови (5) рівняння $L_\omega - R_\omega - V_{\max} \cos \alpha = 0$ допускає два істотно різних розв'язки: $\alpha_{1,2} = \pm \arccos\left(\frac{L_\omega - R_\omega}{V_{\max}}\right)$. Для стійкості режиму, який відповідає розв'язкам $\alpha_{1,2}$, необхідно виконання умови $\sin \alpha_i < 0$. Зауважимо, що ця умова отримується, якщо скласти рівняння у варіаціях для рівняння (3) та розв'язку α_i поклавши $\alpha = \alpha_i + x$, де x – малі збурення: $I\ddot{x} + k\dot{x} - V_{\max} \sin \alpha_i x = 0$.

Загальний розв'язок рівняння (4) відносно швидкості $\dot{\alpha}$ можна подати в вигляді ($t = 0$, $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0$):

$$\dot{\alpha} = (\dot{\alpha}_0 - \dot{\alpha}_{\text{уст}})e^{-\frac{k}{I}t} + \dot{\alpha}_{\text{уст}}, \quad (6)$$

де $\dot{\alpha}_{\text{уст}} = \frac{L_\omega - R_\omega + V(\alpha)}{k}$.

Таким чином, рівняння (3) описує повільний процес встановлення стаціонарного режиму обертання незрівноваженого ротора; тривалість перехідного процесу визначається величиною $T = I/k$, так званою постійною часу машинного агрегату.

Згідно отриманих виразів, у разі коли парціальна кутова швидкість ω_0 збігається з частотою коливань осі ω , розв'язками рівняння (5) будуть: $\alpha_{1,2} = \pm \pi/2$; при цьому розв'язок $\alpha_2 = -\pi/2$ є стійким. Як бачимо, дія вібраційного моменту ($V(\alpha) = \pm V_{\max} \cos \alpha$) зводиться до встановлення та подальшого підтримання стійкого зсуву між фазами коливального та обертального рухів.

Якщо частота вібрації ω дещо відрізняється від частоти ω_0 , змінна $\dot{\alpha}$ буде асимптотично прагнути до значення $\dot{\alpha}_{\text{уст}} = \pm \Delta\omega$. У цьому випадку, стійкий розв'язок відрізнятиметься від $\alpha_2 = -\pi/2$. При цьому, коли $\omega_0 > \omega$, зсув фаз $\alpha(t)$ між рухами збільшиться, а при $\omega_0 < \omega$ – зменшиться; до того ж, тим істотніше, чим більша відмінність у частотах. Отже, вплив вібраційного моменту буде зводитися до пригальмовування (випадок $\omega_0 > \omega$, вібраційний момент від'ємний) або прискорювання ($\omega_0 < \omega$, $V(\alpha)$ – додатній) обертання ротора. У результаті забезпечується обертання ротора з частотою, яка дорівнює частоті коливань осі; до того ж, з певним зсувом фаз. Отже, вібрація, що збуджується ідеальним джерелом енергії, нав'язує свій ритм руху ротору.

Вібраційного захоплення обертання незрівноваженого ротора добре видно на рис. 2 отриманому шляхом комп'ютерного моделювання ефекту. Параметри у рівнянні (1) вибиралися такими: $m = 30 \text{ кг}$; $\varepsilon = 0,03 \text{ м}$; $I = 0,07 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; $A = 0,005 \text{ м}$; при цьому, використовувалася динамічна модель трифазного асинхронного електродвигуна з $P = 1,5 \text{ кВт}$ і $n_c = 1500 \text{ хв}^{-1}$ [10]. Зауважимо, що на рис. 2 у момент часу $t = 1,1 \text{ с}$ вісь ротора починає здійснювати вертикальні гармонічні коливання. Результати моделювання непогано збігаються з результатами обчислень згідно з отриманими формулами.

Таким чином, якщо до виникнення стаціонарного режиму руху вібрація і гальмувала, і прискорювала обертання ротора, то при її появі вплив вібрації стає лише гальмуючим або обертаючим (оцінюваний вібраційним моментом). Значить, у стаціонарному режимі руху незрівноважений ротор з вібруючою віссю неодмінно або віддає, або відбирає енергію від джерела коливань.

Очевидно, що дія вібрації зростає при більшому статичному моменті ротора, а також при більших частотах та амплітудах коливань. Отже, описувані ефекти можуть мати місце при резонансних явищах у системі.

Зазначимо, що отримані результати поширюються також на режими пуску та вибігу. Так, у разі, коли при розбігу ротора величина вібраційного моменту стає порівнянною з пусковим моментом двигуна, а при вибігу – з моментом сил опору обертання, може відбуватися

«застрягання» швидкості ротора на частоті вібрації. Зазначений факт підтверджується комп'ютерним моделюванням.

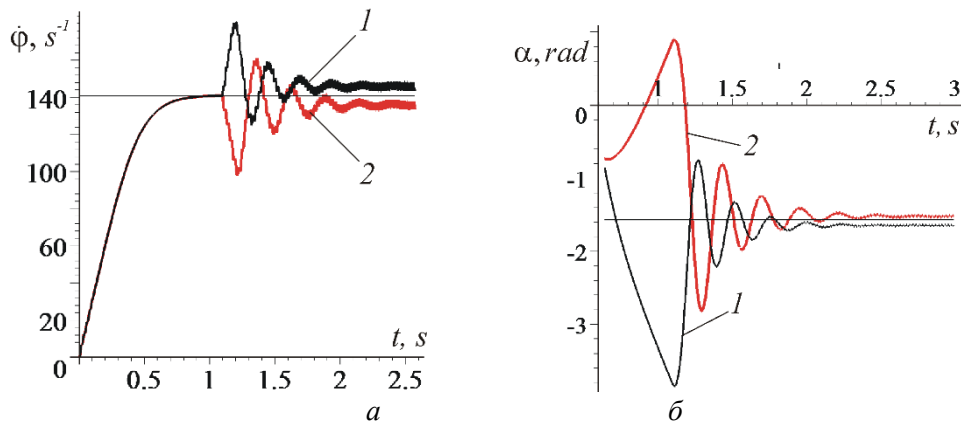


Рис. 2. Зміни у часі а) частоти обертання незрівноваженого ротора;
 б) зсуву фаз між обертальним та коливальним рухами: 1 – $\omega = 146 \text{ c}^{-1}$;
 2 – $\omega = 136 \text{ c}^{-1}$, горизонтальна пряма – $\omega_0 \approx 141 \text{ c}^{-1}$

Як бачимо, вібрація осі незрівноваженого ротора при пуску може призводити до ефекту Зоммерфельда, а в стаціонарному режимі руху – до зміни середньої швидкості обертання ротора і, до того ж, до підвищення амплітуд коливань швидкості.

Очевидно, що у разі довільної періодичної вібрації осі ротора, що подається у вигляді розкладу $y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \gamma_n)$, також можливе його обертання із середньою кутовою швидкістю

$\dot{\phi}_{cp} = n\omega$, яка дорівнює відповідній гармоніці вібрації.

3. Рівняння швидких рухів незрівноваженого ротора

Розглянемо рівняння швидких рухів (4). За допомогою методики, яка використовується в роботі [11], нескладно подати (4) у вигляді

$$\ddot{\psi} + 2b_{\psi}\dot{\psi} + p_{\psi}^2\psi = \Phi_x \cos 2\omega t, \quad (7)$$

де $b_{\psi} = k/2I$; $p_{\psi}^2 = c_{\psi}/I$; $c_{\psi} = -V_{\max} \sin \alpha$; $\Phi_x = -V_{\max}/I$.

Зазначимо, що вплив моменту сили тяжкості на обертання ротора не враховується.

Як бачимо, (7) набуває вигляду рівняння коливального типу. Коефіцієнт c_{ψ} можна назвати динамічним (вібраційним) коефіцієнтом жорсткості; у стійких стаціонарних режимах він позитивний. Величина p_{ψ} є частотою малих вільних коливань незрівноваженого ротора або відповідно до [11] частотою вільних маятникових коливань ротора поблизу стійкого стаціонарного режиму. Неважко встановити, що з виконанні умови $A < \varepsilon$, частота p_{ψ} значно менше частоти ω [1]. Значить, при встановленні стаціонарного режиму обертання ротора матиме місце явно виражений перехідний процес з великими початковими амплітудами та основною відносно повільною частотою.

Збудження повільних (напівповільних) коливань незрівноважених роторів на вібруючому основі під час встановлення стаціонарних режимів обертання вважатимуться загальної закономірністю [1, 12, 13].

Висновки. У випадку, вібрація осі незрівноваженого ротора або гальмує, або прискорює обертання ротора за довільним законом. При встановленні стаціонарного режиму обертання ротора з частотою коливань осі вплив вібрації (оцінюється вібраційним моментом) стає цілком визначеним. Якщо частота вібрації більше парціальної частоти ротора, буде вібраційне прискорення обертання ротора, і навпаки, при виконанні умови $\omega_0 > \omega$ буде відбуватися вібраційне гальмування. Характер

впливу вібрації визначається, перш за все, зсувом фаз, що встановився, між обертальним і коливальним рухом.

Звісно ж, що отримані результати можна використовувати при вдосконаленні систем управління мехатронними вібраційними установками.

Список використаних джерел

1. Боголюбов Н.Н. Избранные труды в 3-х томах. Т.1.- Киев: Наукова думка, 1969.
2. Blekhman I.I. Vibrational mechanics – Nonlinear dynamic effects, General approach, Applications. Singapore et al.: World Scientific, 2000.
3. Blekhman I.I. Blekhman L.I. Dresig H. and others. Selected Topics in Vibrational Mechanics. World Scientific, New Jersey, London, 2004, 409 p.
4. Filimonikhin G.B., Yatsun V.V. Investigation of the process of excitation of dual-frequency vibrations by ball auto-balancer of Gil 42 screen. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, Vol. 1, Issue 7 (79), 2016, p. 17–23.
5. Avanzo RH, Tusset AM, Balthazar JM, et al. (2019) Energy harvesting through pendulum motion and DC generators. *Latin American Journal of Solids and Structures* 16 (01).
6. M. Tusset . C.E. Marques. J. M. Balthazar. M. Aparecido, W. B. Lenz. On energy harvesting from ambient vibrations through an oscillating pendulum system fixed to a suspended platform, *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA)* 2020, Vol. 11, No 3.
7. Yaroshevich N., Yaroshevych O., Lyshuk V. (2021) Drive Dynamics of Vibratory Machines with Inertia Excitation. In: Balthazar J.M. (eds) *Vibration Engineering and Technology of Machinery. Mechanisms and Machine Science*, vol 95. Springer.
8. Ярошевич М.П., Силивонюк А.В. Про деякі особливості динаміки розбігу вібраційних машин зі збудниками, що само синхронізуються. *Науковий вісник НГУ. Дніпропетровськ*. 2013. №4. С. 37-45.
9. Yaroshevich NP, Lanets OS, Yaroshevych OM (2022) Slow Oscillations in Systems with Inertial Vibration Exciters. In: Balthazar, J.M. (eds) *Nonlinear Vibrations Excited by Limited Power Sources. Mechanisms and Machine Science*, Springer.
10. Blekhman, I.I., Semenov, Y.A., Yaroshevych, M.P. On the possibility of designing adaptive vibration machines with self-synchronizing exciters // *Mechanisms and Machine Science*, 2020, 80, С. 231-236