УДК 330.4:656 DOI 10.36910/775.24153966.2023.76.14

М. В. Ямковой

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕРЕЖЕВИХ ЛОГІСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Національний лісотехнічний університет України

У роботі досліджено механізми математичного моделювання мережевих логістичних процесів. Підкреслено, що в умовах сьогодення активно використовуються технології взаємодії між різними машинами, швидкісні мережі передачі даних по логістичній системі і необмежений доступ до геолокації, які забезпечують потік даних, що містить повний набір інформації про окрему одиницю товару та логістичні дії з цим товаром у рамках всієї системи. Наголошено, що аналіз та обмін інформацією між усіма учасниками логістичної мережі відбувається на основі цифрової логістичної сітки. Процес побудови та реалізації логістичної сітки засновано на технології збору даних з датчиками та передачею в режимі реального часу за допомогою мобільного зв'язку з метою подальшого аналізу та цифрового обміну даними. У рамках роботи побудовано граф довільної топології логістичної мережі з детальним обґрунтуванням вузлів графу та відповідних їм ребер. Параметризація кожного окремого елементу графу відбувається враховуючи топологію мережі та орієнтації елементів. Сформовано математичну модель яку можна використовувати для оптимізації процесів, що відбуваються в представленій мережевій логістичній структурі. Представлено математичне моделювання для процесів перенесення та формалізації. Рішення крайової задачі покладено на принцип розкладання в ряд із використанням ортонормованої системи власних функцій, зазначається, їх відображає теорія Штурма–Ліувілля. Наголошується, що ефективністю окресленого підходу є можливість вирішення задачі моделювання потоків у мережі, із застосування результату як послідовності для пошуку рішення задач модального керування. У якості перспектив до подальшого дослідження запропоновано розробка програмного додатку та впровадження його на хмарних серверах, що дозволить онлайн взаємодіяти з експедиторами та транспортом безпосередньо в процесі переміщення, незалежно від їх місцезнаходження.

Ключові слова: *логістична мережа, аналіз, побудова, математичне моделювання, процес, алгоритм.*

M. Yamkovoi

MATHEMATICAL MODELING OF NETWORK LOGISTICS PROCESSES

Mechanisms of mathematical modeling of network logistics processes are investigated in the work. It is emphasized that in today's conditions, technologies of interaction between different machines, high-speed data transmission networks in the logistics system and unlimited access to geolocation are actively used, which provide a data flow containing a complete set of information about a separate unit of the product and logistics actions with this product within the framework of the entire systems. It was emphasized that the analysis and exchange of information between all participants of the logistics network takes place on the basis of a digital logistics network. The process of building and implementing a logistics network is based on the technology of data collection with sensors and real-time transmission via mobile communication for further analysis and digital data exchange. As part of the work, a graph of an arbitrary topology of the logistics network was constructed with a detailed justification of the nodes of the graph and their corresponding edges. The parameterization of each individual element of the graph takes into account the topology of the network and the orientation of the elements. A mathematical model has been formed that can be used to optimize the processes occurring in the presented network logistics structure. Mathematical modeling for transfer and formalization processes is presented. The solution of the boundary value problem is based on the principle of series expansion using an orthonormal system of eigenfunctions, it is noted that they are reflected by the Sturm–Liouville theory. It is emphasized that the effectiveness of the outlined approach is the possibility of solving the problem of modeling flows in the network, using the result as a sequence for finding a solution to modal control problems. As prospects for further research, the development of a software application and its implementation on cloud servers is proposed, which will allow online interaction with forwarders and transport directly in the process of moving, regardless of their location.

Key words: *logistic network, analysis, construction, mathematical modeling, process, algorithm.*

Вступ та постановка проблеми. За останнє десятиліття широкого поширення набули технології, а також обладнання, здатне кардинально змінити підхід до управління процесами переміщення товарів і вантажів. Це включає в себе можливість автоматизованого обміну інформацією про товари та вантажі між машинами, мобільними обчислювальними пристроями, системами відстеження, хмарними рішеннями, які координують у реальному часі діяльність усіх учасників ланцюжка поставок. Водночас ускладнилася структура відносин між учасниками цього сегменту економіки. Це викликано процеси консолідації в комерційні структури, що призводить до зростання складності модернізації таких бізнес-об'єктів, а також багаторазове збільшення витрат часу та коштів на матеріальні потоки товарів і вантажів, необхідні для підтримки конкурентоспроможного бізнесу. Для вирішення таких об'ємних задач необхідне використання науково обґрунтованих математичних моделей. Такий підхід дозволить використовувати цифровий відбиток процесів у логістичній мережі та розробити алгоритмічну основу для цілої лінійки програмних засобів задля кращого управління логістичною галуззю.

Дослідницьку прогалину можна виявити в тому, що динаміка дискретних і безперервних потоків матеріальних ресурсів ще не була математично описана у науковій площині. Це пов'язано з тим, що не було поширених і доступних технологій автоматизованого обміну інформацією, особливо в цифровому вигляді. Крім того, існуючий математичний апарат для опису таких процесів системам диференціальних рівнянь у частинних похідних був в основному затребуваний у задачах математичної фізики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Наукова площина розробок щодо математичного моделювання мережевих логістичних процесів є різнорідною та масштабною. Авторами формуються різні підходи присвячені дослідженням математичних алгоритмів та їх реалізації у зазначеній сфері.

В.І. Скіцько та Ю.В. Ігнатова [1] розкрили проблеми розв’язку багатоцільових оптимізаційних задач логістики у малому бізнесі. Сформульовали задачу, в якій з’ясовується вплив використання 3D-принтерів на кінцевий результат діяльності підприємств малого бізнесу. З метою мінімізації витрат часу на виробництво та підготовку продукції для доставки авторами розроблено відповідну математичну модель багатоцільової оптимізації логістичних процесів підприємства малого бізнесу. В статті [2] описана задача координації рішень на основі вже визначених стратегічних переваг учасників логістичного співтовариства та перерозподілених на випадок можливих збоїв функцій. Така координація дає можливість досягти оптимізації комерційної взаємодії військової частини та її партнерів за логістичним ланцюжком. В роботі за кожним етапом прописаний процес вирішення задачі координації управління в технологічному ланцюжку. Ефективне використання підходів для імітаційного моделювання логістичних процесів розглянув В. Р. Самостян розглянув у праці [3]. Представлена узагальнена структура імітаційної моделі функціонування логістичної системи. Для її реалізації запропоновано використання трирівневого комплексу моделей, що використовують різні парадигми імітаційного моделювання.

І. А. Топалова [4] надано авторське бачення сутності поняття логістичний ланцюг регіональних товарних ринків у вузькому та широкому розумінні; розроблено схему формування логістичних ланцюгів регіональних товарних ринків та визначено їх основні ознаки; розроблено класифікацію принципів формування логістичних ланцюгів регіональних товарних ринків за ознаками: базові вимоги до формування, функціональність, результативність, умови інтеграції, види надходження інформації, умови подальшого розвитку. На основі інтеграційного підходу запропоновано рівні планування ринкових логістичних ланцюгів, їх завдання, методи та очікуваний результат впровадження з позиції стратегічного, тактичного та оперативного рівнів.

Управління якістю логістичних бізнес-процесів автотранспортних підприємств розглянула А. Г. Овчаренко [5].

Із зарубіжних авторів варто відмітити роботи таких науковців як: Лян Хайцзюнь, Гу Цзін [6], Се Фен [7], Рохані Вала, Піраллі Джахан, Могхавемі Седіге, Геррейро Флавіо, Піньо Тьяго [8], Чжен Чанцзян, Чжан Чен, Ма Цзюньцзе, У Фей, Сунь Кай [9], Праджапаті Раджу, Пал Джаянтіка, Дубей Ом [10], Нагаре Суніл, Бхосале Сурендра, Келкар Шріяш [11], Пен Джин [12], Базан Ехаб, Джабер Мохамад, Заноні Сімоне [13], Саффарі Хамід, Аташгар Карім Мортеза [14], Мін Х. Ян Ц. [15] та інших.

Однак незважаючи на масштабність наукових досліджень питання актуальності дослідження механізмів математичного моделювання мережевих логістичних процесів не викликає сумнівів.

Постановка завдання. Метою роботи є дослідження механізмів математичного моделювання мережевих логістичних процесів.

Викладення основного матеріалу дослідження. Методи лінійного програмування або мережевого планування є добре відомими в умовах сьогодення. Їх використання виправдано в детермінованих задачах розподілу та планування. Сучасне ринкове середовище демонструє високий ступінь невизначеності, що змушує шукати нові шляхи вирішення проблеми ефективної організації логістики.

Значним проривом стали доступні технології міжмашинної взаємодії, мобільні високошвидкісні мережі передачі даних по всіх значущих маршрутах і необмежений доступ до геолокації. Ці та інші пристрої забезпечують потік даних, що містить повний набір інформації про характер товару, його переміщення, терміни придатності, умови утримання та іншу важливу інформацію. Щоб розробити алгоритми керування, потрібно формально представити, куди ці дані будуть входити у вигляді аргументів математичної моделі.

У цифровій концепції обмін даними відбувається не лише між тими, хто займається комерційною діяльністю, але й з урахуванням очікуваного завантаження терміналів на найближчому горизонті. Так само алгоритм серверу управління враховує трафік в реальному часі та можливості консолідованих транспортних пулів. При цьому обробка даних і прийняття управлінських рішень здійснюється на горизонті планування з використанням методів математичної оптимізації [16]. Сучасна логістична система включає дуже велику кількість учасників торговельної діяльності. Сюди входять виробники, постачальники, проміжні центри розподілу, клієнти та їхні власні склади. Найпоширенішим типом топології на сьогоднішній день є зірка. Це пов’язано з тим, що понад 80% торгівлі консолідовано в торгових мережах. Цей вид бізнесу має централізовану систему управління та розподілу товаро- і вантажопотоків. Слід зазначити, що кожна одиниця зіркоподібної топології в парадигмі логістичних мереж (парадигма розподілу) являє собою ланцюг із сотень або тисяч проміжних вузлів, партнерів логістичної мережі. Аналіз та обмін інформацією між усіма учасниками логістичної мережі здійснюється на основі цифрової логістичної сітки, побудованої на технології збору даних з датчиками та передачею в режимі реального часу за допомогою мобільного зв’язку з метою подальшого аналізу та цифрового обміну даними. Процес налаштування мережі цифрового ланцюга (DC) передбачає реагування на перебої шляхом адаптації конфігурації логістики ланцюга поставок за допомогою оптимізації з метою продовження роботи найкращим чином. Розроблена модель дозволяє аналізувати ринок і своєчасно реагувати на запити клієнтів в умовах динамічного розвитку логістичної мережі, а не статично, як у випадку з лінійною структурою традиційних ланцюгів поставок.

Символ $\mathfrak{I}$ вводиться для обмеженого компактного графа довільної топології (рис. 1).

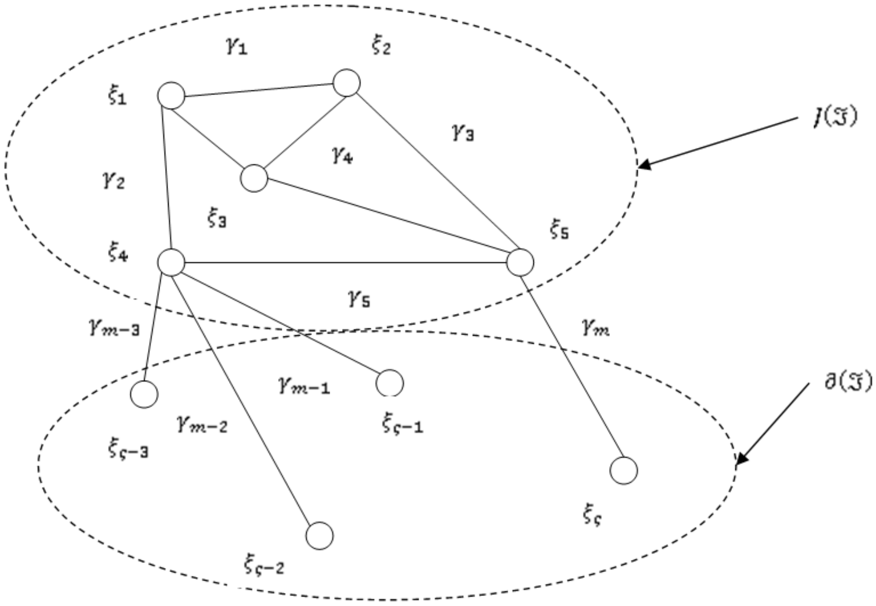

Рис. 1. **Граф довільної топології логістичної мережі**

Далі ребра цього графа позначаються як γ_k. Вузли графа позначаються символом ξ_ζ. Кількість граничних вузлів позначається як A [$\mathfrak{I}$]; ряд внутрішніх вузлів $J(\mathfrak{I})$. Кожен γ_k є орієнтованим ребром. Крім того, кожен γ_k параметризується сегментом. Зазначені властивості для параметризації та орієнтації залежать від топології мережі, яка формалізується за допомогою графа.

Першим прикладом є топологія зірки (рис. 2).

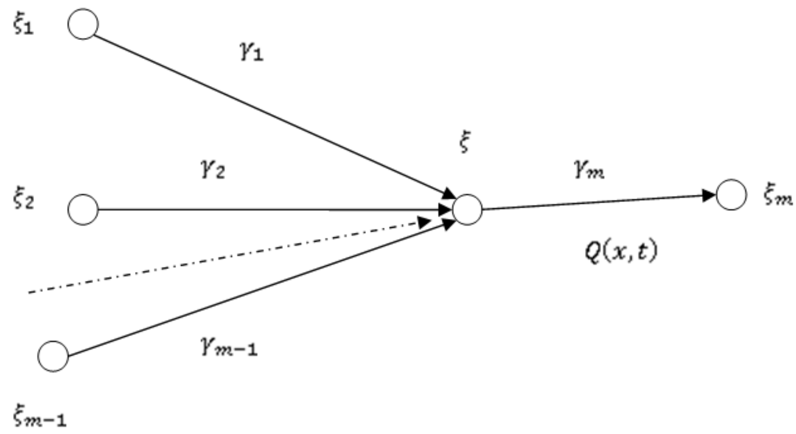

Рис. 2. **Граф Г топологічний, зірка**

Різноманіття Г позначається як геометричний граф Г, який відображає даний тип взаємодії мережі. Ребра позначаються як $\gamma_k(k=\overline{1,m})$, а центральний вузол як ξ; для кожного з країв $\gamma_k(k=\overline{1,m-1})$ здійснюється параметризація відрізком [0, π/2]. Далі γ_m параметризується сегментом [π/2, π]. Дано орієнтацію на $\gamma_k(k=\overline{1,m-1})$ – у бік ξ; на γ_m – від ξ; стан $x\in\gamma_k$ вводиться по порядку для кожного пункту *x* на γ_k та має відповідне числове значення *x*: $0\le x\le\pi/2$ або $\pi/2\le x\le\pi$ ($x=\pi/2\in\gamma_k$). Де *k* для усіх $(k=\overline{1,m})$ фіксується і це доводить, що *x* належить центру ξ.

Функція *f(x)* на графіку є скалярною величиною. $\mathfrak{I}$ відображається як $f:=\mathfrak{I}\to R$; символ $f(x)_\gamma$ позначає обмеження $f(x)$ до γ.

Символ C($\mathfrak{I}$) вводиться для набору функцій, неперервних на графіку $\mathfrak{I}$. Так само C[$\mathfrak{I}$] позначає набір кусково-неперервних функцій. Тут необхідно виконати умови: функції на ребрах графа неперервні, в ξ межі можуть змінюватися. $C^2[\mathfrak{I}]$ позначає набір двічі неперервно диференційованих функцій, що задовольняють умову належності похідних до другого порядку множині C[$\mathfrak{I}$]. Тут вони односторонньо диференціюються на кінцях країв.

Лінійне диференціальне рівняння на ребрі розглядається на кривій з довільним поєднанням початкової та граничної похідних функції у вузлі, де існують умови згоди. Група диференціальних рівнянь на ребрах γ_k графа $\mathfrak{I}$, наприклад:

$$\frac{d}{dx}\left(a(x)_{\gamma_k}\frac{d}{dx}u(x)_{\gamma_k}\right)+b(x)_{\gamma_k}u(x)_{\gamma_k}=f(x)_{\gamma_k} \quad (1)$$

з умовами передачі у внутрішніх вузлах графа з урахуванням орієнтації і параметризація на графу $\mathfrak{I}$:

$$\sum_\gamma a(\alpha)_\gamma\frac{d}{dx}u(\alpha)_\gamma=0 \quad (2)$$

є диференціальним рівнянням на графу. В цьому випадку $a(x)_{\gamma_k}, u(x)_{\gamma_k}, b(x)_{\gamma_k}$ це функції визначені для кожного γ_k в процесі. Враховуючи вищесказане, підсумовування проводиться по ребрах γ, прилеглих до α.

Умови (2) можуть бути задані іншими співвідношеннями. У граничних вузлах, що належать граничним ребрам $\tilde{\gamma}$ графа $\mathfrak{I}$, задані граничні умови, такі як

$$u|_{\partial\mathfrak{I}}=0 \quad (3)$$

або

$$\alpha(\beta)_{\tilde{\gamma}}\frac{d}{dx}u(\beta)_{\tilde{\gamma}}+hu(\beta)_{\tilde{\gamma}}=0 \quad (4)$$

Набір лінійних диференціальних рівнянь, наведений вище на ребрах (1) і граничні умови (3) або (4) в граничних вузлах, які доповнюються умовами узгодження у внутрішніх вузлах (2) в цілому, дозволяють сформулювати крайову задачу на графіку. В цьому випадку h,β – параметри визначені в процесі.

Крайові задачі в класі рівнянь із частинними похідними формулюють аналогічно задачам (1)–(4), додаючи до них початкові умови.

Математичні моделі можна використовувати для оптимізації процесів, що відбуваються в мережевих логістичних структурах. У комерційній діяльності беруть участь об’єкти, для формалізації яких залучаються диференціальні рівняння з частинними похідними. До них, перш за все, відносяться системи з розподіленими параметрами. Ці проблеми виникають у широкому діапазоні застосувань, зокрема, рух по мережах, логістика, розподіл.

Математичні моделі цих об'єктів дозволяють вирішувати важливі питання, що виникають при дослідженні динаміки процесу (основні задачі) і параметрів мережі (обернені задачі).

Розподіл обсягу товарів по сегменту торгової мережі по довжині L описується функцією $Q(x,t), x \in [0,L], t \in [0,\mathrm{T}]$ підкоряється рівнянню масопередачі:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}Q(x,t) - q(x)Q(x,t)$$

всюди в області $(0,L) \times (0,\mathrm{T})$, виключено набір змін параметрів передачі. Це напівдискретний набір $\left\{(x,t): x = k\frac{L}{m}, t \in (0,T)\right\}, k = \overline{1,m-1}$, де змінна x приймає дискретні значення, у яких за будь-яких $t \in (0,\mathrm{T})$ інтенсивність розподілу товарного обсягу $Q(x,t)$ залишається безперервним, тобто $Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}+0} = Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}-0}$, і потік товарного обсягу, який відображається в цю математичну модель величиною в одиницю часу $\frac{\partial}{\partial x}Q(x,t)$ (тут враховується вплив навантаження/розвантаження), зазнає стрибків з показником $a_k, k = \overline{1,m-1}$, тобто $\frac{\partial}{\partial t}Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}+0} - \frac{\partial}{\partial t}Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}-0} = a_k Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}}$. Таким чином, розподіл товарного обсягу по фрагменту комерційної мережі обумовлено властивістю збігу (сполучення) в певних точках (вузлах) торгової мережі:

$$Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}+0} = Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}-0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}+0} - \frac{\partial}{\partial t}Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}-0} = a_k Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}}$$

тут $k = \overline{1,m-1}$. Співвідношення (2) описують ситуацію, коли умови руху в певних точках (вузлах) впливають на швидкість потоку через ці точки з урахуванням явища стрибка потоків, пропорційного розподілу об’єму товару на вказаних точках.

Для математичного опису та побудови математичної моделі процесу передачі (дифузії) в комерційних мережах використовуються функції з просторовою змінною, що змінюється на графі. У цьому випадку розглянутий найпростіший граф є областю варіації просторової змінної x.

Для розглянутого графа вводиться символ Г. Його ребра також формалізуються як γ_k ($k = \overline{1,m}$). Індекси вузлів ξ_k($k = \overline{0,m}$). Орієнтація ребер γ_k приймається для кожного ξ_k. Краї параметризовані за допомогою $[(k-1)L/m, kL/m]$($k = \overline{1,m}$). Для внутрішніх вузлів, розглянутих у цій топології маси ξ_k(k=$\overline{1,m-1}$), ідентифікація kL/m(k=$\overline{1,m-1}$). Для врахування граничних вузлів мережі, що розглядається, присвоїмо кожному з них наступні номери: *{ξ_0, ξ_m −0, L}*. Маючи на меті описати процес потоку в розглянутій мережі та його розподіл: $Q(x,t), (x,t) \in \Gamma \times [0,\mathrm{T}]$ можна записати таке співвідношення:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(x,t)_{\gamma_k} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}Q(x,t)_{\gamma_k} - q(x)_{\gamma_k}Q(x,t)_{\gamma_k}$$

Далі, співвідношення для розглянутого γ_k ($k = \overline{1,m}$) з урахуванням введеної вище параметризації записуються у такому вигляді:

$$Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}\in\gamma_k} = Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}\in\gamma_k+1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}\in\gamma_k} - \frac{\partial}{\partial t}Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}\in\gamma_k+1} = a_k Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}\in\gamma_k+1}$$

Це, відповідно, виконується для всіх ξ_k($k = \overline{1,m-1}$). Для значень ($k = \overline{1,m-1}$) оскільки рівняння (3) і (5) виконуються, то після перетворень виходить:

$$Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}\in\gamma_k} = Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}\in\gamma_k+1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}\in\gamma_k} - \frac{\partial}{\partial t}Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}\in\gamma_k+1} = C_k\frac{\partial}{\partial t}Q(x,t)_{x=k\frac{L}{m}\in\gamma_k+1}$$

Таким чином, набір рівнянь (4) і (6) дозволяє математичне моделювання процесів перенесення. Потім топологія відповідної мережі формалізується графом Г.

Для строго математичного опису та розв’язку задачі необхідно задати початкові умови:

$$Q(x,t)_{t=0} = \varphi(x)$$

а також відповідні межі форми:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(x,t)_{x=0\in\gamma_1} - hQ(x,t)_{x=0\in\gamma_1} = \mu(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Q(x,t)_{L=0\in\gamma_m} + HQ(x,t)_{x=L\in\gamma_m} = v(t)$$

що повністю визначає крайову задачу разом із (4) і (6) на графі Г×[0,T].

В цьому випадку $q(x), \varphi(x), \mu(t), v(t)$ – це функції, визначені в процесі. У множині α фіксуються відповідні константи $k(k = \overline{1, m-1}), h, H$. Таким чином, в мережі моделюється граф Г у відповідній області значень $C(\Gamma) \cap C^2[\Gamma]$, сформульовано класичну теорію Штурма–Ліувілля, подвійна межа, визначена відношеннями (4)–(7) або символами (4), (5), (7) і (8) і позначає змінну як y:

$$-y''_{\gamma_k} + q(x)_{\gamma_k} y_{\gamma_k} = \lambda y_{\gamma_k} (k = \overline{1, m})$$

у множині $\gamma_k(k = \overline{1, m})$, тут проблема параметризована набором рівнянь:

$$y'(kL/2)_{\gamma_{k+1}} - y'(kL/2)_{\gamma_k} = y(kL/2)_{\gamma_k}$$

або

$$-y'(kL/2)_{\gamma_{k+1}} + y'(kL/2)_{\gamma_k} = \lambda y(kL/2)_{\gamma_k}$$

визначеними вузлами $\xi_k(k = \overline{1, m-1})$.

Для спектрального параметра λ відповідні граничні умови представлені у вигляді

$$y'(0)_{\gamma_1} - hy(0)_{\gamma_1} = 0$$

$$y'(L)_{\gamma_m} - Hy(L)_{\gamma_m} = 0$$

Системою диференціальних рівнянь на топології зірки Г буде множина співвідношень (8), (9) (або (8), (10)). Розв’язок крайової задачі (4)–(7) на Г× [0,T] методологічно можливий шляхом розкладання в ряд із використанням ортонормованої системи власних функцій $\{y_n(x)\}_{n\geq 0}$ які відображає теорія Штурма–Ліувілля (8), (9), (11) та (12) (або (8), (10)–(12)):

$$Q(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t) y_n(x), Q_n(t) = \int_{\Gamma} Q(x,t) y_n(x) dx$$

Функція $Q_n(t)$ диференціюється відповідно до змінної t. Далі, використовуючи співвідношення (8), (9) $Q_n(t)$, і, можливо, (8), (10) на розглянутій топології, відображеній Г, інтеграли залежать від $\frac{\partial}{\partial t} Q(x,t)$. У результаті це можна записати як

$$Q_n(t) = \sum_{k=1}^{m} \int_{(k-1)\frac{L}{m}}^{k\frac{L}{m}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} Q(x,t) - q(x) Q(x,t) \right) y_n(x) dx_{\gamma_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(x,t) y_n(x) - Q(x,t) y'_n(x) \right)_{(k-1)\frac{L}{m}_{\gamma_k}}^{k\frac{L}{m}}$$

$$- \lambda_n \sum_{k=1}^{m} \int_{(k-1)\frac{L}{m}}^{k\frac{L}{m}} Q(x,t)\, y_n(x) dx_{\gamma_k}$$

враховуючи це

$$\int_{\Gamma} p(x) dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k} p(x) dx$$

Застосовуючи Q(x,t), як початкове та граничне значення (7) та (8) відповідно та для $y_n(x)$ рівняння (8) і (9) як для власних функцій, поєднуючи з (11), (12) граничними умовами, необхідними для визначеності задачі (11) і (12), бажаний вираз для $Q_n(t)$ можна отримати, виконавши ($n \geq 0$):

$$Q_n(t) = -\lambda_n Q_n(t) + z_n(t)$$

де

$$z_n(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(L,t) y_n(L) - Q(L,t) y'_n(L)\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} Q(0,t) y_n(0) - Q(0,t) y'_n(0)\right)_{\gamma_k}$$
$$= v(t) y_n(L)_{\gamma_L} - \mu_k(t) y_n(0)_{y_1}$$

У такому розташуванні для (14) початкові умови досягаються розкладанням $\varphi(x)$ використовуючи набір власних функцій $\{y_n(x)\}_{n\geq 0}$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n y_n(x), \varphi_n = \int_{\Gamma} \varphi(x)\, y_n(x) dx$$

Рішення $Q_n(t)$ випливає з рівняння (14) з урахуванням початкових умов:

$$Q_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau) z_n(\tau)}\, dx$$

Рішення $Q(x,t)$ крайової задачі (4)–(7) на Г× [0,T] має вигляд:

$$Q(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n t}\, y_n(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n (t-\tau) z_n(\tau)}\, d\tau y_n(x)$$

Важливим ефектом такого підходу до вирішення задачі моделювання потоків у мережі, представленій у вигляді графа, є можливість застосування результату $Q(x,t)$ як послідовності для пошуку рішення задач модального керування. Це актуально для практичних випадків керування зміною власних значень крайової задачі або режиму досягнення поставлених цілей.

Висновки. У роботі досліджено механізми математичного моделювання мережевих логістичних процесів. Наведено задачу створення алгоритмічних основ ядра цифрової логістичної платформи. Інформаційний потік дає дані про місцезнаходження транспорту, маршрут прямування, характер вантажу, включаючи термін придатності, умови зберігання та транспортування. Математична теорія графів дозволяє формалізувати множину можливих маршрутів, пунктів перевалки, складів проміжного зберігання та розподільних центрів. Зазначена інформація складає аргументи математичної моделі, за вдяки чому стає можливим розрахувати матеріальні потоки товарів і вантажів. Як наслідок, з'являється інструмент для прогнозування всього логістичного процесу і вирішення основної проблеми пошуку найбільш економічно вигідних варіантів організації логістики.

Перспективами подальших досліджень є розробка програмного додатку та впровадження його на хмарних серверах, що дозволить онлайн взаємодіяти з експедиторами та транспортом безпосередньо в процесі переміщення, незалежно від їх місцезнаходження.

Література

1. Скіцько В.І., Ігнатова Ю.В. Моделювання багатоцільових оптимізаційних задач логістики у малому бізнесі / Науковий вісник Ужгородського університету 2016. С. 233-240.

2. Сидоренко І. І. Математичне моделювання логістичних процесів військових частин національної гвардії України в рамках ланцюжків постачання. *Ефективна економіка*. 2021. № 12. – URL: http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=9741 (дата звернення: 06.12.2023). DOI: 10.32702/2307-2105-2021.12.90

3. Самостян В. Р. Ефективне використання підходів для імітаційного моделювання логістичних процесів / В. Р. Самостян // Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті. 2020. № 2. С. 127-134. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ctmbt_2020_2_17.

4. Топалова І. А. Логістичні ланцюги регіональних товарних ринків: проблеми та шляхи формування і планування / Вісник Хмельницького національного університету 2019. № 3. С. 186-193.

5. Овчаренко А.Г. Управління якістю логістичних бізнес-процесів автотранспортних підприємств. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису. Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 073 – Менеджмент, (галузь знань 07 – Управління та адміністрування). – Харківський національний автомобільно-дорожній університет Міністерства освіти і науки України; Харківський національний автомобільно-дорожній університет Міністерства освіти і науки України, Харків, 2023. 232 с.

6. Liang Haijun, Gu Jing. (2022). Construction of Mathematical Model of Logistics Delivering Based on Intelligent Mobilization. Journal of Function Spaces. 2022. 1-11. 10.1155/2022/7386227.

7. Xie Feng. (2023). Analysis of vehicle paths for sharing e-commerce logistics resources in China. Applied Mathematics and Nonlinear Sciences. 10.2478/amns.2023.2.00352.

8. Rohani Vala, Peerally Jahan, Moghavvemi Sedigheh, Guerreiro Flavio, Pinho Tiago. (2021). Illustrating scholar–practitioner collaboration for data-driven decision-making in the optimization of logistics facility location and implications for increasing the adoption of AR and VR practices. The TQM Journal. ahead-of-print. 10.1108/TQM-06-2021-0194.

9. Zheng Changjiang, Zhang Chen, Ma Junze, Wu Fei, Sun Kai. (2022). Location Selection of Metro-Based Distribution Nodes for Underground Logistics System with Bi-Level Programming Model. Symmetry. 14. 2411. 10.3390/sym14112411.

10. Prajapati Raju, Pal Jayantika, Dubey Om. (2022). Transportation problem with restriction on arcs and their Solution by mathematical modeling. International Journal of Students' Research in Technology & Management. 10. 67-75. 10.18510/ijsrtm.2022.1015.

11. Nagare Sunil, Bhosale Surendra, Kelkar Shreeyash. (2023). in Data Analysis and Learning Based Approach for Logistics Optimization DATA ANALYSIS AND LEARNING BASED APPROACH FOR LOGISTICS OPTIMIZATION 1. 11. 2349-204.

12. Peng Jin. (2019). Mathematical Models for Logistics Network Optimization with Uncertain Data. ITCC 2019: Proceedings of the 2019 International Conference on Information Technology and Computer Communications. 93-100. 10.1145/3355402.3355403.

13. Bazan Ehab, Jaber Mohamad, Zanoni Simone. (2015). A review of mathematical inventory models for reverse logistics and the future of its modeling: An environmental perspective. Applied Mathematical Modelling. 10.1016/j.apm.2015.11.027.

14. Saffari Hamid, Atashgar Karim, Abbasi Morteza. (2021). Robust Optimization model for forward/revers logistics network Using Design of Experiment.

15. Min H., Yang Q. (2018). Study on modeling and simulation of production logistics system based on flexsim. Academic Journal of Manufacturing Engineering. 16. 149-156.

16. Ivashko Larysa. (2023). OPTIMIZATION OF LOGISTICS PROCESS MANAGEMENT IN TRADE. Market economy: modern management theory and practice. 21. 360-384. 10.18524/2413-9998.2022.3(52).275817.