

А.В. Кузьмов^{1,2}¹Інститут проблем матеріалознавства ім. І.М. Францевича НАН України²Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**ТЕОРЕТИЧНІ ЗАСАДИ МІКРОМЕХАНІЧНОГО ОСЕРЕДНЕННЯ ЛІНІЙНО-В'ЯЗКОЇ ТЕЧІЇ ПОРИСТОГО МАТЕРІАЛУ З КАПІЛЯРНИМИ НАПРУЖЕННЯМИ НА ПОВЕРХНІ ПОР**

Базуючись на теоретичних засадах механіки мікронеоднорідних матеріалів було проаналізовано загальну структуру визначальних реологічних співвідношень для течії пористого матеріалу з лінійно-в'язким каркасом за наявності на поверхні пор капілярних напружень. Визначальні співвідношення, що описують ефективну течію такого матеріалу можуть бути отримані з ефективних визначальних співвідношень для «звичайного» пористого матеріалу з вільною поверхнею пор додаванням додаткового тензорного поля напружень викликаного наявністю капілярних сил на поверхні пор. Одержані в роботі загальні результати, безвідносно до конкретної структури пористого матеріалу, корисні перш за все для прямого комп'ютерного моделювання структури порового простору в ході спікання, без використання аналітичних моделей.

Ключові слова: спікання, пористий матеріал, реологічна теорія спікання, мікромеханіка, представницький осередок, мультимасштабне моделювання.

A. Kuzmov**THEORETICAL PRINCIPLES OF MICROMECHANICAL AVERAGING OF LINEAR VISCOUS FLOW OF A POROUS MATERIAL WITH CAPILLARY STRESSES ON THE PORE SURFACE**

Based on the fundamentals of composite mechanics, the general structure of the constitutive relationship for the flow of a porous material with a linear-viscous matrix in the presence of capillary stresses on the surface of the pores was analyzed. Such rheological models are used in modeling the sintering process in powder metallurgy and ceramic. The constitutive relationship describing the effective flow of such a material can be obtained from the constitutive relationship for a "usual" porous material with a free pore surface by adding an additional tensor stress field caused by the presence of capillary forces on the pore surface. The general results obtained in the work, regardless of the specific structure of the porous material, are useful first of all for direct computer simulation of the structure of the pore space during sintering, without the use of analytical models. These results were used in the author's previous works on multiscale modeling of the sintering process.

Keywords: sintering, porous material, rheological theory of sintering, micromechanics, unit cell, multiscale modeling.

1. Вступ

Процес спікання пористих тіл, тобто явище їх консолідації та усадки під дією надлишкової вільної поверхневої енергії [1], використовується в багатьох технологіях та галузях виробництва. Але ключового значення цей процес набув у технологіях порошкової металургії та керамічного виробництва, де однією з технологічних операцій є спікання попередньо сформованих з порошкової суміші напівфабрикатів. Крім порошкової металургії спікання також відіграє важливу роль в процесі виробництва оптоволоконних кабелів [2]. При вивченні процесу спікання крім його фізичних засад на мікрорівні, які можуть бути вельми різноманітними [3] важливу роль відіграє також прогнозування неоднорідності процесу спікання в різних точках тіла, що спікається. Таке прогнозування стало можливим завдяки створенню моделей процесу спікання в термінах в'язкої течії ефективного пористого матеріалу. Одна з перших таких моделей була запропонована В.В. Скороходом [1] та дістала назву реологічна теорія спікання. Аналогічні моделі спікання мікронеоднорідного пористого матеріалу були запропоновані також низкою інших авторів. Досить детальний огляд таких моделей подано в роботі [4].

Крім прогнозування кінетики усадки такі моделі дають можливість прогнозувати спотворення форми порошкової заготовки в процесі неоднорідної усадки при спіканні та відповідно запобігати небажаному відхиленню форми виробу від початково запланованої. Зокрема, якщо немає змоги або економічно недоцільно застосовувати схему формування порошкової заготовки з більш рівномірним розподілом густини, можна піти шляхом варіювання геометрії формовки з врахуванням результатів скінченно-елементного моделювання процесу неоднорідної усадки при спіканні [5]. Зокрема в роботі [6] на основі скінченно-елементного моделювання пресування і спікання пропонується та випробовується модифікована криволінійна форма пуансона для

пресування в закритій прес-формі заготовок з порошку оксиду алюмінію з метою компенсації спотворення форми виробу в ході неоднорідної усадки при спіканні. Опосередковано про актуальність реологічних моделей спікання свідчить їх імплементація в комерційні пакети скінчено-елементного моделювання. Зокрема останні версії пакету SFTC Deform містять різні варіанти «потенціалу спікання».

Такі реологічні моделі базуються на тому, що оскільки лінійний розмір пор зазвичай принаймні на декілька порядків менший розміру тіла, що спікається, можна розглядати спікання пористого тіла як процес деформування деякого мікронеоднорідного ефективного континууму. Опису поведінки таких мікронеоднорідних матеріалів присвячена галузь мікромеханіки або механіки композиційних матеріалів. Пористі матеріали з в'язкою твердою фазою можна розглядати як частинний випадок мікронеоднорідних матеріалів, де пори або пустота є однією з фаз композиту з нульовими параметрами жорсткості або в'язкості. Проте наявність розподілених капілярних напружень на поверхні пор дещо модифікує процедуру мікромеханічного осереднення та сам вигляд визначальних реологічних співвідношень для ефективного пористого матеріалу. Також з розвитком засобів комп'ютерного моделювання зменшується актуальність побудови аналітичних моделей за суттєвих спрощуючи припущень, та з'являється можливість чисельного моделювання більш складних процесів з більш точним врахуванням реальної структури пористого матеріалу. Зокрема автором здійснювалось мультимасштабне моделювання процесу спікання [7,8]. Проте для такого моделювання важливо мати чіткі уявлення про загальний характер математичного опису процесу спікання, безвідносно до конкретної структури матеріалу. Серед низки фізичних процесів внаслідок яких може відбуватися спікання пористого тіла [3] (в'язка течія під дією капілярних сил, об'ємна дифузія вакансій, зерногранична та поверхнева дифузія, перенос через газову фазу) найбільш прийнятним для аналізу методами механіки композитів є в'язка течія каркасу пористого тіла під дією капілярних сил. Тому **метою** даної роботи є саме послідовний розгляд процедури мікромеханічного осереднення реології в'язкої течії пористого матеріалу за наявності на поверхні пор капілярних сил. Така реологія описуватиме як вільне спікання однорідного матеріалу за відсутності макроскопічних напружень, так і випадок наявності макроскопічних напружень в тілі, що спікається. Такі напруження можуть бути викликані як неоднорідністю пористої структури матеріалу, так і іншими чинниками: прилипанням до деякої поверхні, гравітаційними силами, тиском інструменту тощо.

2. Загальні відомості з механіки мікронеоднорідних матеріалів.

Фундаментальним принципом мікромеханіки є принцип еквівалентної гомогенності, який полягає в тому, що у випадку досить великого тіла порівняно з розміром неоднорідності, в більшості випадків можна виділити такий розмір, який набагато менший за розмір тіла, але більший за масштаб неоднорідності, що границі областей такого розміру внаслідок деформування тіла рухаються близько до лінійного перетворення [9]. Причому для подальшого осереднення важлива саме симетрична частина лінійного перетворення, бо саме вона описує деформування, а несиметрична частина - поворот області як твердого тіла [10]. Або, іншими словами, поле швидкостей V_i на границі області розміру L залежить від координат майже лінійно

$$V_i = \sum_{j=1}^3 E_{ij} x_j + o(L) \approx \sum_{j=1}^3 E_{ij} x_j ;$$
 При цьому компоненти симетричної матриці E_{ij} мають зміст ефективних осереднених за об'ємом швидкостей деформацій. Тому при мікромеханічному осередненні прийнято розглядати рух матеріалу в певній області масштабу довжини осереднення, яка називається представницькою коміркою (або представницьким осередком) з граничними умовами

$$V_i = \sum_{j=1}^3 E_{ij} x_j ; \quad (1)$$

що залежать від ефективних швидкостей деформацій E_{ij} . Таким чином, внаслідок розв'язку рівнянь руху на представницькому осередку здійснюється відповідність між ефективними макроскопічними деформаціями E_{ij} та полем швидкостей на мезорівні, яке внаслідок граничних умов (1) параметрично залежить від макроскопічних деформацій. Варто зауважити, що принцип еквівалентної гомогенності у відповідній літературі досить строго обґрунтовується. Зокрема в [11]

розв'язок задачі для тіла з періодичною геометрією розкладається в ряд по малому параметру відношення розміру неоднорідності до всього розміру тіла, й оцінюється збіжність такої процедури.

Зауважимо, що внаслідок того що середнє значення за об'ємом компонент тензора швидкостей деформацій $\langle e_{ij} \rangle$ для представницького осередку Ω об'єму U повністю визначається полем

швидкостей на границі області S за формулою $\langle e_{ij} \rangle = \frac{1}{2U} \int_S (V_i n_j + V_j n_i) dS$ (де n_i вектор нормалі до поверхні S) [12], середні значення компонент тензора швидкостей деформацій для розв'язку

вищеописаної задачі руху в точності дорівнюватимуть E_{ij} . Тому ефективні або макроскопічні швидкості деформацій є також середніми за об'ємом. Щодо макроскопічних напружень то вони визначаються формулою [12]

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{U} \int_S p_i x_j dS = \frac{1}{U} \int_S p_j x_i dS = \frac{1}{2U} \int_S (p_i x_j + p_j x_i) dS \quad (2)$$

де p_i зусилля на границі представницького осередку, що відповідають розв'язку рівнянь руху з граничними умовами (1), а x_j координати в об'ємі представницького осередку. А оскільки p_i параметрично залежать від E_{ij} то таким чином за допомогою формули (2) отримуємо залежність ефективних напружень Σ_{ij} від ефективних швидкостей деформацій E_{ij} , тобто реологію ефективного мікронеоднорідного матеріалу. Зауважимо, що за відсутності розподілених зусиль на поверхні пор компоненти макроскопічного тензора напружень будуть середніми за об'ємом комірки значеннями компонент напружень. У випадку ж наявності поверхневих зусиль на поверхні пори, макроскопічні напруження відображатимуть як середні напруження в матеріалі, так і поверхневі зусилля на поверхні пор. Саме цим і відрізняється реологія спікання від звичайної реології в'язкої течії пористих матеріалів. Характер цієї відмінності у випадку лінійно-в'язкої реології твердої фази, в подальшому розкривається в цій роботі.

3. Реологія в'язкої течії пористого матеріалу за наявності на поверхні пор капілярних сил.

Нехай реологія твердої фази описується деякими лінійно в'язкими визначальними співвідношеннями $\sigma_{ij} = \sum_{k,n=1}^3 C_{ijkn} e_{kn}$. Тоді, відповідно до описаної в попередньому пункті процедури

мікромеханічного осереднення поле швидкостей на мезорівні повинно задовольняти рівняння руху $\sum_{j=1}^3 \partial/\partial x_j \left(\sum_{k,n=1}^3 C_{ijkn} (\partial V_k/\partial x_n + \partial V_n/\partial x_k) \right)$; $i = 1, 2, 3$; та граничні умови в швидкостях (1) на

границі осередку, разом з умовою наявності капілярних лапласівських напружень на поверхні пор $p_i = p_c n_i$; $p_c = \sigma(1/R_1 + 1/R_2)$ де σ - поверхневий натяг, R_1, R_2 - головні радіуси кривини поверхні пори. p_c - капілярне лапласівське напруження. Оскільки у цьому випадку рівняння руху є лінійними та однорідними відносно поля швидкостей то сума (втім як і довільна лінійна комбінація) будь-яких розв'язків цього рівняння знов задовольнятиме рівняння руху. При цьому швидкості та зусилля на границі також сумуються. Тому для подальшого аналізу зручно подати розв'язок V_i задачі мікромеханічного осереднення на комірці як суму розв'язків $V_i = V_i^0 + V_i^1$ двох задач руху на комірці, рис. 1.

Розв'язок V_i^1 задовольняє мікромеханічні граничні умови (1) на комірці, але із вільною від зусиль поверхнею пор $p_i = 0$. Інший розв'язок V_i^0 відповідає жорстко закріпленій $V_i = 0$ границі комірки за наявності на поверхні пор капілярних напружень $p_i = p_c n_i$.

Зауважимо, що розв'язок V_i^1 відповідає розв'язку задачі про ефективні в'язкі властивості пористого матеріалу.

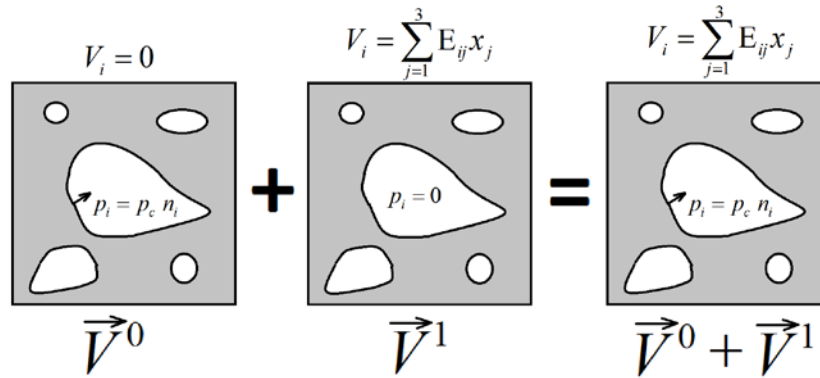


Рис. 1 – Розклад розв’язку задачі на представницькому осередку

В випадку лінійної в’язкості твердої фази ефективні властивості пористого мікронеоднорідного матеріалу також будуть лінійно-в’язкими й будуть задаватись ефективними модулями в’язкості \tilde{C}_{ijkn} . Знаходження цих ефективних модулів в’язкості аналогічно до ефективних модулів пружності, які описуються в численній літературі з механіки композитів [9]. В свою чергу, інший розв’язок V_i^0 описує поле швидкостей на мезорівні при нульових компонентах макроскопічного тензору швидкостей деформацій та відповідно не залежить від макроскопічних швидкостей деформацій E_{ij} . Розв’язок V_i^0 відповідає процесу «сфероїдизації» пор в матеріалі при гіпотетичному повністю закріпленому спіканні, та відповідно відсутній (тобто є нульовим) у випадку наявності в матеріалі виключно сферичних пор однакового розміру. Макроскопічний тензор напружень Σ_{ij} за означенням $\Sigma_{ij} = \frac{1}{U} \int_S p_i x_j dS$. Оскільки реологія твердої фази лінійна, то

$p_i = p_i^0 + p_i^1$, де p_i^0 і p_i^1 зусилля на границі комірки, що відповідають V_i^0 та V_i^1 відповідно. Тому

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{U} \int_S p_i^0 x_j dS + \frac{1}{U} \int_S p_i^1 x_j dS = P_{Lij} + \Sigma_{ij}^1 = P_{Lij} + \sum_{k,n=1}^3 \tilde{C}_{ijkn} E_{kn} \quad (3)$$

де $\Sigma_{ij}^1 = \frac{1}{U} \int_S p_i^1 x_j dS = \sum_{k,n=1}^3 \tilde{C}_{ijkn} E_{kn}$ ефективний макроскопічний тензор напружень для

«звичайного» пористого композиту з вільною поверхнею пор, що відповідає макроскопічним швидкостям деформацій E_{ij} . А складова $P_{Lij} = \frac{1}{U} \int_S p_i^0 x_j dS$ відображає внесок в реологію

капілярних лапласівських сил на поверхні пор, і тому її прийнято називати ефективними лапласівськими напруженнями. Спочатку макроскопічна реологічна модель спікання була запропонована для ізотропного випадку в якому модулі в’язкості \tilde{C}_{ijkn} описуються двома модулями об’ємної ζ та зсувної η в’язкості, а P_{Lij} є шаровим тензором, $P_{Lij} = P_L \delta_{ij}$ (де δ_{ij} - символ Кронекера), що відповідає всебічним гідростатичним напруженням, і тому P_L було названо ефективним лапласівським тиском. В цьому ізотропному випадку співвідношення (3) набудуть вигляду [4]

$$\Sigma_{ij} = P_L \delta_{ij} + \zeta E \delta_{ij} + 2\eta (E_{ij} - 1/3 E \delta_{ij}); \quad E = \sum_{k=1}^3 E_{kk} \quad (4)$$

Зауважимо також, що відповідно до формальної в’язко-пружної аналогії [1], між полем переміщень в теорії пружності (геометрично-лінійній, яка використовує тензор малих деформацій Коші) та полем швидкостей в’язкої течії (за наявності дисипативного потенціалу), можна використати зокрема теорему Бетті-Максвела [13] про взаємність робіт. У випадку в’язкої течії це означає, що для будь-яких двох зрівноважених напружено-деформованих станів, потужність вдовж границі області зусиль одного напружено-деформованого стану на швидкостях іншого рівні між собою. Ця теорема справедлива лише для лінійної реології. Розглянемо поле швидкості V_k^1 для

випадку коли макроскопічний тензор швидкостей деформацій в граничних умовах (1) має єдину ненульову одиничну компоненту $E_{ij} = 1$; i, j - фіксовані, та позначимо це поле швидкостей V_k^{ij} . Тоді граничні умови (1) для V_k^{ij} набудуть вигляду $V_k^{ij} = \delta_{ik} x_j$. Зауважимо, що V_k^{ij} також буде похідною по E_{ij} параметричної залежності V_k від E_{ij} тобто $V_k^{ij} = \partial V_k / \partial E_{ij}$. Така інтерпретація може стати в нагоді для нелінійно-в'язкого випадку. Застосуємо принцип взаємності робіт до полів швидкостей V_k^{ij} та V_k^0 . При цьому потужність зусиль викликаних V_k^{ij} на швидкостях V_k^0 вздовж всієї границі матеріалу твердої фази комірки, тобто як вздовж поверхні пор так і на границі комірки, дорівнює нулю, оскільки на границі комірки V_k^0 дорівнює нулю, а на поверхні пор зусилля, породжені полем швидкостей V_k^{ij} теж нульові. Але це, відповідно до теореми про взаємність робіт, означає що також сумарна потужність \hat{W} вздовж повної границі матеріалу твердої фази комірки швидкостей V_k^{ij} на зусиллях викликаних швидкостями V_k^0 теж нульова. Ця повна потужність з врахуванням того, що на границі представницького осередку $\sum_{k=1}^3 V_k^{ij} p_k^0 = \sum_{k=1}^3 \delta_{ik} x_j p_k^0 = p_i^0 x_j$ набуде

вигляду $\hat{W} = \int_{S_0} \sum_{k=1}^3 V_k^{ij} p_c n_k dS + \int_S p_i^0 x_j dS = 0$; де S_0 - поверхня пори. Що в свою чергу дає змогу виразити ефективні лапласівські напруження формулою

$$P_{Lij} = \frac{1}{U} \int_S p_i^0 x_j dS = -\frac{1}{U} \int_{S_0} \sum_{k=1}^3 V_k^{ij} p_c n_k dS \quad (5)$$

тільки через величину капілярних зусиль на поверхні пори та поле швидкостей V_k^1 , без необхідності обчислювати поле швидкостей V_k^0 . Таке означення дещо зручніше і, зокрема, використовувалось автором при мультимасштабному моделюванні спікання [7,8].

4. Питомі дисипація енергії при в'язкій течії пористого матеріалу за наявності на поверхні пор капілярних сил.

Тепер розглянемо осереднення дисипації енергії пористого ефективного матеріалу при спіканні. Питомі дисипація енергії ефективного пористого матеріалу D зумовлена дисипацією енергії внаслідок в'язкої течії в матеріалі каркасу пористого тіла. Тому вона пов'язана з середньою дисипацією енергії в твердій фазі $D_{me,\phi} = D/(1-\theta)$, де θ пористість або об'ємна частка пор в матеріалі. Величина $D_{me,\phi}$ є важливою інтегральною характеристикою стану матеріалу [1, 14].

Зауважимо, що з термодинамічних міркувань у випадку лінійної в'язкості для реології твердої фази завжди існує дисипативний потенціал $\hat{U}(e_{ij}) = 1/2 \sum_{i,j,k,l=1}^3 C_{i,j,k,l} e_{ij} e_{kl}$ такий, що $\sigma_{ij} = \partial \hat{U} / \partial e_{ij}$; , який

є половиною від питомої дисипації $D(e_{ij}) = \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} e_{ij} = 2\hat{U}$. Зауважимо, що питома дисипація як

функція швидкостей є додатно визначеним квадратичним функціоналом, або що теж саме білінійним симетричним функціоналом з однаковим значенням аргументу $D(V_i) = F(V_i, V_i)$;

$F(V_i^1, V_i^2) = F(V_i^2, V_i^1) = 1/4 \sum_{i,j,k,l=1}^3 C_{i,j,k,l} (\partial V_i^1 / \partial x_j + \partial V_j^1 / \partial x_i) (\partial V_k^2 / \partial x_l + \partial V_l^2 / \partial x_k)$; Тому питому

дисипацію від суми полів V_k^0 та V_k^1 можна подати у вигляді $D(V_k^0 + V_k^1) = F(V_k^0 + V_k^1, V_k^0 + V_k^1) = D(V_k^0) + D(V_k^1) + 2F(V_k^0, V_k^1)$. Ефективна ж питома дисипація пористого матеріалу буде середнім за об'ємом представницького осередку від питомої дисипації в

твердій фазі $D_{macro} = \frac{1}{U} \int_{\Omega_1} D(V_k^0 + V_k^1) d\Omega$, де Ω_1 область яку займає тверда фаза в

представницькому осередку. Але виявляється, що інтеграл за об'ємом від змішаної складової $2F(V_k^0, V_k^1)$ буде нульовим. Оскільки змішану складову можна подати як потужність напружень зумовлених полем швидкостей V_k^1 на швидкостях деформації зумовлених полем швидкостей V_k^0 , а також внаслідок того, що поле напружень врівноважене, тому ця змішана складова буде дорівнювати потужності зусиль викликаних V_k^1 на швидкостях V_k^0 вздовж всієї границі матеріалу. Але як вказувалось в попередньому пункті ця потужність буде нульовою.

Тобто у випадку лінійно-в'язкої поведінки твердої фази питома дисипація течії ефективного пористого матеріалу з капілярними напруженнями на поверхні пор є сумою питомої дисипації «звичайного» ефективного пористого матеріалу з вільною поверхнею пор D_{macro}^1 та питомої дисипації у випадку повністю закріпленого спікання D_{macro}^0 .

$$D_{macro} = D_{macro}^0 + D_{macro}^1; \quad D_{macro}^0 = \frac{1}{U} \int_{\Omega_1} D(V_k^0) d\Omega; \quad D_{macro}^1 = \frac{1}{U} \int_{\Omega_1} D(V_k^1) d\Omega \quad (6)$$

Причому одна складова D_{macro}^1 є квадратичною функцією макроскопічних швидкостей деформацій E_{ij} та не залежить від величини капілярних напружень. В свою чергу інша складова D_{macro}^0 не залежить від макроскопічних швидкостей деформацій E_{ij} . Зауважимо, що у випадку сферичних пор однакового розміру складова швидкості V_k^0 відсутня, та відповідно складова D_{macro}^0 обнуляється і питома дисипація енергії повністю визначатиметься макроскопічною течією ефективного пористого матеріалу.

Висновки

Як видно з вищенаведених викладок у випадку лінійно-в'язкої поведінки твердої фази визначальні співвідношення, що описують ефективну течію пористого матеріалу з врахуванням процесу спікання можуть бути отримані з ефективних визначальних співвідношень для «звичайного» пористого матеріалу з вільною поверхнею пор додаванням додаткового поля напружень викликаного наявністю капілярних сил на поверхні пор. Це додаткове поле напружень дістало назву ефективних лапласівських напружень, або в ізотропному випадку ефективного лапласівського тиску. Була виведена зручна для обчислювального моделювання формула (5) для знаходження ефективних лапласівських напружень шляхом інтегрування по поверхні пор. Виявилось що ефективна питома дисипація енергії є сумою ефективної питомої дисипації для в'язкої течії «звичайного» пористого матеріалу з вільною поверхнею пор та питомої дисипації у випадку гіпотетичного повністю закріпленого спікання.

Список використаних джерел.

1. Скороход В.В. Реологические основы теории спекания, К., Наукова думка, 1972, -149с.
2. G.W Sherer, Sintering of inhomogeneous glasses: Application to optical waveguides, J. Non-Cryst. Solids 34 (1979) 239
3. Гегузин Я.Е. Физика спекания.-М.: Наука, 1984.-312с
4. Olevsky, Eugene A.. "Theory of sintering: from discrete to continuum." Materials Science & Engineering R-reports 23 (1998): pp. 41-100
5. Maximenko A.L. Prediction of initial shape of functionally graded ceramic pre-forms for near-net-shape sintering /A.L.Maximenko,E.Olevsky, O.Van Der Biest// Science of Sintering.-2003.- 35[1].- С.6-12.
6. Torsten Kraft, Hermann Riedel and Ottmar Rosenfelder Compaction and Sintering of a Ceramic Seal: Modeling and Experimental Response Int.J. Powder Metall. 39 (6) (2003) 27-34
7. Kuzmov, A., Olevsky, E., & Maximenko, A. (2008). Multi-scale modeling of viscous sintering. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 16(3), 035002. DOI 10.1088/0965-0393/16/3/035002
8. Andrey Maximenko, Andrey Kuzmov, Evgeny Grigoryev, Eugene Olevsky . Direct Multi-Scale Modeling of Sintering. Journal of the American Ceramic Society. (2012), Volume 95, Issue 8. DOI 10.1111/j.1551-2916.2012.05083.x.

-
9. R. M. Christensen *Mechanics of composite materials*, , Wiley-Interscience, New York, 1979, 348 pp.
 10. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред -М.: Мир, 1974. - 319 с.
 11. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Homogenisation: Averaging processes in periodic media*. Kluwer Academic Publishers, 1989. 366 pp.
 12. Б. Победря, *Механика композиционных материалов*, Москва: Изд-во Моск. ун-та., 1984.
 13. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. *Елементи теорії пружності*. — Львів: Світ, 1994. — 559 с.
 14. Штерн М.Б. *Феноменологические теории прессования порошков* / М.Б. Штерн, Г.Г. Сердюк, Л.А. Максименко и др. — Киев: Наук. думка, 1982. — 140 с.