УДК 517.5 DOI 0.36910/775.24153966.2023.76.4

Ю. О. Григор'єв

Одеський національний морський університет

ЕКСТРЕМАЛЬНА ЗАДАЧА У ЗГОРТКАХ З ДВОМА ЯДРАМИ

Розглянуто ситуацію, коли інтегральне рівняння з двома ядрами у згортках не має розв'язків. Тоді нетривіальною стає задача побудована у згортках з двома ядрами сформована на базі інтегрального рівняння та обмежена мінімальною функціональною залежністю. Де ядерні функції належать певному класу, є задана функція і шукана функція, які належать до підкласу, вагова функція обмежена зверху і знизу додатними сталими.

У даній роботі запропоновано наступну методику розв'язання цієї екстремальної задачі. Використовуючи умови розв'язності інтегрального рівняння та позначивши вираз під модулем через сталу, прийдемо до задачі мінімізації квадратичного функціоналу з шуканою функцією і лінійними функціоналами у додаткових умовах.

В роботі доведено, що отримана екстремальна задача має єдиний розв'язок та знайдено цей розв'язок. Таким чином, у роботі показано перехід до розв'язного рівняння з двома ядрами.

В образах Фур'є дане рівняння зведено до задачі Рімана на осі абсцис теорії аналітичних функцій і розв'язано в квадратурах. Розв'язок єдиний.

В роботі наведено алгоритм розв'язання поставленої екстремальної задачі та приклад. У сучасній теорії функцій з комплексною змінною однією з найважливіших областей досліджень є теорія крайових (граничних) задач у класах аналітичних функцій та їх різних узагальнень.

Оператори типу згортки часто зустрічаються при вивченні лінійних систем. Якщо на вхід такої системи подаються певні сигнали, то сигнал на виході представляється у вигляді згортки двох функцій. При цьому одна з функція називається імпульсною функцією відгуку, а її образ Фур'є – передаточною функцією системи. Значить, поставлену задачу можна трактувати так: імпульсну функцію відгуку потрібно підібрати так, щоб сигнал на виході системи якомога менше відрізнявся б від попередньо заданої функції.

Результати, отримані в ході виконання представленої роботи, можуть бути використані для розробки наближених чисельно-аналітичних розв'язків задачі.

Ключові слова: *інтегральні рівняння, рівняння типу згортки, рівняння з двома ядрами, екстремальна задача, задача Рімана теорії аналітичних функцій.*

Yu.A. Hryhoriev

AN EXTREME PROBLEM IN CONVOLUTIONS WITH TWO KERNELS

We considered the situation when the integral equation with two kernels in convolutions has no solutions. Then a problem constructed in convolutions with two kernels, formed on the basis of an integral equation and limited by minimal functional dependence, becomes non-trivial. Where kernel functions belong to a certain class, there is a given function and a sought function that belong to a subclass, the weight function is bounded above and below by positive constants.

In this work, the following method of solving this extreme problem is proposed. Using the solvability conditions of the integral equation and denoting the expression under the modulus by the constant, we arrive at the problem of minimizing the quadratic functional with the desired function and linear functionals under additional conditions.

In the paper, it is proved that the obtained extremal problem has a unique solution and this solution is found. Thus, the paper shows the transition to a solvable equation with two kernels.

In Fourier images, this equation is reduced to the Riemann problem on the abscissa axis of the theory of analytic functions and solved in quadratures. There is only one solution.

The paper provides an algorithm for solving the given extreme problem and an example. In the modern theory of functions with a complex variable, one of the most important areas of research is the theory of boundary (boundary) problems in classes of analytic functions and their various generalizations.

Convolution operators are often found in the study of linear systems. If certain signals are applied to the input of such a system, the output signal is presented as a convolution of two functions. At the same time, one of the functions is called the impulse response function, and its Fourier image is called the transfer function of the system. So, the given task can be interpreted as follows: the impulse response function should be selected so that the signal at the output of the system would differ as little as possible from the predefined function.

The results obtained in the course of the presented work can be used to develop approximate numerical and analytical solutions to the problem.

Key words: *integral equations, convolution-type equations, equations with two kernels, extremal problem, Riemann problem of the theory of analytic functions.*

Вступ. В останні роки зростає увага до операторів типу нелокальної згортки з двома ядрами. Цьому сприяє формування низки цікавих і нетривіальних математичних проблеми, що виникають в теорії таких операторів, з одного боку, і різної важливості застосування цієї теорії з іншого боку. Серед прикладних галузей, в яких оператори типу згортки нульового порядку мають істотне значення, варто відмітити динаміку популяції, екологічні проблеми та теорію пористих середовищ. Зокрема, в моделях популяційної динаміки оператори, можна використовувати для аналізу поширення інфекцій або зростання біологічних популяцій рослин або тварин. У будівній механіці є функція, обернена до функції механічного спротиву, в електротехніці вона являє собою лінійний фільтр, який у широкому сенсі можна розуміти як лінійну операцію, що визначається оператором типу згортки.

Розглянемо інтегральне рівняння у згортках з двома ядрами

$$u(x)+\int_0^{\infty}k_1(x-s)u(s)ds-\int_{-\infty}^{0}k_2(x-s)u(s)ds=g(x). \qquad (1)$$

Тут ядерні функції $k_1(x)$ і $k_2(x)$ належать класу $L(-\infty,+\infty)$, задана функція $g(x)$ і шукана функція $u(x)$ належать класу $L_2(-\infty,+\infty)$.

Далі, для скорочення запису, будемо застосовувати узагальнені ядерні функції. Наприклад,

$$u(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}\tau(x-s)u(s)ds=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-s)u(s)ds+\int_{-\infty}^{+\infty}\tau(x-s)u(s)ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\delta(x-s)+\tau(x-s)\right)u(s)ds=\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(x-s)u(s)ds.$$

Тут $\delta(x)$ - дельта-функція, $\mu(x)$ - узагальнена функція.

Таким чином, у скороченому та більш загальному вигляді рівняння (1) будемо записувати наступним чином:

$$\int_0^{\infty}k_1(x-s)u(s)ds-\int_{-\infty}^{0}k_2(x-s)u(s)ds=g(x), \quad -\infty<x<+\infty \qquad (2)$$

і вважати, що ядерні функції $k_j(x)$ на зімкнутій осі мають неперервні та обмежені зверху і знизу образи Фур'є $K_j(x)$:

$$0<c<K_j(x)<C<+\infty, \quad j=1,2 .$$

Із теорії інтегральних рівнянь з двома ядрами відомо, що якщо індекс

$$\chi=Ind\frac{K_2(x)}{K_1(x)}=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{K_2(x)}{K_1(x)}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

рівняння (2) від'ємний, то рівняння, взагалі кажучи, розв'язків немає [1. С. 50]. В цьому випадку стає нетривіальною задача знаходження функції $u(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$ за умовою

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)\left|\int_0^{\infty}k_1(x-s)u(s)ds-\int_{-\infty}^{0}k_2(x-s)u(s)ds-g(x)\right|^2dx\to\min, \qquad (3)$$

де вагова функція $\rho(x)$ обмежена зверху і знизу додатними сталими.

Ми прийшли до екстремальної задачі з операторами типу згортки. Оператори типу згортки часто зустрічаються при вивченні лінійних систем (напр. [2] і [3]). Якщо на вхід такої системи подаються сигнали $k_j(t)$, то сигнал на виході можна представити у вигляді згортки функцій. При цьому функція $u(s)$ називається імпульсною функцією відгуку, а її образ Фур'є – передаточною функцією системи.

Основи теорії оптимальних лінійних фільтрів були закладені у роботах А.Н. Колмогорова [4] і Н. Вінера [5]. В роботах [6, 7, 8] розглянуто ще декілька задач оптимальної лінійної фільтрації, що зводяться до рівнянь типу Вінера-Хопфа.

Метою роботи *є* представлення методики розв'язання екстремальної задачі (3) у згортках з двома ядрами.

Гіпотезою роботи виступає припущення, що задача мінімізації квадратичного функціоналу з шуканою функцією $v(x)$ і лінійними функціоналами у додаткових умовах:

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)\left|v(x)\right|^2dx\to\min,\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{y_j(x)}v(x)dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{y_j(x)}g(x)dx, \quad j=1,2,...,-\chi,\end{cases}$$

має єдиний розв'язок та є основою для розв'язного рівняння з двома ядрами.

Результати дослідження. Розв'язання задачі (3). Введемо позначення

$$\int_{0}^{\infty} k_1(x-s)u(s)ds - \int_{-\infty}^{0} k_2(x-s)u(s)ds - g(x) = v(x) \qquad (4)$$

і вкажемо, при яких значеннях $v(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$ рівняння (4) розв'язне та знайдемо його розв'язок. В образах Фур'є рівняння (4) буде мати вигляд

$$K_1(x)U^+(x) - K_2(x)U^-(x) - G(x) = V(x). \qquad (5)$$

Ми отримали задачу Рімана теорії аналітичних функцій. Тут великими буквами позначено образи Фур'є від функцій, що позначені малими буквами:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(s)e^{isx}ds, \quad G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{isx}ds,$$

через $U^{\pm}(x)$ позначено образи Фур'є від функцій $u_{\pm}(x)$, де

$$u_+(x) = \begin{cases} u(x), & \text{якщо} \quad x>0, \\ 0, & \text{якщо} \quad x<0, \end{cases} \quad u_-(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x>0, \\ u(x), & \text{якщо} \quad x<0. \end{cases}$$

Запишемо рівняння (5) у вигляді, зручному для факторизації:

$$U^+(x) - \frac{G(x)+V(x)}{K_1(x)} = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\chi} \frac{K_2(x)}{K_1(x)} \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi} U^-(x).$$

Тут коефіцієнт

$$\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\chi} \frac{K_2(x)}{K_1(x)}$$

має нульовий індекс, його можна факторизувати

$$\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\chi} \frac{K_2(x)}{K_1(x)} = \frac{X^+(x)}{X^-(x)},$$

де функції $X^{\pm}(x)$ аналітично продовжувані на верхню і нижню півплощини і не мають там нулів:

$$\ln\left[\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\chi} \frac{K_2(x)}{K_1(x)}\right] = \ln X^+(x) - \ln X^-(x),$$

$$X^{\pm}(x) = \exp\left(\pm P^{\pm} \ln\left[\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\chi} \frac{K_2(x)}{K_1(x)}\right]\right).$$

Оператори $P^{\pm}$ визначаються наступним чином:

$$\left(P^{\pm}w\right)(x) = \frac{1}{2}w(x) \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w(s)}{s-x}ds.$$

Вони діють із $L_2(R)$ у $L_2^{\pm}$. Через $L_2^{+}\left(L_2^{-}\right)$ ми позначили півпростори функцій $\Psi^+(x)\left(\Psi^-(x)\right)$, що належать $L_2(R)$, оригінали Фур'є яких $\psi^+(t)\left(\psi^-(t)\right)$ дорівнюють нулю при $t<0\,(t>0)$. Таким чином $P^{\pm}: L_2(R) \to L_2^{\pm}$.

У просторі функцій w таких, що

$$\frac{w(x)}{x+i} \in L_2(R)$$

оператори $P^{\pm}$ будемо визначати формулами:

$$\left(P^{\pm}w\right)(x) = \frac{1}{2}w(x) \pm \frac{x+i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w(s)}{(s+i)(s-x)}ds.$$

Тепер рівняння (5) можна записати в наступному вигляді:

$$\frac{U^+(x)}{X^+(x)} - \frac{G(x)+V(x)}{K_1(x)X^+(x)} = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\chi} \frac{U^-(x)}{X^-(x)}.$$

Застосовуючи до цього рівняння оператори $P^{\pm}$, знайдемо шукані функції:

$$U^{+}(x)=X^{+}(x)P^{+}\frac{G(x)+V(x)}{K_1(x)X^{+}(x)}, \tag{6}$$

$$U^{-}(x)=-X^{-}(x)\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\chi}P^{-}\frac{G(x)+V(x)}{K_1(x)X^{+}(x)}. \tag{7}$$

Умови розв'язності мають вигляд:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{V(x)dx}{X^{+}(x)K_1(x)(x+i)^{j}}=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{G(x)dx}{X^{+}(x)K_1(x)(x+i)^{j}},\quad j=1,2,...,-\chi.$$

Позначимо

$$Y_j(x)=\frac{1}{\overline{X^{+}(x)}\,\overline{K_1(x)}(x-i)^{j}},\quad j=1,2,...,-\chi$$

і зазначимо, що $Y_j(x)$ - лінійно незалежні функції.

Враховуючи позначення (4), прийдемо до наступної екстремальної задачі визначення функції $v(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)\left|v(x)\right|^{2}dx\to\min,\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{y_j(x)}v(x)dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{y_j(x)}g(x)dx,\quad j=1,2,...,-\chi.\end{cases} \tag{8}$$

Метод множників Лагранжа приводить до рівняння

$$\rho(x)v(x)+\sum_{j=1}^{-\chi}\lambda_j y_j(x)=0,$$

звідки

$$v(x)=-\sum_{j=1}^{-\chi}\lambda_j\frac{y_j(x)}{\rho(x)}. \tag{9}$$

Підставляючи (9) у додаткові умови (8), отримаємо лінійну систему алгебраїчних рівнянь для знаходження множників Лагранжа λ_j:

$$\sum_{j=1}^{-\chi}\lambda_j\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\left(\frac{y_p(x)}{\sqrt{\rho(x)}}\right)}\left(\frac{y_j(x)}{\sqrt{\rho(x)}}\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{y_p(x)}g(x)dx, \tag{10}$$
$$p=1,2,...,-\chi$$

Система (10) має єдиний розв'язок, оскільки головний визначник системи є визначником Грама, складений із лінійно незалежних елементів $\dfrac{y_j(x)}{\sqrt{\rho(x)}}$.

Приклад. Розглянемо рівняння з двома ядрами (1). Ядра та вільний член задамо наступними виразами:

$$k_1(x)=\begin{cases}-2e^{-x},\ x>0,\\ 0,\quad x<0,\end{cases}\quad k_2(x)=\begin{cases}e^{-x},\ x>0,\\ 0,\quad x<0,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0,\ x>0,\\ -e^{x},\ x<0.\end{cases}$$

Знайдемо їх образи Фур'є:

$$K_1(x)=-2\int_{0}^{+\infty}e^{-t}e^{itx}dt=\frac{-2i}{x+i},\quad K_2(x)=\frac{i}{x+i},\quad G(x)=\frac{i}{x-i}.$$

Представимо шукану функцію $u(x)$ у вигляді

$$u(x)=u_{+}(x)-u_{-}(x)$$

і запишемо рівняння (1) в образах Фур'є:

$$U^{+}(x)+K_1(x)U^{+}(x)-U^{-}(x)-K_2(x)U^{-}(x)=G(x).$$

В нашому прикладі ми отримаємо наступну задачу Рімана теорії аналітичних функцій:

$$U^{+}(x)=\frac{x+2i}{x-i}U^{-}(x)+\frac{i(x+i)}{(x-i)^{2}}.$$

Індекс цієї задачі від'ємний:

$$\chi = Ind\,\frac{x+2i}{x-i}=-1.$$

Теорія стверджує, що задача розв'язків немає. Дійсно, ліва частина останнього рівняння є функцією, що аналітично продовжувана у верхню півплощину, а права частина – аналітично продовжувана у нижню півплощину. Застосовуючи до цього рівняння оператори $P^{\pm}$, знайдемо:

$$U^{+}(x)=0,\quad 0=\frac{x+2i}{x-i}U^{-}(x)+\frac{i(x+i)}{(x-i)^{2}},$$

звідки

$$U^{-}(x)=-\frac{i(x+i)}{(x-i)(x+2i)}.$$

Отримана функція $U^{-}(x)$ не належить класу L_2^{-} бо не є аналітично продовжуваною у нижню півплощину.

Поставимо екстремальну задачу. Знайти функцію $u(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$ за умовою:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|u(x)+\int_{0}^{\infty}k_1(x-s)u(s)ds-\int_{-\infty}^{0}k_2(x-s)u(s)ds-g(x)\right|^{2}dx\to\min .$$

Позначимо

$$u_{+}(x)+\int_{0}^{\infty}k_1(x-s)u(s)ds-u_{-}(x)-\int_{-\infty}^{0}k_2(x-s)u(s)ds-g(x)=v(x)$$

і підберемо $v(x)$ так, щоб рівняння стало розв'язним. В образах Фур'є отримаємо задачу Рімана:

$$U^{+}(x)-\frac{1+K_2(x)}{1+K_1(x)}U^{-}(x)=\frac{G(x)+V(x)}{1+K_1(x)}.$$

В нашому прикладі ця задача Рімана буде мати наступний вигляд:

$$U^{+}(x)-\frac{x+2i}{x-i}U^{-}(x)=\frac{i(x+i)+V(x)(x-i)(x+i)}{(x-i)^{2}}. \tag{11}$$

Задача буде розв'язною, якщо буде виконана умова розв'язності:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+i)V(x)dx}{(x-i)(x+2i)}=-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+i)dx}{(x-i)^{2}(x+2i)}.$$

Враховуючи рівність Парсеваля, в образах Фур'є, отримаємо наступну екстремальну задачу:

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|U(x)|^{2}dx\to\min,\\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+i)V(x)dx}{(x-i)(x+2i)}=\frac{-2\pi i}{9}.\end{cases}$$

Метод множників Лагранжа приводить до рівняння

$$V(x)+\lambda\frac{x-i}{(x+i)(x-2i)}.$$

Підставляючи

$$V(x)=-\lambda\frac{x-i}{(x+i)(x-2i)}$$

у додаткову умову екстремальної задачі, знайдемо

$$\lambda=\frac{4i}{9}.$$

Значить,

$$V(x)=\frac{-4i(x-i)}{9(x+i)(x-2i)}.$$

Підставляючи знайдене $V(x)$ у рівняння (11), отримаємо розв'язну задачу Рімана:

$$U^+(x)-\frac{x+2i}{x-i}U^-(x)=\frac{i(x+2i)(5x-11i)}{9(x-i)^2(x-2i)}.$$

Запишемо її розв'язок

$$U^+(x)=0,\quad U^-(x)=\frac{-i(5x-11i)}{9(x-i)(x-2i)},$$

$$U(x)=U^+(x)-U^-(x)=\frac{i(5x-11i)}{9(x-i)(x-2i)}.$$

Перейшовши до оригіналів Фур'є, запишемо відповідь:

$$u(x)=\begin{cases}0, & x>0,\\ \frac{1}{9}e^{2x}-\frac{2}{3}e^{x}, & x<0.\end{cases}$$

Відзначимо, що при цьому

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|u(x)|^2\,dx=\frac{19}{108}.$$

Висновки. У випадку, коли інтегральне рівняння з двома ядрами у згортках (2) не має розв'язків, ми розглядаємо задачу мінімізації квадратичного функціоналу (3). Екстремальна задача розв'язна в квадратурах і має єдиний розв'язок. Розв'язок задачі можна знайти за наступною схемою.

1) Із системи (10) знаходимо множники $\lambda_j,\quad j=1,2,...,-\chi$.

2) Із (9) знаходимо $v(x)$, потім його образ Фур'є $V(x)$.

3) Із (6) та (7) знаходимо образи Фур'є єдиного розв'язку задачі (3).

Результати цієї роботи можуть бути використані для розробки наближеного чисельно-аналітичного розв'язку задачі. Цьому питанню передбачається присвятити окрему роботу.

Список використаної літератури

[1] Ф.Д. Гахов, Ю.И. Черский, *Уравнения типа свертки*. М.: Наука, 1978, 296 с.

[2] Дж. Бендат, А. Пирсол, *Применения корреляционного и спектрального анализа*: Пер. С англ. М.: Мир, 1983. 312 с.

[3] Р. Отнес, Л. Эноксон, *Прикладной анализ временных рядов*. Основные методы: пер с англ. М.: Мир, 1982. 428 с.

[4] А.Н. Колмогоров, *Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей* // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1941. Т. 5, № 1. С. 3-14.

[5] N. Wiener, "Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series''. *John Wiley*, New-York, 1949, 163 pp.

[6] A. Steiner, "Zum Mechanismus der Quazianalytizitat gewisser Randfunctionen auf endlichen Intervallen // Annales Acad. Scient''. Fenn. 1970. Ser. A, I, 459, *Mathematica*, Helsinki. P. 3-33.

[7] М.Г. Крейн, П.Я. Нудельман, *Аппроксимация функций из* $L_2(\omega_1,\omega_2)$ *передаточными функциями линейных систем с минимальной энергией*// В сб. : Дифференц. Уравнения и их приложения. Воронеж, 1985. С. 73-79.

[8] Y.A. Hryhoriev, A.Yu. Grygoriev, Extremum problem in convolutions with additional conditions on the axis. *International Journal of Applied Mathematics*. Volume 33, No.2, 2020, pp. 355-367.