

УДК 629.113

DOI 10.36910/775.24153966.2023.75.42

В.Г. Вербицький¹, А.Є. Бондаренко², Є.М. Місько², О.О. Разбойніков³*Університет Ковентрі¹**Одеська державна академія будівництва та архітектури²**Національний транспортний університет³***ДО ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОСТОРОВИХ ВЕРТИКАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ЗЧЛЕНОВАНОГО АВТОПОТЯГА**

У статті запропонований варіант розвитку та удосконалення плоскої математичної моделі руху з урахуванням колії, на прикладі зчленованого дволанкового автопотяга, шляхом розробки та апробації окремих підсистем, які б мали враховувати перерозподіл вертикальних навантажень на вісі, за рахунок зміщення центрів мас, або впливу бокових сил в кругових режимах руху автопотяга. Аналіз запропонованих в роботі підсистем із зовнішнім збудженням показав експоненційне згасання збуджень демпфуючими елементами підвіски, що відповідає поведінці реального автопотяга. Запропонований підхід дозволить отримати просторову модель зчленованого автопоїзда, яка б могла враховувати зміну вертикальних навантажень та подальшу зміну сил поперечного прослизання, що впливають на поворотність та керованість автопоїзда.

Ключові слова: зчленований дволанковий автопотяг, крен, тангаж, вертикальні коливання.

V.G. Verbytskyi, A.E. Bondarenko, E.M. Misko, O.O. Razboinikov

TO THE CONSTRUCTION OF A MATHEMATICAL MODEL OF SPATIAL VERTICAL OSCILLATIONS OF AN ARTICULATED TRAIN

The article proposes an option for the development and improvement of a flat mathematical model of motion taking into account the track, using the example of an articulated two-link road train, by developing and testing separate subsystems, which should take into account the redistribution of loads on the axle, due to the mixing of mass centers, or the influence of lateral forces in the circular driving modes of the road train. The analysis of subsystems with external excitation demonstrated the exponential damping of oscillations by the damping elements of the suspension, that corresponds to the behavior of a real road train. The proposed approach will make it possible to get a spatial model of an articulated road train, which could take into account the change in vertical loads and the subsequent change in lateral slip forces that affect the turnability and controllability of the road vehicle.

Key words: articulated two-link train, roll, pitch, vertical oscillations.

При розробці просторової математичної моделі руху зчленованого автопотяга необхідно окрему увагу приділити питанню створення підсистеми яка б враховувала вертикальні переміщення кожної з ланок автопотяга які характерні поведінці реального автопотяга. А саме, згасання коливань при зовнішньому збудженні (наїзд на перешкоду) та положення центрів мас автопотяга, або вплив бічних сил на центри мас (при сталому круговому русі, чи різкому прискоренні, гальмуванні). Окремі питання що до стійкості дволанкових транспортних засобів розглядалися в роботах [1, 2, 3], в роботах [4, 5] приділялась увага визначенням параметрів підвіски і їх вплив на стійкість руху, в даній роботі переслідувалась мета об'єднати усі вище зазначені здобутки та максимально наблизити до реального автопотяга.

В кругових режимах руху за рахунок відцентрових сил відбувається перерозподіл навантажень між коліями коліс, що в свою чергу призводить до зміни бічних сил відведення на кожному колесі, яке несе суттєвий вплив на показники стійкості та маневреності автопотяга в цілому. Аналогічна ситуація виникає при різкому гальмуванні, або раптовому зовнішньому збудженні (наїзд на дорожню перешкоду). Побудова повної просторової моделі являє собою доволі об'ємну задачу, тому в даній роботі розглянемо перший етап до створення просторової моделі, а саме, створення підсистеми яка б враховувала положення центрів мас автопотяга при певному зовнішньому збудженні.

Розглянемо послідовність побудови математичної моделі, яка б враховувала усі сили та моменти для зчленованого автобуса та надавала б можливість об'єднати систему вертикальної динаміки з системою математичних рівнянь плоскопаралельного руху отриманих раніше.

Повноцінна просторова модель повинна в себе включати дві окремі підсистеми. Перша складова – це системи рівнянь руху автопоїзда є рівняння плоскопаралельного руху, що враховують усі нелінійності, які притаманні плоскій двоколійній моделі: фізичні (нелінійні сили відведення) та геометричні (тригонометричні функції як від параметра кута повороту керованого модуля, так і тригонометричних функцій від змінної кута складання) нелінійності. Ця складова

рівнянь руху можливо отримана відомим методом «розрізання вузлів» в точці з'єднання двох ланок і детально описана в роботі [6].

Для прикладу розглянемо відому двоколіїну плоску модель автопотяга з наступними параметрами: a і b - відстань від центру мас тягача до центрів передньої (керованої) осі та задньої осі тягача; c - відстань від центру мас тягача до точки зчипки з другою ланкою; d_1 - відстань від центру мас другої ланки до точки зчипки з тягачем; m , m_1 - маса тягача та напівпричепа; z , z_1 - висота центра мас тягача та напівпричепа; k_{ii} - коефіцієнт пружності підвіски i -того колеса; kd_{ii} - коефіцієнт демпфування підвіски i -того колеса; γ - кут складання (кут між поздовжніми осями тягача та напівпричепа).

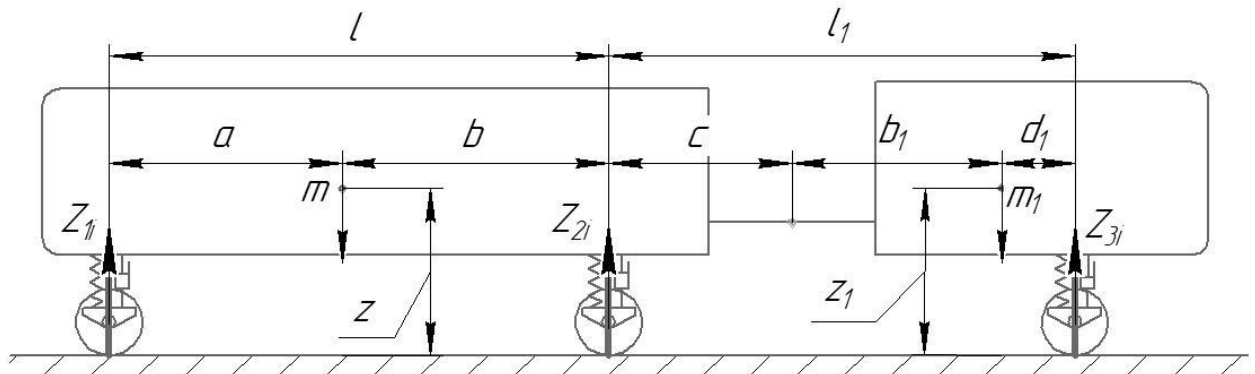


Рис. 1. Масово-геометричні параметри автопотяга

Друга складова просторової моделі утворюється групою рівнянь, що відповідають просторовим коливанням по кутам крену ψ , ψ_1 та тангажу φ , φ_1 (див. рисунок 2) обох ланок зчленованого автопотяга. Ці рівняння можуть бути отримані на основі формалізації рівнянь Лагранжа другого роду, для чого необхідно визначити кінетичну та потенціальну енергії системи. Коливання по кутам крену та тангажу розглядаються відносно поздовжніх та поперечних осей, що є проекціями відповідних центральних осей інерції на горизонтальну опорну поверхню, за умови припущення малих значень кутів тангажу та крену, про що було вже написано в [7,8].

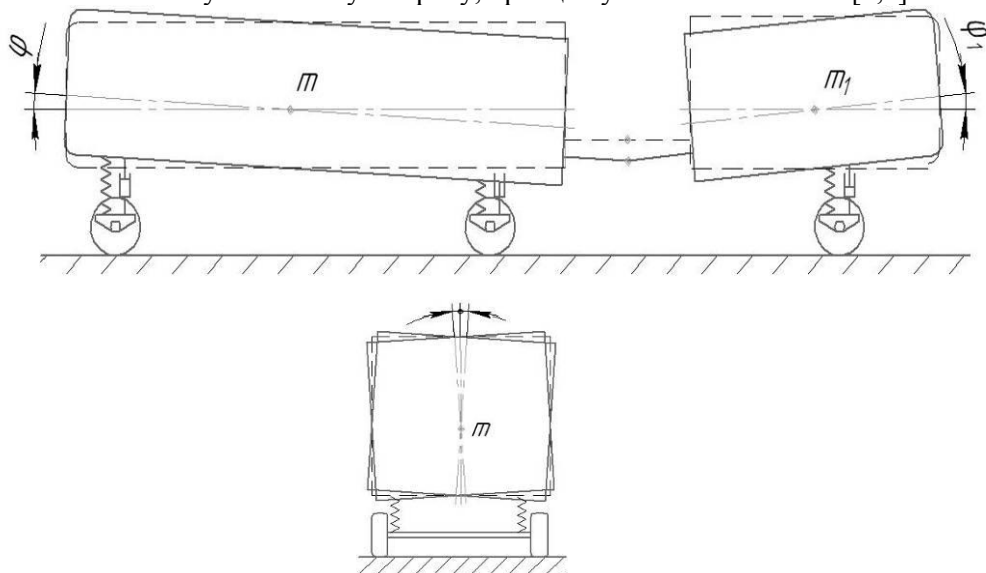


Рис. 2. Кути крену ψ , ψ_1 та тангажу φ , φ_1

Також в роботі [7] вже обговорювалось, що об'єднання цих двох підсистем вводить додаткову взаємну залежність, оскільки в систему просторового руху моментів сил інерції (поздовжніх та поперечних), які визначаються в плоскій моделі руху автопотяга, і прикладаються в центрах мас просторової моделі. В свою чергу, отримані в просторовій моделі вертикальні реакції

опор використовуються для визначення сил відведення в плоскій моделі. Це наближає таку математичну модель до реального зчленованого автопотяга.

На відміну від математичної моделі вертикальних коливань одноланкового колісного транспортного засобу, що має три ступеня вільності (переміщення центру мас по висоті z , по нахилу в поперечній осі φ (галопуванню) та нахилу у поздовжній осі ψ (крену), для зчленованого транспортного засобу необхідно додатково враховувати ще два ступеня вільності - по нахилу другої ланки в поперечній площині φ_1 (галопуванню) та нахилу у поздовжній осі ψ_1 (крену).

Саме для такої механічної системи, в якій присутні декілька ступенів свободи необхідно використати відомі диференціальні рівняння Лагранжа II роду:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1 \dots 5) \quad (1)$$

Для складання рівнянь зчленованого автопотяга необхідно визначити функцію Лагранжа виду

$$L = T - P \quad (2)$$

де T – кінетична енергія системи;

P – потенціальна енергія системи.

Визначимо кінетичну та потенціальну енергію системи. Отримаємо:

$$T = \frac{mz^2}{2} + \frac{J_y \varphi^2}{2} + \frac{(md_1^2 + J_{1y}) \varphi_1^2}{2} + \frac{J_x \psi^2}{2} + \frac{J_{x1} \psi_1^2}{2} \quad (3)$$

$$P = \frac{k_{11}(z - a\varphi - p\psi)^2}{2} + \frac{k_{12}(z - a\varphi + p\psi)^2}{2} + \frac{k_{21}(z + b\varphi - p\psi)^2}{2} + \frac{k_{22}(z + b\varphi + p\psi)^2}{2} + \frac{k_{31}(z + c\varphi - p\psi_1 + l_1\psi_1)^2}{2} + \frac{k_{32}(z + c\varphi + p\psi_1 + l_1\psi_1)^2}{2} \quad (4)$$

Як бачимо, в отриманих рівняннях присутні похідні другого порядку, які суттєво ускладнюють їх чисельне інтегрування. Для цього спростимо рівняння по координаті z та отримаємо два рівняння першого порядку, що з одного боку збільшить кількість розрахунків, а з іншого дозволить розв'язати систему чисельно, так як вона задовольняє приведеній системі Коші:

$$e_{10} = \frac{d}{dt} z(t) = Z(t) \quad (5)$$

$$e_1 = m \left(\frac{d}{dt} Z(t) \right) + k_{11}(-a\varphi(t) - \psi(t) + z(t)) + k_{12}(-a\varphi(t) + \psi(t) + z(t)) + k_{21}(b\varphi(t) - \psi(t) + z(t)) + k_{22}(b\varphi(t) + \psi(t) + z(t)) + k_{31}(c\varphi(t) - \psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + z(t)) + k_{32}(c\varphi(t) + \psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + z(t)) + kd_{11}(-a\varphi(t) - \Psi(t) + Z(t)) + kd_{12}(-a\varphi(t) + \Psi(t) + Z(t)) + kd_{21}(b\varphi(t) - \Psi(t) + Z(t)) + kd_{22}(b\varphi(t) + \Psi(t) + Z(t)) + kd_{31}(c\varphi(t) - \Psi(t) + l_1\phi_1(t) + Z(t)) + kd_{32}(c\varphi(t) + \Psi(t) + l_1\phi_1(t) + Z(t)) \quad (6)$$

Звернемо увагу на те, що параметр h , що присутній у цьому та наступних рівняннях, відповідає не параметру не висоти, а половині ширини колії досліджуваного прототипу.

Спрощення запропоноване в (5) проводиться аналогічно для усіх інших похідних. Відповідно, рівняння по куту галопування ϕ першої ланки, прийме вид:

$$e_{20} = \frac{d}{dt} \phi(t) = \Phi(t) \quad (7)$$

$$e_2 = J_y \left(\frac{d}{dt} \Phi(t) \right) - k_{11}(-a\varphi(t) - h\psi(t) + z(t))a - k_{12}(-a\varphi(t) + h\psi(t) + z(t))a + k_{21}(b\varphi(t) - h\psi(t) + z(t))b + k_{22}(b\varphi(t) + h\psi(t) + z(t))b + k_{31}(c\varphi(t) - h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + z(t))c + k_{32}(c\varphi(t) + h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + z(t))c - kd_{11}(-a\varphi(t) - h\Psi(t) + Z(t))a - kd_{12}(-a\varphi(t) + h\Psi(t) + Z(t))b + kd_{21}(b\varphi(t) - h\Psi(t) + Z(t))b + kd_{22}(b\varphi(t) + h\Psi(t) + Z(t))b + kd_{31}(c\varphi(t) - h\Psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + Z(t))c + kd_{32}(c\varphi(t) + h\Psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + Z(t))c \quad (8)$$

Для визначення швидкостей та координат по куту галопування ϕ_1 другої ланки:

$$e_{30} = \frac{d}{dt} \phi_1(t) = \Phi_1(t) \quad (9)$$

$$e_3 = J_{1y} \left(\frac{d}{dt} \phi_1(t) \right) + k_{31}(c\phi(t) - h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + z(t))l_1 + k_{32}(c\phi(t) + h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + z(t))l_1 + kd_{31}(c\phi(t) - h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + Z(t))l_1 + kd_{32}(c\phi(t) + h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + Z(t))l_1 \quad (10)$$

Рівняння для визначення координат та швидкостей по куту крену ψ першої ланки:

$$e_{40} = \frac{d}{dt} \psi(t) = \Psi(t) \quad (11)$$

$$e_4 = J_{1x} \left(\frac{d}{dt} \psi(t) \right) - k_{11}(-a\phi(t) - \psi(t) + z(t)) + k_{12}(-a\phi(t) + \psi(t) + z(t)) - k_{21}(b\phi(t) - \psi(t) + z(t)) + k_{22}(b\phi(t) + \psi(t) + z(t)) - kd_{11}(-a\phi(t) - \psi(t) + Z(t)) + kd_{12}(-a\phi(t) + \psi(t) + Z(t)) - kd_{21}(b\phi(t) - \psi(t) + Z(t)) + kd_{22}(b\phi(t) + \psi(t) + Z(t)) \quad (12)$$

Рівняння для визначення координат та швидкостей по куту крену ψ_1 другої ланки:

$$e_{50} = \frac{d}{dt} \psi_1(t) = \Psi_1(t) \quad (13)$$

$$e_5 = J_{1x} \left(\frac{d}{dt} \psi_1(t) \right) - k_{31}(c\phi(t) - h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + z(t))h + k_{32}(c\phi(t) + h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + z(t))h - kd_{31}(c\phi(t) - h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + Z(t))h + kd_{32}(c\phi(t) + h\psi_1(t) + l_1\phi_1(t) + Z(t))h \quad (14)$$

Після інтегрування рівнянь отримаємо значення фазових змінних як функції часу та відповідних вертикальних реакцій на кожному колесі, що необхідно для корекції коефіцієнтів відведення, які в свою чергу входять до рівнянь плоскопаралельного руху досліджуваного прототипу.

$$z_{10} = \frac{mb - \frac{m_1 b_1 (c - b)}{l_1}}{l} \quad (15)$$

$$z_{20} = \frac{ma - \frac{m_1 b_1 (a + c)}{l_1}}{l} \quad (16)$$

$$z_{30} = \frac{m_1 d_1}{l_1} \quad (17)$$

$$z_{11} = \frac{z_{10}}{2} + k_{11}(z(t) - a\phi(t) - h\psi(t)) \quad (18)$$

$$z_{12} = \frac{z_{10}}{2} + k_{12}(z(t) - a\phi(t) + h\psi(t)) \quad (19)$$

$$z_{21} = \frac{z_{20}}{2} + k_{21}(z(t) + b\phi(t) - h\psi(t)) \quad (20)$$

$$z_{22} = \frac{z_{20}}{2} + k_{22}(z(t) + b\phi(t) + h\psi(t)) \quad (21)$$

$$z_{31} = \frac{z_{30}}{2} + k_{31}(z(t) + c\phi(t) - h\psi(t) + l_1\phi_1(t)) \quad (22)$$

$$z_{32} = \frac{z_{30}}{2} + k_{32}(z(t) + c\phi(t) + h\psi(t) + l_1\phi_1(t)) \quad (22)$$

Отримані результати чисельного інтегрування основних змінних представимо у вигляді графіків для досліджуваного прототипу, що розглядається, за певних реальних початкових збурень.

Отримані в даній роботі залежності будуть використані при об'єднанні систем автопоїзда до просторової моделі. Необхідність розвитку та її ефективність будуть продемонстровані на прикладі аналізу властивостей поворотності дволанкового автопотяга з різними варіантами прикладання тягових (варіант тягового зусилля на другій осі першої ланки та на осі другої ланки автопоїзда), або гальмівних зусиль у наступних дослідженнях.

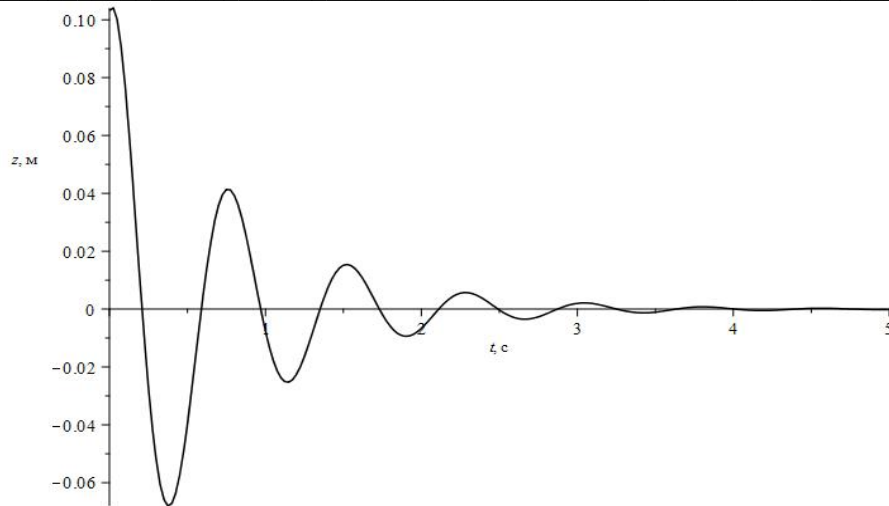


Рис. 3. Зміна координати вертикального переміщення z від часу

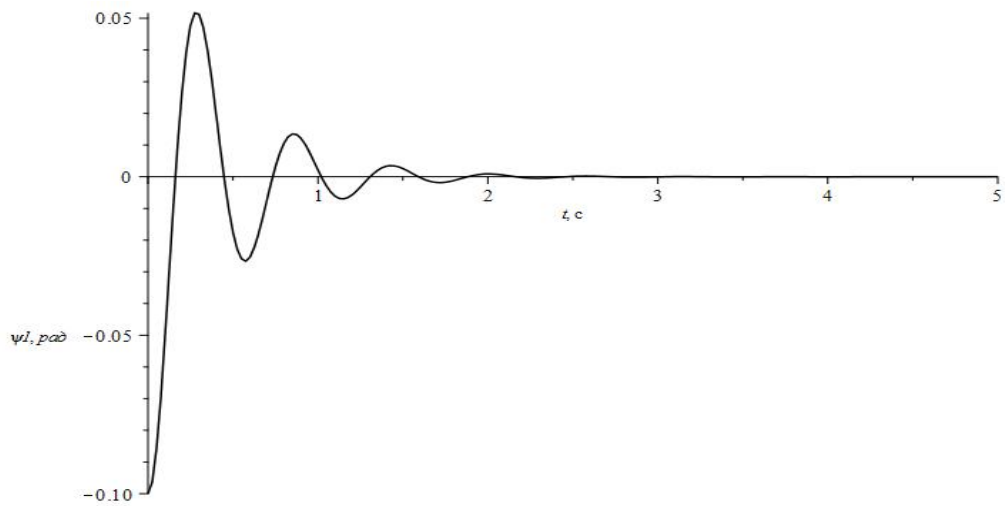


Рис. 4. Зміна кута крену другої ланки ψ_1 від часу

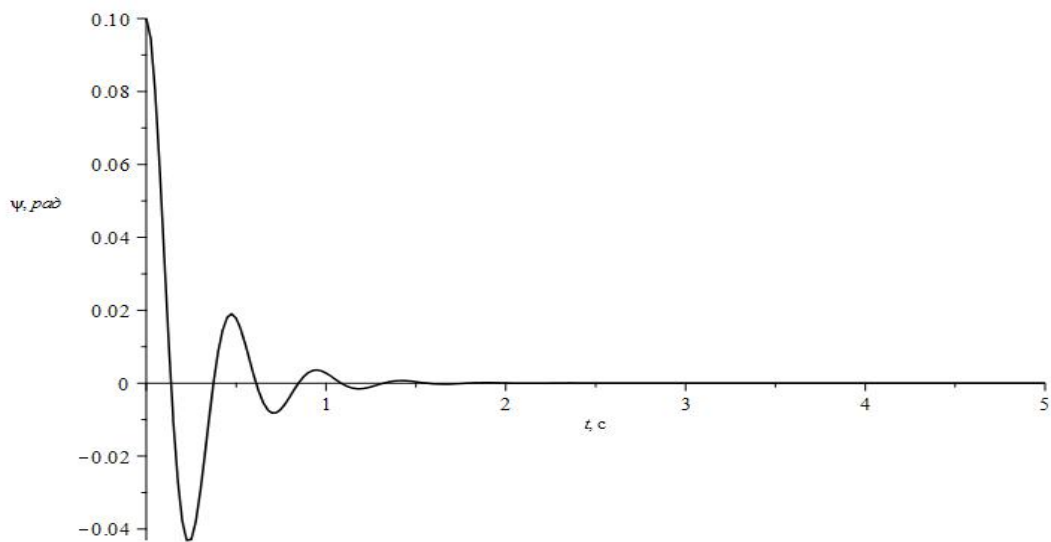
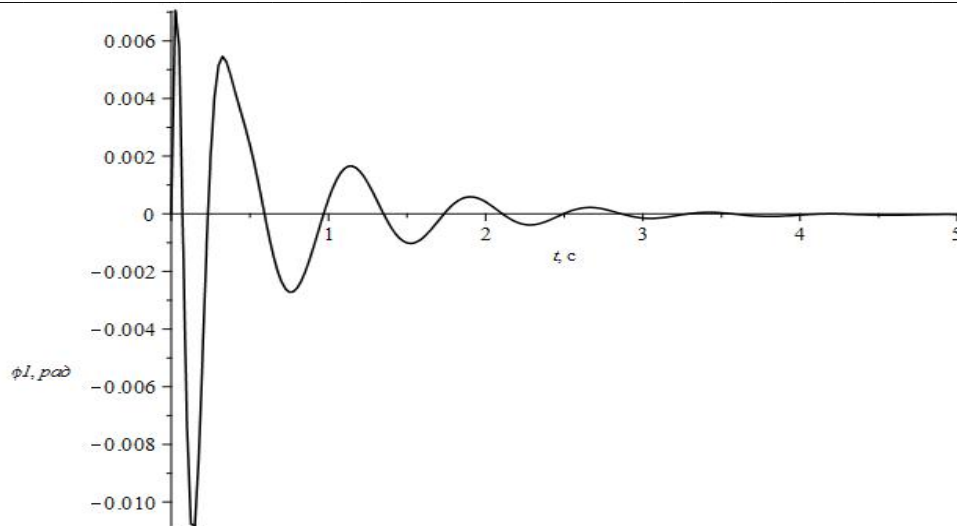
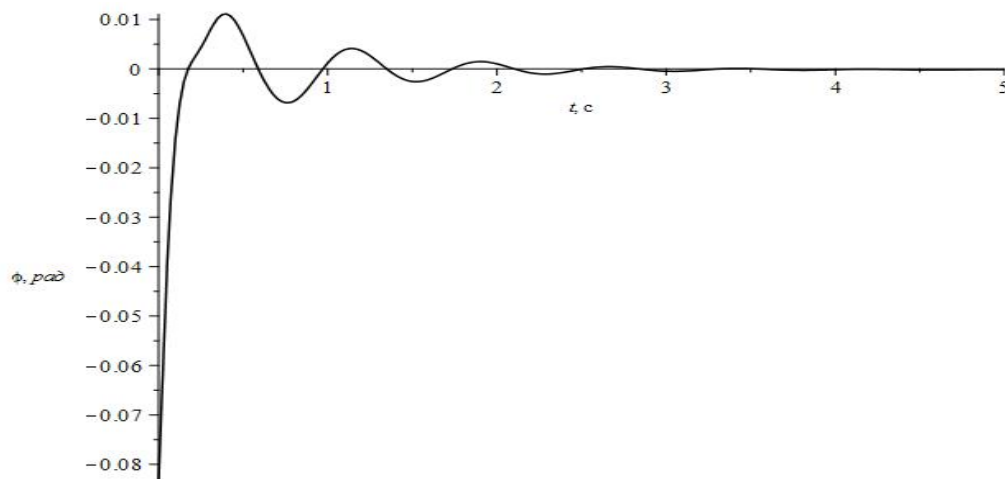


Рис. 5. Зміна кута галопування ψ першої ланки від часу

Рис. 6. Зміна кута галопування φ_1 другої ланки від часуРис. 7. Зміна кута галопування φ першої ланки від часу

Список використаних джерел

1. Pauwelussen J.P. XII International Heavy Truck Conference // Analysis and prevention of excessive lateral behaviour of articulated vehicles. Budapest, Hungary. 1995.
2. Кравченко А.П., Вербицкий В.Г. К вопросу анализа поворачиваемости двухзвенного автопоезда // транспортные системы: материалы VII Всероссийской научно-технической конференции. Красноярск, 25-27 ноября 2010 – Новосибирск 2010 С. 358-363.
3. Сахно, В. П. Основні здобутки та напрямки досліджень стійкості руху автомобілів і автопоїздів / В. П. Сахно, В. Г. Вербицкий // Вісник Національного транспортного університету : науково-технічний збірник до 10-річчя заснування ТАУ / НТУ, Транспортна академія України ; гол. ред. М.Ф. Дмитриченко. – Київ : НТУ, 2002. – Вип. 6. – С. 67-73.
4. Жилейкин М. М., Котиев Г. О., Сарач Е. Б. Методика подбора характеристик управляемой подвески с двумя уровнями демпфирования многоосных колесных машин // Наука и образование, № 3, 2012.
5. Sayers M., Han D. A generic multibody vehicle model for simulating handling and braking. // Presented at the 1995 symposium of the international association of vehicle system dynamics, An Arbor, USA, 1995.
6. Загороднов М.І. Покращення показників маневреності і стійкості руху шарнірно-зчленованих автобусів – Київ: НТУ, 2015. 163 с.
7. Вербицкий В. Г. До аналізу побудова просторової математичної моделі дволанкового автопоїзда з урахуванням вертикальної складової / Вербицкий В. Г., Мінаков В. М., Місько Є. М., Разбойников О. О. // Український журнал прикладної економіки та техніки, 2023 – Том 8. № 2. С. 165 – 172. DOI: <https://doi.org/10.36887/2415-8453-2023-2-24>
8. Місько Є.М. Поліпшення показників повороткості та стійкості руху зчленованого міського автобуса особливо великого класу – Київ: НТУ, 2020. 184 с.