

УДК 539.3

DOI 10.36910/775.24153966.2023.75.40

А.В. Подворний, В.М. Трач*Національний університет водного господарства та природокористування***ВПЛИВ ШАРУВАТОСТІ НА НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПІД ОСЬОВИМ ТИСКОМ В ПРОСТОРОВІЙ ПОСТАНОВЦІ**

Приведений підхід до отримання тривимірної системи диференціальних рівнянь рівноваги теорії пружності для анізотропної шаруватої циліндричної оболонки на основі модифікованого варіаційного принципу Ху-Васідзу. Розв'язок системи, у випадку осьового тиску, проводиться з використанням чисельних методів: прямих в осьовому напрямку та дискретної ортогоналізації в радіальному. Проаналізовано характер розподілу компонентів напружено-деформованого стану залежно від кількості перехресно-армованих шарів.

Ключові слова: просторова постановка, анізотропна оболонка, напружено-деформований стан, осьовий тиск.

A.V. Podvorni, V.M. Trach**INFLUENCE OF LAYERING ON THE STRESS-STRAIN STATE OF ANISOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS UNDER AXIAL PRESSURE IN A SPATIAL FORMATION**

An approach to obtaining a non-homogeneous three-dimensional system of differential equations of equilibrium in the theory of elasticity in partial derivatives for an anisotropic layered cylindrical shell is presented. The anisotropy of the material is associated with the deviation of the main directions of elasticity of the fibrous material from the axes of its own curvilinear coordinate system of the shell and thus the formation of a single plane of elastic symmetry of the mechanical characteristics parallel to the middle surface of the cylinder. To reduce the dimension of the system in the case of axisymmetric deformation under axial compression, the method of straight lines is used. The obtained one-dimensional system of high order is solved in the radial direction by the numerical method of discrete orthogonalization.

The deformation of an anisotropic layered non-thin cylindrical shell in a spatial formulation under the action of axial compression is considered. Graphical dependences of the components of the stress-strain state on the number of cross-reinforced layers of the same thickness are presented.

Key words: spatial formulation, anisotropic shell, stress-strain state, axial compression.

Постановка проблеми. Нетонкі циліндричні оболонки з композитних матеріалів знайшли широке застосування в різноманітних елементах авіа-, машинобудування та в конструкціях трубопроводів. Відповідно до цього розв'язок задачі про напружено-деформований стан (НДС) таких конструктивних елементів є важливою складовою визначення їх режимів експлуатації та прогнозування ресурсу. Одним із способів виготовлення композитних оболонкових конструкцій є намотування волокнистого матеріалу на оправки. При цьому має місце розбіжність між головними напрямками пружності отриманого волокнистого композиту та власною криволінійною системою координат оболонки (рис. 1) і матеріал конструкції отримує одну площину пружної симетрії механічних характеристик паралельну серединній поверхні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Детальні дослідження таких анізотропних тонких та середньої товщини оболонок проведені в роботах [1, 2, 3] в рамках двовимірних теорій. Однак аналіз несучої здатності нетонких оболонкових конструкцій вимагає застосування більш точних теорій. Однією з таких є тривимірна теорія пружності, що дозволяє враховувати низьку зсувну жорсткість та обтиснення матеріалу оболонки за товщиною під навантаженням.

В роботах присвячених дослідженню НДС оболонкових конструкцій в просторовій постановці основна увага зосереджена на ізотропних та ортотропних матеріалах і лише одиничні дослідження [4, 5] проведено для одноплосинного виду анізотропії і то, лише для окремих випадків умов на торцях. Складність розв'язку такої задачі полягає у взаємозв'язку між деформаціями розтягу (стиску), зсуву, згину та кручення, що вимагає використання додаткових математичних методів.

В приведеній роботі для отримання тривимірної системи рівнянь рівноваги теорії пружності використаний модифікований варіаційний принцип Ху-Васідзу. Розв'язок отриманої системи, у випадку осьового стиску циліндричної оболонки, проведемо поєднавши в єдиному обчислювальному процесі чисельні методи прямих в осьовому напрямку та дискретної ортогоналізації в радіальному.

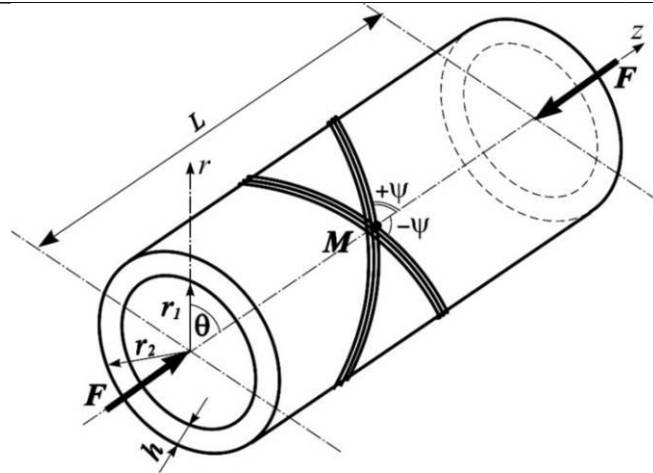


Рис. 1. Циліндрична нетонка анізотропна оболонка під дією осевого тиску

Постановка задачі та методика розв’язку. Відповідно до варіаційного принципу Ху-Васидзу [6] рівняння рівноваги, співвідношення пружності, геометричні залежності та відповідні граничні умови можливо отримати з умови стаціонарності функціоналу Π_1 , що визначається з інтегралу:

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \int_V W(e_{ij}) - T(u_i) + \Phi(u_i) - \sigma_{ij} e_{ij} - \frac{1}{2}(u_{i;j} + u_{j;i}) dV + \\ & + \int_{S_1} \Psi(u_i) dS - \int_{S_2} p_i(u_i - \bar{u}_i) dS. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) варіюються без додаткових умов переміщення u_i , деформації e_{ij} , напруження σ_{ij} , напруження p_i на поверхні S_2 , що викликані переміщеннями \bar{u}_i . Також в цьому функціоналі $W(e_{ij})$ – потенціальна енергія деформації, $T(u_i)$ – кінетична енергія, $\Phi(u_i)$, $\Psi(u_i)$ – потенціали об’ємних і поверхневих навантажень, u_i – компоненти вектора переміщень, крапка з комою перед параметрами i, j означає коваріантну похідну за координатою з відповідним індексом $i, j, k = 1, 2, 3$.

Відповідно до підходу описаного в [7] з умови варіації функціоналу (1) здобудемо неоднорідну тривимірну система з шести диференціальних рівнянь рівноваги лінійної теорії пружності для анізотропних циліндричних оболонок.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} = & -\frac{c_{23}^i + 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{c_{22}^i}{r^2} u_r^i + \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + \\ & + \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + q_r; \\ \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} = & c_{13}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{11}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{66}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \\ & + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{2c_{16}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + q_z; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} = & \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{66}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + \\ & + c_{36}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{2c_{26}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + q_\theta; \\ \frac{\partial u_r^i}{\partial r} = & c_{33}^i \sigma_{rr}^i + \frac{c_{23}^i}{r} u_r^i + c_{13}^i \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + c_{36}^i \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_z^i}{\partial r} &= a_{55}^i \tau_{rz}^i + a_{45}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \\ \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} &= a_{45}^i \tau_{rz}^i + a_{44}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta^i.\end{aligned}\quad (2)$$

В (2) r – радіус циліндричної оболонки незалежний від координат z та θ ; σ_{rr} , τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$ – напруження, а u_z , u_θ , u_r – переміщення оболонки за напрямками відповідно осей z , θ , r . Сталі c_{kl}^i ($k, l=1, 2, 3, 6$) – механічні характеристики матеріалу оболонки [7], що визначаються за допомогою констант a_{kl} [8], i – номер шару оболонки.

Система (2) записана в частинних похідних відносно шести компонентів векторів напружень $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$ та переміщень $u^T = (u_r, u_\theta, u_z)$ і використовується для дослідження напружено-деформованого стану анізотропних нетонких композитних циліндричних оболонок. Для її отримання було використано модифікацію варіаційного принципу Ху-Васідзу, що дозволяє записати відповідні рівнянням (2) граничні умови.

Узагальнений закон Гука для анізотропної оболонкової конструкції запишемо у формі [7]

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^i &= c_{11}^i e_{zz}^i + c_{12}^i e_{\theta\theta}^i + c_{16}^i e_{z\theta}^i - c_{13}^i \sigma_{rr}^i; \\ \sigma_{\theta\theta}^i &= c_{12}^i e_{zz}^i + c_{22}^i e_{\theta\theta}^i + c_{26}^i e_{z\theta}^i - c_{23}^i \sigma_{rr}^i; \\ \tau_{z\theta}^i &= c_{16}^i e_{zz}^i + c_{26}^i e_{\theta\theta}^i + c_{66}^i e_{z\theta}^i - c_{36}^i \sigma_{rr}^i; \\ e_{rr}^i &= c_{13}^i e_{zz}^i + c_{23}^i e_{\theta\theta}^i + c_{36}^i e_{z\theta}^i + c_{33}^i \sigma_{rr}^i; \\ e_{rz}^i &= a_{45}^i \tau_{r\theta}^i + a_{55}^i \tau_{rz}^i; \quad e_{r\theta}^i = a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + a_{45}^i \tau_{rz}^i.\end{aligned}\quad (3)$$

В (3) e_{zz} , $e_{\theta\theta}$, $e_{r\theta}$ – відносні лінійні деформації за напрямками координатних осей r , θ , z , а $e_{z\theta}$, e_{rz} , $e_{r\theta}$ – дотичні відповідним координатним поверхням відносні зсувні деформації

$$\begin{aligned}e_{zz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; \quad e_{\theta\theta}^i = \frac{1}{r} u_r^i; \quad e_{rr}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \\ e_{z\theta}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}; \quad e_{rz}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; \quad e_{r\theta}^i = \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta^i + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (4)$$

Розв'язок системи (2), у випадку осьового тиску, повинен відповідати умовам на бічних поверхнях:
при $r=r_1$

$$\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = 0$$

і при $r=r_2$

$$\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = 0.\quad (5)$$

На торцях при $z=0, z=L$ (рис. 1), прийемо наступні умови:

$$\sigma_{zz}^i = \sigma_{zz}^l, \quad u_r^i = u_\theta^i = 0.\quad (6)$$

Тут σ_{zz}^l – рівномірно розподілене на торцях оболонки нормальне напруження, що відповідає прикладеному стискаючому осьовому навантаженню.

Також необхідне забезпечення умов жорсткого контакту шарів для напружень та переміщень:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^i(r_i) &= \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); \quad \tau_{rz}^i(r_i) = \tau_{rz}^{i+1}(r_i); \quad \tau_{r\theta}^i(r_i) = \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i); \\ u_r^i(r_i) &= u_r^{i+1}(r_i); \quad u_z^i(r_i) = u_z^{i+1}(r_i); \quad u_\theta^i(r_i) = u_\theta^{i+1}(r_i),\end{aligned}\quad (7)$$

де i – номер шару оболонки.

Методика розв'язку задачі. При розв'язку задачі напружено-деформованого стану циліндричних оболонок під рівномірно розподіленим по торцях осьовим тиском вважатимемо, що оболонка деформується із збереженням осьової симетрії.

Одним з підходів, що дозволяє зменшити розмірність системи (2) є метод прямих [2, 5]. Враховуючи, що в роботі розглядатимемо лише випадки вісесиметричної деформації, отриману таким чином двовимірну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних на основі (2)

приведемо до одновимірної системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку шляхом заміни похідних по координаті z різницевиими співвідношеннями.

Для цього розбиваємо інтервал зміни похідних по координаті z на $n-1$ рівних відрізків за допомогою n рівновіддалених точок, тобто:

$$\frac{\partial x(r, z_i)}{\partial z} \approx \frac{1}{2(z_{i+1} - z_i)} (x(r, z_{i+1}) - x(r, z_{i-1}));$$

$$\frac{\partial^2 x(r, z_i)}{\partial z^2} \approx \frac{1}{(z_{i+1} - z_i)^2} (x(r, z_{i+1}) - 2x(r, z_i) + x(r, z_{i-1})). \quad (8)$$

Тут x – компоненти НДС (2); $i=n$ – кількість рівновіддалених точок, якими розбивається оболонка вздовж твірної.

Таким чином, розв'язок поставленої задачі про НДС нетонкого циліндра зводиться до пошуку невідомих $\sigma_{rr}, \tau_{rz}, \tau_{r\theta}, u_r, u_z, u_\theta$ у кожній i -й точці. А залежності (2) перетворюються в одновимірну систему порядку $6n$ звичайних диференціальних рівнянь відносно похідної по координаті r , що в скороченому записі має вигляд

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r)\bar{y}, \quad (9)$$

де прийнято $\bar{y} = \{ \sigma_{rr}^1; \tau_{rz}^1; \tau_{r\theta}^1; u_r^1; u_z^1; u_\theta^1; \dots; \sigma_{rr}^{n-1}; \tau_{rz}^{n-1}; \tau_{r\theta}^{n-1}; u_r^{n-1}; u_z^{n-1}; u_\theta^{n-1}; \sigma_{rr}^n; \tau_{rz}^n; \tau_{r\theta}^n; u_r^n; u_z^n; u_\theta^n \}$ з граничними умовами (5); $T(r)$ – матриця коефіцієнтів при невідомих компонентах напружень та переміщень, n – кількість рівновіддалених прямих (точок) якими розбивається інтервал зміни похідних за координатою уздовж твірної z оболонки.

Розв'язок здобутої таким чином одновимірної крайової задачі високого порядку про напружено-деформований стан анізотропної нетонкої циліндричної оболонки під осьовим тиском проводиться при використанні стійкого чисельного методу дискретної ортогоналізації [1, 2, 5].

Компоненти напружень $\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{z\theta}$ відшукаємо використовуючи відповідні залежності узагальненого закону Гука (3).

Реалізація запропонованої методики дослідження напружено-деформованого стану композитної анізотропної циліндричної оболонки. Запропонований в представленій роботі підхід до розв'язку задачі НДС анізотропних композитних нетонких оболонок дозволяє визначити всі виникаючі компоненти напружень та деформацій при осьовому тиску. На противагу цьому, існує спрощена ортотропна модель розрахунку таких оболонок, що не враховує механічні характеристики матеріалу $c_{16}, c_{26}, c_{36}, a_{45}$ узагальненого закону Гука (3) і внаслідок цього не дає можливості визначити напруження $\tau_{r\theta}, \tau_{z\theta}$ та переміщення u_θ . Причому з досліджень [1, 9], що присвячені розрахункам анізотропних оболонок на стійкість та вільні коливання відповідно, на основі двовимірних теорій відомо, що збільшення кількості однакових за товщиною, перехресно-армованих шарів до семи-восьми веде до мінімальної різниці між результатами отриманими з використанням повної форми закону Гука для анізотропної оболонки та визначеними згідно ортотропної моделі. Представляє інтерес перевірити таку закономірність при дослідженні НДС шаруватих анізотропних циліндричних оболонок під осьовим тиском в просторовій постановці і встановити залежність між напруженнями $\tau_{z\theta}$ та переміщеннями u_θ і збільшенням кількості шарів з перехресним армуванням.

В якості прикладу розглянемо задачу дослідження напружено-деформованого стану циліндричної оболонки під дією осьового тиску. Геометричні параметри конструкції (рис. 1) такі: довжина уздовж твірної $L=1,2$ м; радіуси внутрішньої $r_1=0,54$ м та зовнішньої поверхонь $r_2=0,66$ м. В якості матеріалу перехресно-армованих шарів обрано волокнистий композит склопластик з такими механічними характеристиками: $E_{zz}=44,5E_0, E_{\theta\theta}=E_{rr}=10,7E_0, G_{z\theta}=G_{r\theta}=4,18E_0, G_{rz}=8,48E_0, \nu_{\theta z}=0,26, \nu_{z\theta}=0,0628, E_0=1000$ МПа. Кут перехресного армування шарів оболонки складає $\psi = \pm 50^\circ$ до твірної z (рис. 1), причому внутрішній шар повернуто на кут $\psi = +50^\circ$. Розглянемо характер зміни, в залежності від кількості шарів, лише тих компонентів НДС, які у випадку ортотропної моделі розрахунку анізотропного циліндра при осьовому стиску приймаються рівними нулю, тобто дотичне напруження $\tau_{z\theta}$ та переміщення в коловому напрямку u_θ . Величини $\tau_{z\theta}$ визначатимемо

для координати $z=0$ вздовж твірної на зовнішній поверхні циліндра при $r=0,66\text{м}$, значення u_θ обчислимо для координати $z=0,25L$ на серединній поверхні оболонки при $r=0,60\text{м}$, де ці параметри приймають близькі до максимальних значення. Результати дослідження представлені на рис. 2 (а) для напружень $\tau_{z\theta}$ при збільшенні непарної кількості шарів, а на рис. 2 (б) для напружень $\tau_{z\theta}$ при парній кількості. Рис. 3 (а), (б) представляють зміну переміщень u_θ в залежності від зростання відповідно непарної та парної кількості шарів з перехресним армуванням.

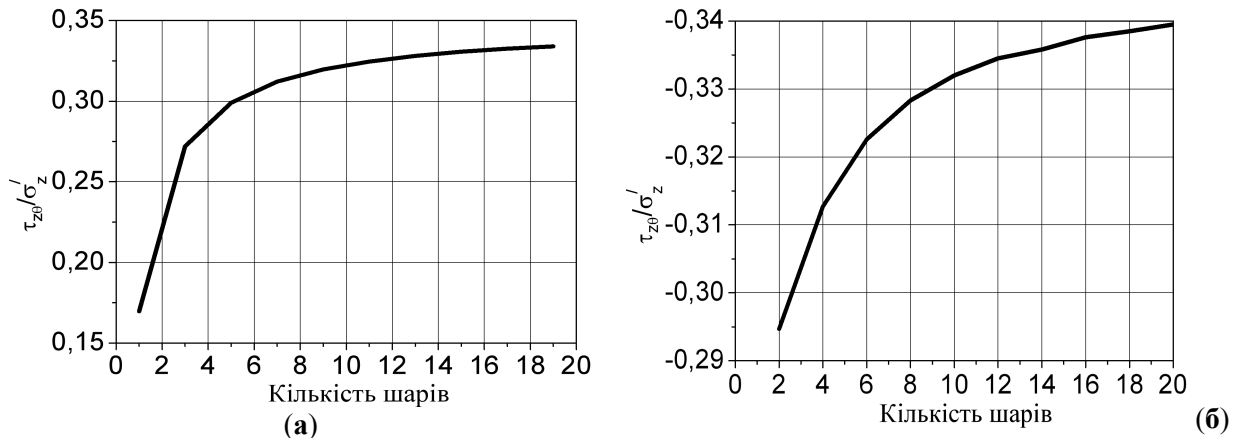


Рис. 2. Зміна величин дотичних напружень $\tau_{z\theta}$ при збільшенні кількості шарів:
а) непарна кількість шарів; б) парна кількість шарів

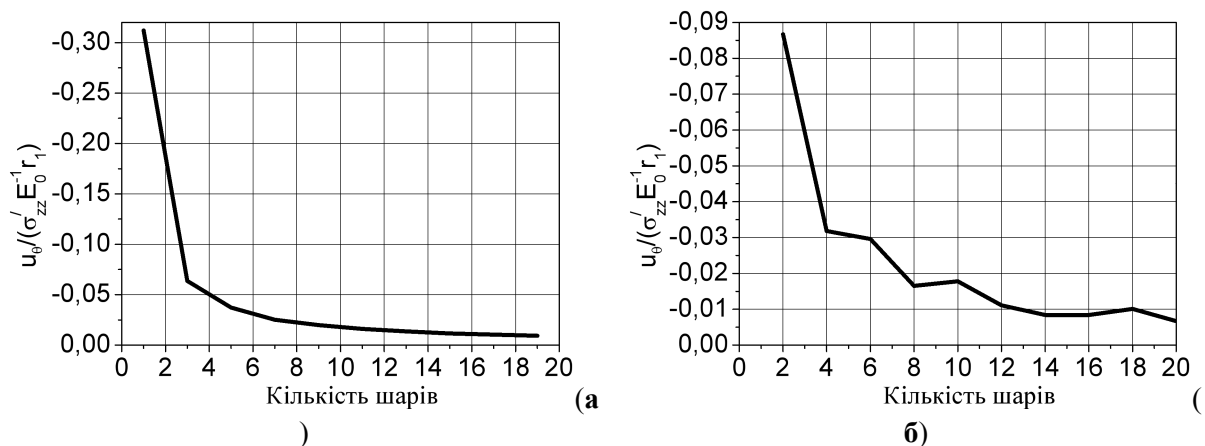


Рис. 3. Зміна величин переміщень u_θ при збільшенні кількості шарів:
а) непарна кількість шарів; б) парна кількість шарів

Аналізуючи результати представлені на рис. 2, 3 зробимо такі висновки. Дотичні напруження $\tau_{z\theta}$ із збільшенням кількості шарів зростають за абсолютними значеннями та усталюються. Так, для непарної кількості шарів (рис. 2 (а)) їх збільшення від одного до дев'ятнадцяти веде до зростання $\tau_{z\theta}$ на близько 97%, а для парної (рис. 2 (б)) збільшення від двох до двадцяти – на 15%. При цьому найбільше зростання має місце для випадку непарної кількості шарів при їх збільшенні від одного до трьох на 60%, а для парної від двох до чотирьох – на 6%.

В той же час переміщення в коловому напрямку u_θ при збільшенні кількості шарів $\psi = \pm 50^\circ$ зменшують свої величини прямуючи до нуля. Так для пакету утвореного непарною кількістю шарів (рис. 3 (а)) збільшення їх кількості від одного до дев'ятнадцяти веде до зменшення u_θ на 97%. Для парної структури (рис. 3 (б)) при двадцяти шарах u_θ складає 7,7% від їх величин для двошарового циліндра. Причому найбільше зменшення u_θ відбувається для непарного шаруватого пакету при переході від одного шару до трьох на 80%, а для парної структури при зміні кількості шарів від двох до чотирьох – на 63%.

Таким чином зауважимо, що збільшення кількості перехресно-армованих шарів однакової товщини анізотропної циліндричної оболонки не дозволяє використовувати для її розрахунку спрощений ортотропний підхід. Так дотичні напруження $\tau_{z\theta}$, що неможливо визначити згідно ортотропної моделі при збільшенні числа шарів не зникають, а мають місце, як це показує представлений підхід, і впливають на несучу здатність анізотропних циліндричних композитних оболонок.

Висновки. В роботі представлено підхід до отримання тривимірної системи рівнянь рівноваги теорії пружності для циліндричних анізотропних шаруватих оболонок на основі модифікованого варіаційного принципу Ху-Васідзу. Запропоновано підхід до зменшення розмірності такої системи у випадку осьового тиску на основі врахування того, що деформування під навантаженням відбувається з урахуванням осьової симетрії оболонки та при використанні методу прямих уздовж твірної. Отримана нормальна одновимірна система високого порядку звичайних диференціальних рівнянь розв'язується в радіальному напрямку стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

Представлений розв'язок задачі про напружено-деформований стан анізотропної циліндричної композитної оболонки під осьовим тиском. Показано залежність напружень та переміщень від збільшення кількості перехресно-армованих шарів однакової товщини та проаналізована різниця між результатами здобутими за запропонованим підходом та ортотропної моделлю розрахунку анізотропних оболонок.

Список використаних джерел.

1. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: монографія. К.: Каравела, 2010. 352 с.
2. Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. Численные решения задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. К.: Наук. думка, 1988, 264с.
3. Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: монографія. К.: Каравела, 2019. 274 с.
4. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. К.: Наук. думка, 1991. 216 с.
5. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей: монография. К.: Академперіодика, 2006. 472 с.
6. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.
7. Семенюк М.П., Трач В.М., Подворний А.В. Напружено-деформований стан товстостінної анізотропної циліндричної оболонки. *Прикладна механіка*. 2023. **59**, №1. С. 91-102.
8. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела. 2-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1977. 415 с.
9. Механика композитов. В 12 т. Т. 9. Динамика элементов конструкций / Кубенко В.Д., Бабаев А.Э., Беспалова Е.И. и др. / под общей ред. Гузя А.Н. Киев: «А.С.К.», 1999. 379с.