УДК 539.3 DOI 10.36910/775.24153966.2023.75.17

В.І. Шваб'юк[1], Т.В. Фурс[1], Н.В. Коменда[2], С.Б. Мікуліч[1]
Луцький національний технічний університет,
[1]кафедра прикладної математики та механіки, [2]кафедра електроінженерії

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ ХВИЛЬ У ПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ З ВКЛЮЧЕННЯМИ ЗА ДІЇ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

У роботі розроблено алгоритм реалізації непрямого підходу методу граничних елементів до дослідження напружено-деформованого стану для тіл з включеннями за дії нестаціонарних навантажень. Використання методу інтегральних перетворень у випадку дії змінних у часі навантажень дозволило звести розв'язання нестаціонарної задачі до скінченної системи задач у частотній області. У роботі отримано потенціальні представлення фундаментальних функцій для плоскої динамічної задачі теорії пружності. Використовуючи основні підходи методу граничних елементів, у роботі отримано інтегральні рівняння другої основної задачі для тіл з включеннями. Встановлено, що ядра отриманих інтегральних рівнянь містять сингулярну та гіперсингулярну особливості.

Ключові слова: *нестаціонарна плоска задача, включення, інтегральні рівняння.*

V.I. Shvabyuk, T.V. Furs, N.V. Komenda, S.B. Mikulich

INTEGRAL EQUATIONS OF WAVE DIFFRACTION PROBLEM IN ELASTIC MEDIA WITH INCLUSIONS UNDER THE ACTION OF NON-STATIONARY LOAD

The work developed an algorithm for implementing the indirect approach of the boundary element method to the study of the stress-strain state for bodies with inclusions under the action of non-stationary loading. Using the method of integral transformations in the case of time-varying loads made it possible to reduce the solution of the non-stationary problem to a finite system of problems in the frequency domain. In the paper, potential representations of the fundamental functions for the flat dynamic problem of the theory of elasticity are obtained. Using the basic approaches of the boundary element method, the integral equations of the second main problem for bodies with inclusions were obtained in the work. It was established that the kernels of the obtained integral equations contain singular and hypersingular features.

Keywords: *non-stationaryplane problem, inclusion, integral equations.*

Постановка проблеми та аналіз публікацій. Наявність включень та жорстких впайок у елементах конструкцій викликає істотну концентрацію напружень не тільки у зоні самих включень, а й у їх околі, особливо при дії змінних у часі навантажень. Неточність у розрахунках на міцність і жорсткість цих елементів конструкцій призводить до появи тріщин та інших дефектів, а також до їх подальшого руйнування у процесі експлуатації.

Для більш точного розрахунку деталей та елементів конструкцій у машинобудуванні необхідно використовувати комплексні дослідження, що поєднують у собі теоретичні розрахунки та експериментальні випробування. Тому актуальним постає питання розробки методик аналізу напружено-деформованого стану елементів конструкцій, що мають жорсткі включення різної форми, за дії динамічного навантаження.

Вивчення процесів поширення та дифракції пружних хвиль у тілах з дефектами за дії змінного у часі навантаження ґрунтується на використанні громіздких математичних підходів. Тому ці задачі відносяться до одних з найбільш складних питань динаміки деформівного твердого тіла. Крім того, використовуючи аналітичні підходи, можна отримати розв'язки лише для випадку включень та отворів кругової та сферичної форми [1]. Для дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкцій з дефектами іншої форми потрібно поряд з аналітичними методами використовувати і числові підходи, що також істотно ускладнює розв'язання задачі [2].

Застосування сіткових числових методів [3] при дослідженні механічної поведінки тіл з включеннями дає можливість отримати хороші результати лише у випадку статичного навантаження. За дії динамічних силових впливів напружено-деформований стан відповідних елементів конструкцій описується швидкозмінними функціями, що при числовому диференціюванні вимагають істотного зростання числових потужностей у зв'язку з необхідністю згущення сітки, та спричиняють втрату точності розрахунків.

Метою дослідження є реалізація непрямого підходу методу граничних елементів, який виявився ефективним у випадку дефектів типу порожнин та отворів [4], до дослідження напружено-деформованого стану елементів конструкцій, що містять жорсткі включення, за дії нестаціонарного навантаження.

Постановка задачі. Розглянемо пружне ізотропне середовище, в яке жорстко без можливих поворотів та переміщень вміщено жорстке включення, границя перерізу якого обмежена контуром L. У центрі ваги включення пружного тіла розмістимо початок декартової системи координат Ox_1x_2 (рис. 1).

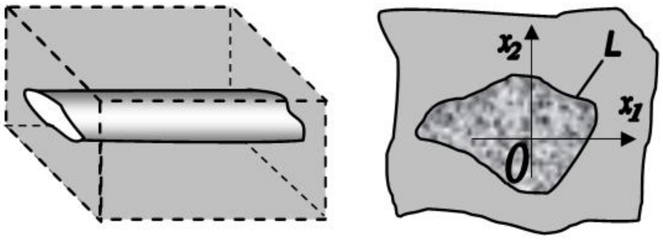

Рис. 1. **3D та 2D модель задачі**

Дослідимо динамічний напружений стан у середовищі і на границі порожнини та включення у випадку дії динамічного (імпульсного, ударного та ін.) навантажень. Граничні умови у випадку другої основної задачі записуються у вигляді:

$$u_1\big|_L = 0, \;\; u_2\big|_L = 0. \tag{1}$$

Викладення основного матеріалу. Використання методу інтегральних перетворень:

$$f(\omega) = \tilde{f}(\omega) = \int_0^T K(\omega, t) f(\mathrm{t}) dt, \tag{2}$$

де $K(\omega, t)$ є ядром перетворення, дозволяє звести нестаціонарну задачу до системи хвильових задач у частотній області. Після застосування такого підходу рівняння руху пружного ізотропного тіла запишеться у вигляді:

$$\partial_m \tilde{\sigma}_{mj} + \tilde{X}_j + \omega^2 \rho \tilde{u}_j = 0, \tag{3}$$

де $\tilde{\sigma}_{mj}$, $\tilde{u}_j$, $\tilde{X}_j$ — трансформанти напружень, переміщень та масових сил, що отримуються при застосуванні формули (2), ω — частота.

У випадку другої основної задачі за відсутності масових сил зображення для переміщень записується у вигляді [5]:

$$\tilde{u}_k = -\int_L \tilde{u}_j \, P_{kj}^* \, dL, \tag{4}$$

де $\tilde{u}_k$ — трансформанти переміщень у *k*-му напрямку, P_{kj}^* — фундаментальні функції, що відповідають напруженню у *k*-му напрямку від дії одиничних сил у *j*-му напрямку. Для двовимірного випадку значення індексів приймаються: *k, j =1, 2*.

Відповідно до [6], використовуючи вектор Буссинеска, фундаментальний тензор функцій впливу рівняння (3), записанного у переміщеннях:

$$\left(c_1^2 - c_2^2\right)\partial_j \tilde{\theta} + c_2^2 \Delta \tilde{u}_j + \frac{\tilde{X}_j}{\rho} = -\omega^2 \tilde{u}_j,$$

можна отримати у вигляді для представлень (4):

$$P_{kj}^* = \sigma_{ij}^{(k)} n_j, \tag{5}$$

де

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \rho \left[\left(c_1^2 - 2c_2^2\right) \frac{\partial U_{mk}^*}{\partial x_m} \delta_{ij} + c_2^2 \left(\frac{\partial U_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right],$$

$$U_{ij}^* = \frac{1}{2\pi\rho c_2^2} \left(\psi \delta_{ij} - \chi \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right),$$

при цьому відстань між точками $r=\sqrt{(x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2}$, $c_1=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ — швидкість хвилі розширення у середовищі, $c_2=\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}}$ — швидкість хвилі зсуву, ρ — густина, $\lambda,\ \mu$ — сталі Ляме для випадку плоскої деформації.

У випадку нестаціонарних навантажень для плоскої динамічної задачі класичної теорії пружності у [7] подано наступні представлення для функцій ψ та χ:

$$\psi=K_0\ \frac{kr}{c_2}\ +\frac{c_2}{kr}\ K_1\ \frac{kr}{c_2}\ -K_1\ \frac{kr}{c_1}\quad ,$$

$$\chi=K_2\ \frac{kr}{c_2}\ -\frac{c_2^2}{c_1^2}K_2\ \frac{kr}{c_1}\ ,$$

де $K_0(r),\ K_1(r),\ K_2(r)$ — модифіковані функції Бесселя третього роду нульового, першого та другого порядку [8], $k=\pm i\omega$, де знак «+» вибирається для розв'язків, що прямують та затухають на нескінченності (у випадку необмежених областей), а знак «-» — для розв'язків, що «прямують» з нескінченності.

Результати досліджень. Для задоволення трансформант граничних умов (1) та побудови інтегральних рівнянь задачі необхідно дослідити фундаментальні функції P_{ij}^* та встановити чи мають вони нерегулярні складові. Використовуючи представлення (5) для двовимірного випадку фундаментальні функції P_{ij}^* можна записати у вигляді:

$$P_{11}^*=\frac{1}{2\pi}\ F_1n_1\frac{\partial r}{\partial x_1}+F_2\frac{\partial r}{\partial n}+2F_3\ \frac{\partial r}{\partial x_1}\ ^2\frac{\partial r}{\partial n}\ ,$$

$$P_{12}^*=\frac{1}{2\pi}\ F_4n_2\frac{\partial r}{\partial x_1}+F_2n_1\frac{\partial r}{\partial x_2}+2F_3\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\ ,$$

$$P_{21}^*=\frac{1}{2\pi}\ F_4n_1\frac{\partial r}{\partial x_2}+F_2n_2\frac{\partial r}{\partial x_1}+2F_3\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial n}\ , \tag{6}$$

$$P_{22}^*=\frac{1}{2\pi}\ F_1n_2\frac{\partial r}{\partial x_2}+F_2\frac{\partial r}{\partial n}+2F_3\ \frac{\partial r}{\partial x_2}\ ^2\frac{\partial r}{\partial n}\ ,$$

де n — вектор нормалі до границі, а функції F_1,F_2,F_3,F_4 виражаються через функції χ та ψ, а також їх похідні по r у вигляді:

$$F_1=\ \frac{c_1^2}{c_2^2}-1\ \psi\ +\ \frac{c_1^2}{c_2^2}-2\ \chi\ +\ \frac{c_1^2}{c_2^2}+1\ \frac{\chi}{r};$$

$$F_2=\psi\ -\frac{\chi}{r},\quad F_3=-\chi\ +2\frac{\chi}{r},\quad F_4=\ \frac{c_1^2}{c_2^2}-2\ \left(\psi\ +\chi\ \right)+\frac{c_1^2}{c_2^2}\frac{\chi}{r}.$$

Для побудови інтеральних рівнянь задачі у області зображень дослідимо функції P_{ij}^* на основі отриманих залежностей (6) та їх складові F_1,F_2,F_3,F_4 на наявність нерегулярності у околі $r=0$:

$$F_1\sim-\frac{1}{2r}\left(1-\frac{c_2^2}{c_1^2}\right)\left(\frac{2c_1^2}{c_2^2}+\frac{c_1}{c_2}+1\right);\ F_2\sim-\frac{1}{2r}\frac{(c_1+c_2)c_2}{c_1^2},$$

$$F_3\sim-\frac{1}{r}\frac{c_1^2-c_2^2}{c_1^2},\ \ F_4\sim-\frac{1}{2r}\left(\frac{2c_1^2}{c_2^2}+\frac{c_1}{c_2}-3-\frac{2c_2}{c_1}\right).$$

Аналіз останніх залежностей показує, що функції F_1, F_2, F_3, F_4 мають особливість порядку $\sim 1/r$.

Використовуючи останні залежності, інтегральні рівнння другої основної задачі у області трансформант можна записати у вигляді:

$$\begin{gathered} c_1 \text{t€}_1 + c_2 \text{t€}_2 + c_1 \text{t€}_1 + c_2 \text{t€}_2 + \int_L \text{t€}_1 \, f_1 + \text{t€}_2 \, f_2 dL = 0, \\ c_3 \text{t€}_1 + c_4 \text{t€}_2 + c_3 \text{t€}_1 + c_4 \text{t€}_2 + \int_L \text{t€}_1 \, f_3 + \text{t€}_2 \, f_4 dL = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

де позаінтегральні члени отримуються при використанні формул Племеля-Сохоцького при граничному переході [лінков], коефіцієнти $c_i, i=1..4$ відповідають сингулярним складовим підінтегральних функцій $f_i, i=1..4$, а $c_i, i=1..4$ — гіперсингулярним складовим функцій F_3,

$$f_1 = P_{11}^* \Big|_{\substack{(x_1,x_2) \; L \\ (x_1^0,x_2^0) \; L}} ; \quad f_2 = P_{21}^* \Big|_{\substack{(x_1,x_2) \; L \\ (x_1^0,x_2^0) \; L}} ; \quad f_3 = P_{12}^* \Big|_{\substack{(x_1,x_2) \; L \\ (x_1^0,x_2^0) \; L}} ; \quad f_4 = P_{22}^* \Big|_{\substack{(x_1,x_2) \; L \\ (x_1^0,x_2^0) \; L}} .$$

Висновки. Аналіз отриманих рівнянь (7) показує, що побудовані за використання непрямого підходу методу граничних елементів, інтегральні рівняння містять не тільки вихідні змінні переміщень, а й їх похідні, тому перетворюються на інтегрально-диференціальні рівняння. Для числового розв'язання цих рівнянь у випадку, коли форма включення відрізняється від кругового, циліндричного чи сферичного, слід використовувати модифіковані числові підходи, які даватимуть можливість не тільки точно описувати криволінійні границі включень, а й дозволяти враховувати похідні від переміщень, що входять до рівнянь (7).

Список використаних джерел:

1. Гузь О.М., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракція пружних хвиль. К.: Наук. думка, 1978. 308 с.
2. Becker, A.A.: The Boundary Element Method in Engineering. A complete course. McGRAW-HILL BOOK, Cambridge, 1992, 338 p.
3. Motamedy, D., Mohammadi S.: Dynamic analysis of fixed cracks in composites by extended finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*. 77, 3373–3393 (2010).
4. Mikulich, O., Shvabyuk, V., Sulym, H. Dynamic Stress Concentration at the Boundary of an Incision at the Plate under the Action of Weak Shock Waves. *Acta Mechanica et Automatica*. 2017. 11(3). PP. 217-221.
5. Bonnet M.: Integral equations and boundary elements. Mechanical application of solids and fluids. (Équations intégrales et éléments de frontière. Application en mécanique des solider et des fluids), CNRS Éditions / Éditions EYROLLES, Paris, 1995. 316 p.
6. Brebbia, C., Telles, J., Wrobel, L.: Boundary element techniques. Springer, New York, 1984.
7. Banerjee P.: Boundary Element Method in Engineering Science. McGraw Hill, New York, London, 1994.
8. Brychkov Yu. A. Handbook of Special FunctionsDerivatives, Integrals, Series and Other Formulas, Chapman & Hall, 2008, 700 p.

Рецензент: Делявський Михайло Володимирович, доктор технічних наук, професор