

А.В. Кузьмов^{1,2}

1- Інститут проблем матеріалознавства ім. І.М. Францевича НАН України

2- Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ДИЛАТАНСІЙНО ЧУТЛИВА МОДЕЛЬ ПЛАСТИЧНОСТІ ПОРИСТИХ МАТЕРІАЛІВ ОТРИМАНА АНАЛІТИЧНИМИ МЕТОДАМИ МІКРОМЕХАНІКИ

Шляхом мікромеханічного осереднення на циліндричній представницькій комірі вдалося послідовними аналітичними методами побудувати криву текучості для ізотропного пористого матеріалу. Отримана реологічна модель пластичності пористого матеріалу описує явища різноопірності розтягу-стиску та дилатансії. Вищезгадані ефекти зокрема характерні для пошкоджених або синучих матеріалів. Також ця крива текучості відображає деякі інші, підтвержені експериментом, специфічні особливості пластичної реакції порошків та порошкових заготовок з металів і кераміки. Зокрема такі особливості пластичної реакції, які неможливо на деяких ділянках кривої текучості узгодити з асоціюваним законом пластичної течії.

Ключові слова: мікромеханіка, дилатансія, пластичність пористих матеріалів, порошкові матеріали, мікромеханіка, крива текучості.

A. Kuzmov

MICROMECHANICS BASED DILATANCY-SENSITIVE PLASTICITY MODEL OF POROUS MATERIALS IN CLOSED-FORM ANALYTICAL SOLUTIONS

By means of micromechanical averaging on a cylindrical unit cell, it was possible to construct a yield curve for an isotropic porous material using consistent analytical methods. At the same time, the velocity field at the meso-level, i.e., in the volume of the cell, in addition to satisfying the corresponding boundary conditions, is also stress-balanced. That is, the stress field generated by this velocity field satisfies the stress equilibrium equation. Expressions for the specific dissipation (which in the case of plasticity is the same as the dissipative potential) and for the yield curve of the porous material were found in an analytical form. The resulting rheological model of the plasticity of the porous material describes the phenomena of tension-compression asymmetry and dilatancy, i.e., an increase in the von Mises ultimate stress with the growth of the hydrostatic stress component during plastic flow. The above-mentioned effects are particularly characteristic of damaged or powdered materials. Also, this flow curve describes some other, experimentally confirmed, specific features of the plastic reaction of powders and powder billets made of metals and ceramics. In particular, such features of plastic response, which in some sections of the yield curve are incompatible with the associative flow rule.

Keywords: micromechanics, dilatancy, plasticity of porous materials, powder materials, micromechanics, yield curve.

1. Вступ. В останні десятиліття серед реологічних моделей пластичності поряд з класичними теоріями нестисливо-пластичного деформування Мізеса або Треска, що стосуються в першу чергу незворотного деформування компактних металів, все більшого розповсюдження набувають різноманітні теорії незворотно-стисливої пластичності. Це пов'язано як з потребами багатьох галузей практичної діяльності у моделюванні процесів незворотно-стисливого пластичного деформування певних матеріалів, так і з розвитком засобів комп'ютерного моделювання, в які вбудовуються відповідні моделі стисливої пластичності. Серед таких галузей застосування та відповідних моделей незворотно-стисливої пластичності слід назвати – теорію пресування порошків для потреб порошкової металургії (моделі Штерна [1,2] і Shima–Oyane [3]), фармацевтики [4], керамічного виробництва [5] (Drucker–Prager Cap [6]), механіку ґрунтів (Cam-clay [7]), руйнування піноматеріалів (Deshpande–Fleck [8]), в'язкого руйнування та вичерпання ресурсу пластичності металів (GTN модель Gurson–Tvergaard–Needleman [9]). Щодо пакетів скінченно-елементного моделювання можна згадати в першу чергу загальнонауковий мультидисциплінарний Abaqus, де є вбудовані моделі GTN, Cam-clay, Deshpande–Fleck, Drucker–Prager Cap, а також присутні широкі можливості користувачу програмувати власну реологію матеріалу, в тому числі незворотно-стисливої пластичності. В більш вузько спрямованому на задачі обробки тиском пакеті Deform є вбудована модель пластичності пористих матеріалів Shima–Oyane і також є можливість програмувати користувацькі моделі незворотно-стисливої пластичності.

Слід зазначити, що відповідно до фундаментальних засад континуальної механіки, в класичних моделях нестисливої пластичності Мізеса або Треска пластична поведінка матеріалу при будь-яких схемах деформування може бути описана однією величиною границі текучості. В моделях же стисливої пластичності, навіть у випадку ізотропного Мізесівського матеріалу (тобто коли визначальні співвідношення не залежать від параметра Лоде-Надаї) множина точок текучості

вже, взагалі кажучи, не описується одним параметром, а є певною кривою в (p, τ) площині. Де інваріанти (p, τ) наступним чином виражаються через напруження:

$$p = 1/3 \sum_{i=1}^3 y_{ii}; \quad \Phi = \sum_{ij=1}^3 (y_{ij} - p\delta_{ij})^2; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (1)$$

Також, оскільки матеріал стисливий, вигляд цієї кривої текучості в (p, τ) площині буде різним для різної величини густини. Тому побудова моделі стислої пластичності на базі лише обробки результатів експериментів з визначення границь текучості матеріалу ϵ , в більшості випадків, занадто витратною та непрактичною. Як правило приймаються деякі теоретичні припущення щодо вигляду кривої текучості в (p, τ) площині з метою зменшення обсягу експериментів для верифікації поведінки конкретного матеріалу. Одними з найрозповсюдженіших моделей стислої пластичності є моделі пористих матеріалів. В цьому випадку в структурі матеріалу можна виділити каркас з нестислої твердої фази та пористоту або пори між елементами каркасу. При цьому, як правило, приймається спрощене припущення, що пластична поведінка пористого матеріалу з певним конкретним матеріалом твердої фази, описується лише відносною густиною або пористістю. До таких моделей відносяться криві текучості Штерна, GTN, Shima–Oyane.

У випадку пористого матеріалу одним зі шляхів побудови моделі пластичності є використання мікроемеханічного осереднення на представницькій комірці (осередку). Геометрія представницького осередку відображає при цьому структуру пористого матеріалу. Втім послідовно побудувати теорію пластичності пористого матеріалу засобами мікроемеханіки в аналітичному вигляді вдається дуже рідко, – чи не єдиним таким випадком є модель Герсона [10] для циліндричних пор. При виведенні деяких інших аналітичних теорій пористої пластичності використовувались певні елементи мікроемеханічного аналізу, проте з такими суттєвими спрощувачами припущеннями, що при цьому важко говорити про послідовне мікроемеханічне осереднення. Наприклад в моделі Штерна [1], постулюється певна аналогія між пружними та пластичними потенціалами і відповідно використовуються вирази для модулів пружності пористого тіла. А в чутливій до параметра Лоде-Надаї моделі Штерна та Кокса [11] не розв'язуються рівняння рівноваги сил на мезорівні, а використовується лише кінематично допустиме поле швидкостей. Тому при дослідженні пластичності пористих матеріалів різноманітної структури набуло широкого розповсюдження використання суто обчислювального мікроемеханічного осереднення.

Метою даної роботи є саме побудова послідовними аналітичними методами мікроемеханіки моделі пластичності Мізесівських пористих матеріалів

2. Представницький осередок пористого матеріалу та поле швидкостей на мезорівні.

Елементарна комірка, на основі якої надалі бути здійснюватись аналіз реології пластичності пористого тіла, може бути подана у вигляді полого циліндра. Тут положення кожної точки визначається трьома циліндричними координатами r, ϕ, z , де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \arctg \frac{y}{x}$. Матеріал матриці розташований в області $R_0 < r < R_1$, $0 < z < h$. Внутрішня область вільна від матеріалу матриці, що передбачається нестисливим. Вважається, що матеріал матриці є ідеально-пластичним за моделлю Мізеса з границею текучості $\tau = \tau_0$. Надалі компоненти тензорів напружень і швидкостей деформацій та їх інваріанти, віднесені до елементарної комірки, позначаються малими літерами $\sigma_{ij}, e_{ij}, p, \tau, e, \gamma$ відповідно. Аналогічні ж величини що описують макроскопічну поведінку мікронеоднорідного пористого матеріалу, позначаються великими літерами $Y_{ij}, E_{ij}, C, \Phi, E, \Gamma$ відповідно. В подальшому припускається, що відбувається двовісне деформування пористого композиту, тобто макроскопічний тензор швидкостей деформацій має вигляд.

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} E_{zz} & 0 & 0 \\ 0 & E_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & E_{rr} \end{pmatrix} \quad (2)$$

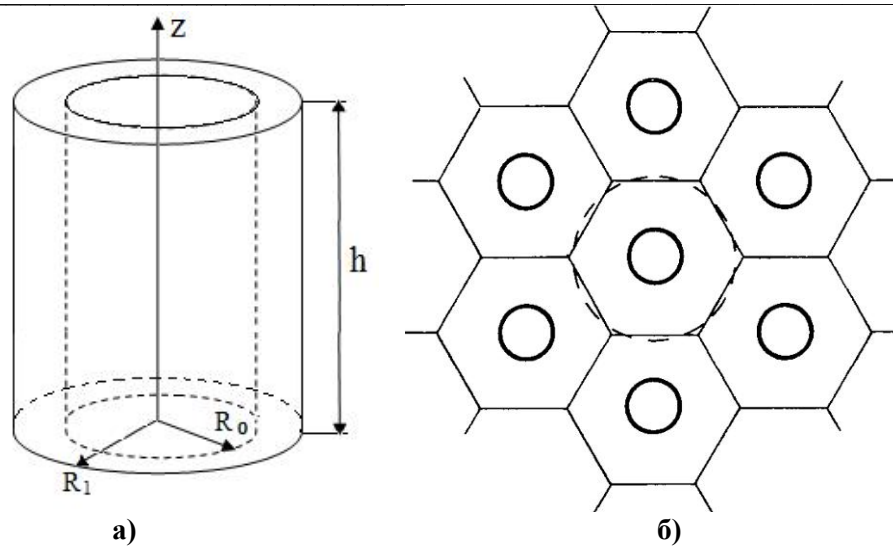


Рис. 1. Геометрія елементарної комірки а) та «масштабу довжини осереднення» б)

В цьому випадку, поле швидкостей $\vec{V} = \{V_z, V_r, V_f\}$ на мезорівні, відповідно до принципу еквівалентної гомогенності [12], повинно задовольняти «мікромеханічні» граничні умови [13] вигляду $V_i = \sum_{j=1}^3 E_{ij} x_j$, що в циліндричній системі координат набудуть форми:

$$\vec{V}|_{r=R_1} = \{E_{zz}z, E_{rr}R_1, 0\}; \quad \vec{V}|_{z=0} = \{0, E_{rr}r, 0\}; \quad \vec{V}|_{z=h} = \{E_{zz}h, E_{rr}r, 0\}; \quad (3)$$

Принцип еквівалентної гомогенності [12] стверджує що якщо розмір області композиту перевищує певну величину «масштабу довжини осереднення» (але все ще менший всього розміру тіла), деформація границі області повинна бути близькою до однорідної $V_i = \sum_{j=1}^3 E_{ij} x_j$. Якщо ж

застосувати цей принцип не до елементарної комірки з рис. 1 а), а до гексагональної упаковки таких комірок рис. 1 б), умовно ототожнивши коло та правильний шестикутник [9] Рис. 1 б), не треба буде вимагати умови $V_r = E_{rr}r$ на всій поверхні верхньої та нижньої границі комірки. Достатньо буде лише щоб на бічній грані $V_r|_{r=R_1} = E_{rr}R_1$ для того, щоб деформація границі упаковки великої кількості елементарних комірок рис. б) наближалась до однорідної зі збільшенням розміру упаковки. Іншими словами виходячи з того, що при двовісній деформації площина XY буде деформуватись всебічно (а отже гексагональна упаковка не порушиться при деформуванні), доцільно здійснити мікромеханічне осереднення не в межах всього «масштабу довжини осереднення», а лише в межах «масштабу неоднорідності». З врахуванням цих міркувань, а також оскільки відповідно до симетрії $V_f(z,r,f)d\theta$, для мікромеханічного осереднення достатньо задовольнити лише наступні граничні умови на циліндричній комірниці:

$$V_r|_{r=R_1} = E_{rr}R_1; \quad V_z|_{r=R_1} = E_{zz}z; \quad V_z|_{z=0} = 0; \quad V_z|_{z=h} = E_{zz}h \quad (4)$$

Зауважимо, що ефективна поведінка композиту з таким представницьким осередком буде, взагалі кажучи, анізотропною. Але для того, щоб на базі представницької комірки анізотропного композиту, отримати ефективні властивості ізотропного пористого матеріалу, було виражено компоненти E_{rr} та E_{zz} макроскопічного тензора швидкостей деформацій при двовісній деформації (2) через перші два його інваріанти (E, Γ).

$$E = \sum_{i=1}^3 E_{ii} = E_{zz} + 2E_{rr}; \quad \Gamma = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (E_{ij} - 1/3E\delta_{ij})^2} = \sqrt{2/3} |E_{zz} - E_{rr}| \quad (5)$$

У випадку двовісних деформацій, відповідно до (5), така залежність виявляється лінійною:

$$E_{zz} = \frac{E}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \Gamma; \quad E_{rr} = \frac{E}{3} m \frac{\Gamma}{\sqrt{6}} \quad (6)$$

Відповідно граничні умови (4) набудуть вигляду:

$$V_r|_{r=R_1} = \frac{E}{3} m \frac{\Gamma}{\sqrt{6}} R_1; \quad V_z|_{r=R_1} = \frac{E}{3} m \frac{\Gamma}{\sqrt{6}} z; \quad V_z|_{z=0} = 0; \quad V_z|_{z=h} = \frac{E}{3} m \frac{\Gamma}{\sqrt{6}} h \quad (7)$$

В подальшому вважатимемо напружено-деформований стан в комірці параметрично залежним саме від двох інваріантів (E, Γ) , і здійснивши подальше мікромеханічне осереднення знайдемо залежність інваріантів (P, T) ефективного тензора напружень від (E, Γ) . Завдяки лінійності залежності (6) крива текучості в (P, T) площині буде опуклою.

Виявляється, що поле швидкостей нестисливого матеріалу твердої фази, що задовольняє граничні умови (7) та рівняння рівноваги сил має доволі простий вигляд

$$V_r = \frac{ER_1^2}{2r} - \frac{E}{6} \pm \frac{\Gamma}{\sqrt{6}} r; \quad V_z = \frac{E}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \Gamma z; \quad V_\varphi = 0 \quad (8)$$

Легко переконатись що поле швидкостей (8) задовольняє умову нестисливості

$$\frac{V_z}{z} + \frac{V_r}{r} + \frac{V_\varphi}{r} = 0 \quad (9)$$

У свою чергу статична врівноваженість поля напружень, що породжене полем швидкостей (8) пов'язана з тим, що по-перше тензорні поля напружень та швидкостей деформацій матимуть нульові недиагональні компоненти та залежатимуть тільки від координати r , тому рівняння рівноваги по осям φ та z виконуватимуться тотожно. По-друге в реологічній визначальній співвідношення для нестисливого матеріалу комірці $y_{ij} = p\delta_{ij} + \phi_0(e_{ij}/z)$; $z^2 = \sum_{k,n=1}^3 e_{kn}^2$ адитивно входить також невідомий гідростатичний тиск p , тому рівняння рівноваги по осі r у випадку поля (8) зведеться до лінійного звичайного диференціального рівняння щодо $p(r)$ вигляду $p(r) = F(r, E, \Gamma)$ з початковою умовою в точці $r = R_0$, рівності нулю напружень σ_{rr} на поверхні пори $p(R_0) = -\phi_0(e_{rr}(R_0)/z(R_0))$. Тому $p(r)$ однозначно знаходиться та врівноважує поле швидкостей (8). Втім для подальшого аналізу можна обійтись без конкретизації залежності $p(r)$.

3. Знаходження ефективно пластичної реології пористого матеріалу шляхом мікромеханічного осереднення. Поле швидкостей деформацій породжене полем швидкостей (8) матиме тільки діагональні ненульові компоненти та залежить тільки від координати r

$$e_{zz} = \frac{V_z}{z} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \Gamma + \frac{E}{3}; \quad e_{rr} = \frac{V_r}{r} = m \frac{\Gamma}{\sqrt{6}} - \frac{E}{6} - \frac{ER_1^2}{2r^2}; \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{V_\varphi}{r} = m \frac{\Gamma}{\sqrt{6}} - \frac{E}{6} + \frac{ER_1^2}{2r^2} \quad (10)$$

Тому питома дисипація енергії (вона ж дисипативний потенціал) нестисливого матеріалу комірці набуде вигляду

$$D_{meso}(r, E, \Gamma) = \phi_0 z = \phi_0 \sqrt{e_{zz}^2 + e_{rr}^2 + e_{\varphi\varphi}^2} = \phi_0 \sqrt{\frac{R_1^4 E^2}{2r^4} + \frac{E}{\sqrt{6}} \pm \Gamma}^2 \quad (11)$$

Відповідно до принципів мікромеханіки питома дисипація гетерогенного пористого матеріалу $D(E, \Gamma)$ буде середнім значенням дисипації енергії по всьому об'єму $V_0 = p R_1^2 h$ елементарної комірці, хоча фізично дисипація на мезорівні відбувається тільки в області V_1 : $R_0 < r < R_1$

$$D(E, \Gamma) = \frac{1}{V_0} \int_{V_1} D_{meso} dV = \frac{2p h}{p R_1^2 h} \int_{R_0}^{R_1} D_{meso}(r, E, \Gamma) r dr = \frac{2\phi_0}{R_1^2} \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{\frac{R_1^4 E^2}{2r^4} + \frac{E}{\sqrt{6}} \pm \Gamma}^2 r dr \quad (12)$$

Інтеграл в правій частині (12) допускає вираження в елементарних функціях, тому після низки перетворень $D(E, \Gamma)$ можна виразити в явному вигляді:

$$D(E, \Gamma) = \frac{\phi_0}{\sqrt{6}} \sqrt{B^2 + B^2} - \sqrt{I^2 B^2 + B^2} + B \ln \frac{\sqrt{I^2 B^2 + B^2} + B}{I (\sqrt{B^2 + B^2} + B)}; \quad (13)$$

$$B = E \pm \sqrt{6} \Gamma; \quad I = \sqrt{3} E; \quad I = \frac{R_0^2}{R_1^2}$$

Як і слід було очікувати геометричні параметри комірки R_0, R_1, h входять у визначальні співвідношення тільки через пористість Θ , тобто об'ємну частку порот в пористому матеріалі. З врахуванням того, що для нестисливого матеріалу матриці існує дисипативний потенціал та виконується асоційований закон пластичної течії, питома дисипація гетерогенного пористого матеріалу $D(E, \Gamma)$ також буде дисипативним потенціалом [13], тобто інваріанти (P, T) макроскопічного тензора напружень є градієнтом $D(E, \Gamma)$ [1]:

$$\Phi(E, \Gamma) = \frac{D(E, \Gamma)}{\Gamma} = \frac{\phi \sqrt{(E \pm \sqrt{6}\Gamma)^2 + 3E^2} - \sqrt{I^2 (E \pm \sqrt{6}\Gamma)^2 + 3E^2}}{|E \pm \sqrt{6}\Gamma|} \quad (14)$$

$$C(E, \Gamma) = \frac{D(E, \Gamma)}{E} = \pm \frac{\Phi(E, \Gamma)}{\sqrt{6}} + \frac{\phi}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{I^2 (E \pm \sqrt{6}\Gamma)^2 + 3E^2} + \sqrt{3}E}{I \sqrt{(E \pm \sqrt{6}\Gamma)^2 + 3E^2} + \sqrt{3}E} \quad (15)$$

Вирази для $C(E, \Gamma)$ та $\Phi(E, \Gamma)$ є однорідними (нульового порядку) функціями від (E, Γ) , тобто їх можна подати як функції від частки E/Γ :

$$C(E, \Gamma) = F_1(E/\Gamma); \quad \Phi(E, \Gamma) = F_2(E/\Gamma); \quad (16)$$

Таким чином рівняння (16) можна розглядати як параметричне задання кривої текучості пористого матеріалу в (P, T) площині. Втім криву текучості можна виразити також більш традиційно, в неявному вигляді, через функцію текучості, $\Phi(P, T) = 0$

$$\Psi(C, \Phi) = \frac{\Phi^2}{\phi} + 2I \cosh \frac{\sqrt{2} C m I / \sqrt{3} \Phi}{\phi} - I - I^2 = 0 \quad (17)$$

Поверхня текучості (17) виявилася, вельми подібною до поверхні текучості Герсона або її модифікації GTN. Що власне й не дивно, адже розв'язувалась задача подібна до роботи [10], різниця полягає тільки в параметризації мікроемеханічних граничних умов. Тобто дану роботу можна, в певному сенсі, розглядати як «ізоотропізацію» строго обґрунтованої анізотропної моделі пластичності для двовісного напружено-деформованого стану отриманої в [10]. Варто зауважити, що ізоотропна модель пластичності Герсона для сферичних пор [10], яка після феноменологічного доповнення [9] була покладена в основу моделі GTN, та набула широкого розповсюдження, вже не є настільки мікроемеханічно строго обґрунтованою, як для циліндричних пор. Тому, що для осереднення на сферичній комірниці [14] використовувалось статично незрівноважене (лише кінематично допустиме) поле швидкостей.

4. Крива текучості та особливості реології пористого матеріалу. В подальшому розглянемо випадок знаку + у виразі $(\sqrt{2} C m I / \sqrt{3} \Phi)$ з рівняння (17) як фізично більш обґрунтований для пористих або сипучих матеріалів. Як видно з (17) границя текучості на всебічний розтяг та всебічний стиск співпадають. Величина граничного тиску текучості при всебічному навантаженні $C_{max} = (\phi / \sqrt{2}) \ln(I)$ Проте крива текучості не є симетричною відносно осі Φ , тобто для схем навантаження відмінних від гідростатичного абсолютна величина напружень текучості змінюється при зміні знака навантаження, *рис. 2*.

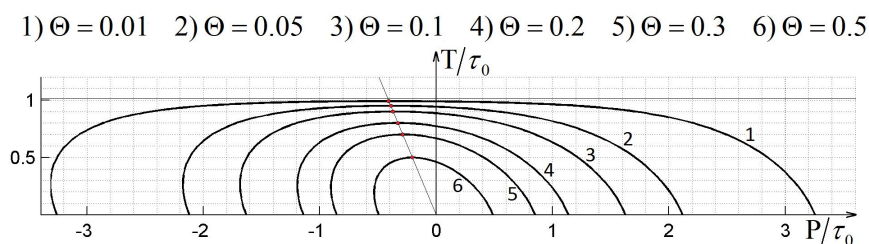


Рис. 2. Криві текучості в (P, T) площині для різних значень пористості

Тобто має місце різноопірність розтягу та стиску. Крім того найбільше значення інтенсивності дотичних напружень $\Phi_{max} = \phi(1-I)$ досягається при певній ненульовій величині середнього тиску, тобто має також місце явище дилатансії. При цьому вершини кривих текучості в яких $\Phi = \Phi_{max}$ лежать на прямій $\Phi = -\sqrt{6} C$, рис.2. Явище дилатансії при дотичних напруженнях характерно зокрема для пластичності сипучих матеріалів – зокрема пресовок з суміші порошоків металів та кераміки [15], рис.3 а). За умови асоційованого закону пластичної течії матиме місце певна зміна відносної густини, тобто «розпушення» матеріалу при чисто дотичних напруженнях, причому більш суттєвим цей ефект буде при великих пористостях. Проте асоційований закон пластичної течії не може бути коректним на певних невеличких ділянках кривої текучості де нормаль направлена вниз по осі Φ . Цей недолік, або обмеження, побудованої моделі викликаний протиріччям між анізотропним представницьким осередком та постульованою ізотропністю моделі. Хоча крива текучості в (P, T) площині є опуклою, – поверхня навантаження в просторі головних напружень, що є тілом обертання кривої текучості щодо осі P , вже не буде опуклою.

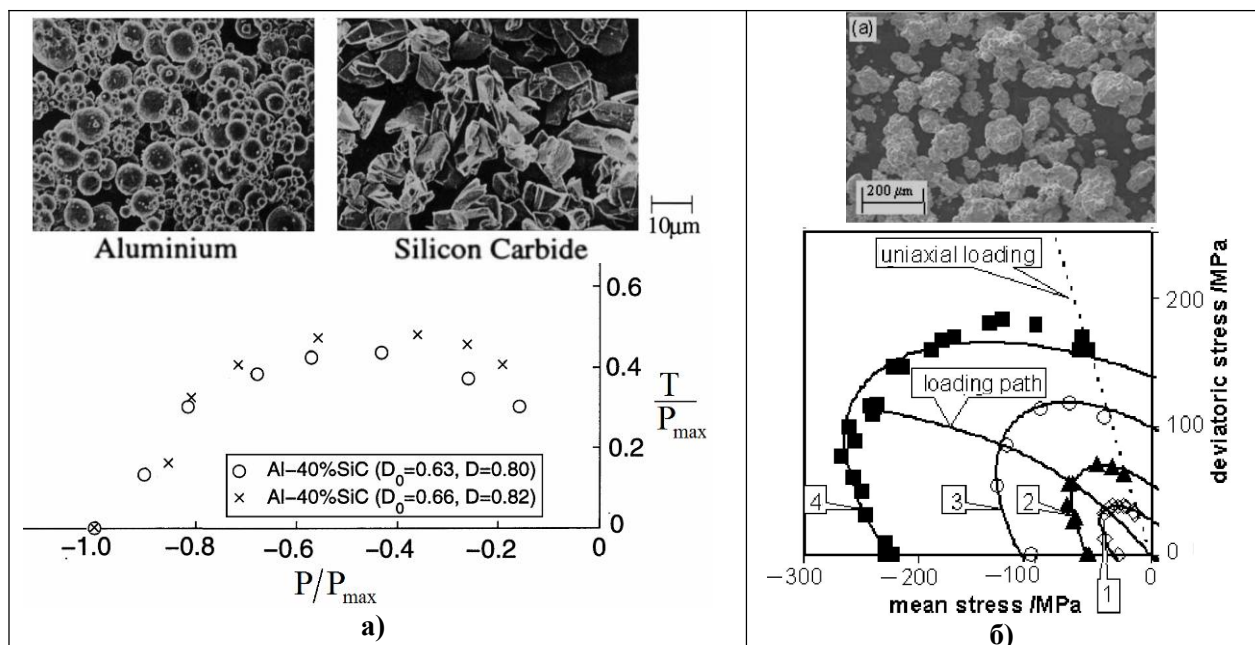


Рис. 3. Дані експериментів з визначення межі текучості для порошкових пресовок: а) з суміші алюмінію та карбїду кремнію [15], б) зі сталі [16]

З іншого боку таке зайве «загинання» контуру текучості в (C, Φ) площині, що суперечить асоційованому закону, спостерігалось в низці експериментів [16] з текучості пористих матеріалів порошкового походження, рис.3 б). Відповідно результати даної роботи з теоретичних мікромеханічних засад можуть пояснити такі результати експериментів анізотропією порової структури в досліджуваних матеріалах. Також варто зауважити, що крива текучості перетинає додатній напрямок вісі C під фіксованим, проте не прямим, кутом $\arctg(\sqrt{6})$. Подібний гострий кут контуру текучості з віссю C також прогнозується, як суто обчислювальним мікромеханічним осередненням для довільних видів деформування пористого матеріалу з ідеально-пластичним каркасом та циліндричними порами [17], так і феноменологічною «краплеподібною» кривою текучості Dimaggio – Sandler [18].

4. Висновки. Шляхом мікромеханічного осереднення на циліндричній представницькій комірці вдалося послідовними аналітичними методами побудувати криву текучості для ізотропного пористого матеріалу. Отримана крива текучості описує явища різноопірності розтягу-стиску та дилатансії, що зокрема характерні для пошкоджених або сипучих матеріалів. Також ця крива текучості відображає деякі інші, підтверджені експериментом, специфічні особливості пластичної реакції порошоків та порошкових заготовок з металів і кераміки. Зокрема такі особливості пластичної реакції, які неможливо узгодити на деяких ділянках кривої текучості з асоційованим законом пластичної течії. В подальших дослідженнях планується зробити

феноменологічне доповнення цієї теоретично отриманої моделі з метою точнішого узгодження з результатами експерименту для конкретних матеріалів.

Список використаних джерел.

1. Штерн М.Б., Сердюк Г.Г., Максименко Л.А. и др. Феноменологические теории прессования порошков. Киев: Наук. думка, 1982. 140 с
2. Штерн М.Б., Рудь В.Д. Механічні та комп'ютерні моделі консолідації гранульованих середовищ. Київ–Луцьк: Ред.-вид. відділ Луцького нац. техн. ун-ту, 2010. – 232 с.
3. Shima S., Oyane M. Plasticity theory for porous metal. *International Journal of Mech. Sciences*. 1976. Vol. 18. No. 6. P. 285–291. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(76\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0020-7403(76)90030-8).
4. Han, L.H., Elliot, J.A., Bentham, A.C., Mills, A., Amidon, G.E., and Hancock, B.C, A modified Drucker–Prager Cap model for die compaction simulation of pharmaceutical powders, *Int. J. Solids Struct.*, 2008, vol. 45, no. 10, pp. 3088–3106
5. Coube O., Riedel H. Numerical Simulation of Metal Powder Die Compaction with Special Consideration of Cracking, *Powder Metall*, 43, 2000. pp. 123-131
6. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Q. Appl. Math.*, 10, 1952, pp.157– 165.
7. Borja R.I., Lee S.R. Cam-clay plasticity, part 1: implicit integration of elasto-plastic constitutive relations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1990. 78(1). P. 49-72. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(90\)90152-C](https://doi.org/10.1016/0045-7825(90)90152-C).
8. Deshpande V.S., Fleck N.A. Isotropic Constitutive Model for Metallic Foams. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2000. No. 48. P. 1253-1283. [https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(99\)00082-4](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(99)00082-4)
9. Tvergaard V. On localization in ductile materials containing spherical voids. *Int J Fract.* 1982. V. 4. No. 18. P. 237–252. <https://doi.org/10.1007/BF00015686>.
10. Gurson A. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. Part I – yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal for Engineering Materials and Technolog.* 1977. Vol. 99. P. 2–15. <https://doi.org/10.2172/7351470>.
11. Shtern M., Cocks A.C.F. The structure of constitutive laws for the compaction of metal powders. *Recent developments in computer modeling of powder metallurgy processes*. IOS Press. 2001. P. 71 – 81.
12. Christensen R.M. *Mechanics of composite materials*. New York: Wiley-Interscience, 1979. 348 pp. <https://doi.org/10.1002/pol.1980.130181009>
13. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. Москва: Изд-во Моск. ун-та., 1984. 336 с.
14. Gurson, A. L. *Plastic Flow and Fracture Behavior of Ductile Materials Incorporating Void Nucleation, Growth, and Interaction*. PhD thesis, Division of Engineering, Brown University, Providence, R. I., 1975
15. Sridhar I and Fleck NA. Yield behaviour of cold compacted composite powders; *Acta Mater.* 2000, 48, p3341–3352. [https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(00\)00151-8](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(00)00151-8).
16. Schneider L. C. R. & Cocks A. C. F. Experimental investigation of yield behaviour of metal powder compacts; *Powder Metallurgy*, 2002, 45, p237–245.
17. P. Francescato, J. Pastor, T.-H. Thai, Étude du critère de plasticité des matériaux poreux, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série IIb* 329 (2001) 753–760.
18. DiMaggio F.L., Sandler I.S. Material model for granular soils, *J. Eng. Mech. Div., ASCE* 97, 1971, pp. 935–950.