

USING OF FRACTAL ANALYSIS METHODS IN RESEARCH OF CONDUCTIVITY OF AGRICULTURAL SOILS AND CROP YIELD**O. Brovarets¹, Yu. Chovnyuk²**¹Kyiv Cooperative Institute of Business and Law, Kyiv, Ukraine²National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine**ABSTRACT**

The study purpose is to analyze the parameters of specific conductivity of agricultural soils and crop yields. Methods of field experiment, metrological observation, fractal evaluation of statistical information are used. Consider the real time series that characterize the evolution of the parameters of the specific conductivity of the agricultural soils, the agrobiological condition of the soils of Ukraine. The Tuckens' theorem is the rationale for such studies. The chaotic nature of the dynamical system under study, as set by the time realizations, is established with the Lyapunov's exponent. The stability of the condition of the soil (relative to its specific conductivity) is estimated using the Hausdorff's fractal dimension and the fractal index. The visual estimation of the time series was carried out using the procedure for the restoration of phase trajectories. As a result of the analysis of the phase points of the phase space, a split attractor has been discovered, which makes it possible to talk about its bifurcation. As a result of the conducted studies, the annual cycle of changes in the specific electrical conductivity of the soil, and the cyclical changes in the yield of grain crops is 4–5 years. It was established that changes, in particular, climatic conditions and introduction of a system of differentiated approach to elementary areas of the field and implementation of the system of adaptation measures in relation to technologies of cultivation of agricultural crops, promote increase of specific conductivity of soil, increase of temperature in the conditions of Ukraine, increase the yield of modern hybrids of agricultural crops.

Key words:

agricultural soil,
grain crops,
fractal index,
specific conductivity,
Lyapunov index

Article history:

Received 05.09.2020

Accepted 10.11.2020

Corresponding author:

brovaretsnau@ukr.net

УДК 551.551.8

**ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛІЗУ
У ДОСЛІДЖЕННЯХ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОСТІ ҐРУНТІВ
ТА УРОЖАЙНОСТІ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ КУЛЬТУР****О.О. Броварець¹, Ю.В. Човнюк²**¹Київський кооперативний інститут бізнесу і права, Київ, Україна²Національний університет біоресурсів і природокористування
України, Київ, Україна

Ключові слова:
ґрунти сільсько-
господарського
призначення,
урожайність
сільськогосподарських
культур,
індекс фрактальності,
питома
електропровідність,
показник Ляпунова

Історія публікації:
Отримано 05.09.2020
Затверджено 10.11.2020

**Автор для
листування:**
brovaretsnau@ukr.net

АНОТАЦІЯ

У статті проаналізовані питома електропровідність ґрунтів і урожайність сільськогосподарських культур (озимої пшениці, кукурудзи тощо) на них залежно від норм посіву, норм внесення добрив та способу обробітку, а також визначенні їх класифікаційні ознаки у відповідності до фрактальних властивостей. Крім того, виявленні основні тенденції подальшого розвитку та представлені прогнози на майбутнє в агроценозах природно-кліматичних зон України. Для досягнення мети дослідження використані методи польового експерименту, метрологічного спостереження та фрактального оцінювання статистичної інформації. Запропонована процедура якісного аналізу часових рядів, для яких не підтверджується гіпотеза щодо наявності тренда (при дослідженнях питокої електропровідності ґрунтів), із застосуванням методів нелінійної динаміки, теорії хаосу. Розглянуті реальні часові ряди, що характеризують еволюцію параметрів питокої електропровідності ґрунтів та агробіологічного стану ґрунтів України. Обґрунтуванням для подібних досліджень є теорема Такенса. Хаотичність досліджуваної динамічної системи, що задана часовими реалізаціями, встановлена за допомогою показника Ляпунова. Оцінка стійкості стану ґрунтів проведена за допомогою фрактальної розмірності Хаусдорфа й індексу фрактальності.

<https://doi.org/10.36910/acm.vi45.378>

Стан питання та постановка проблеми

Дослідження довгострокових рядів агрокліматичних параметрів, параметрів урожайності сільськогосподарських культур, питомої електропровідності ґрунтів сільськогосподарського призначення (ГСП) – це важлива і актуальна проблема, розв'язанням якої є використання статистичних часових рядів даних, що містять результати спостереження вказаних вище параметрів. Саме у рядах динаміки агрокліматичних параметрів, урожайності, питомої електропровідності ГСП закодовано інформацію щодо минулого і теперішнього їх стану. Отримання цієї інформації за допомогою методу “розкодування” часових рядів є надзвичайно важливим, оскільки цю інформацію можна використовувати для прогнозування подальшої їх динаміки.

Мета дослідження полягає в обґрунтуванні методики проведення аналізу довгострокових рядів кліматичних параметрів, рядів динаміки продуктивності зернових культур (пшениці озимої та кукурудзи) залежно від системи адаптаційних заходів (добрива, обробіток) й моніторингу питомої електропровідності ГСП, визначення їх класифікаційних ознак відповідно до фрактальних властивостей, виявлення основних тенденцій подальшого розвитку та здійснення прогнозу на майбутнє.

Матеріали і методи

Статистичні часові ряди даних спостережень за основними кліматичними характеристиками представлені у науковій праці [1]. Багаторічні дослідження демонструють, що більшість динамічних процесів у природі мають фрактальну геометрію [2–5]. Фрактальність означає самоподібність [6–9], тобто за різних масштабів часовий ряд зберігає свою структуру. У науковій праці [5] зазначається, що будь-який спосіб оцінювання можливості прогнозування зміни в часі показників динамічного ряду потребує урахування фрактальних властивостей самого часового ряду. Різного роду фрактальні структури у відкритих динамічних системах зумовлюють фрактальну поведінку показників таких систем. У наукових працях [7, 8, 10, 11] представлено алгоритм визначення показника Херста, який характеризує ці властивості. Динаміка відкритих динамічних систем (ГСП є саме такою системою) відображається у вигляді часових рядів, які є основою для аналізу, моделювання та прогнозування подальшого їхнього розвитку (або можливого фізичного стану, який характеризується низкою спеціальних параметрів, наприклад, питомою електропровідністю ГСП). Якість прогнозування розвитку

таких систем залежить від того, наскільки правильно проведена оцінка системи щодо її детермінованості. Сучасний математичний інструментарій, зокрема, R/S -аналіз, запропонований Херстом [6, 7], є потужним інструментом, який дозволяє встановити “ступінь хаотичності” системи. Якщо часовий ряд виявляє довготермінову пам’ять, тобто відповідна система значною мірою є детермінованою, тоді ефективніше застосовувати метод нормативного розмаху Херста. Поставлене завдання вирішується із застосуванням методу R/S -аналізу. Цей метод дозволяє досліджувати ефекти довготривалої пам’яті в часових рядах урожайності і кліматичних параметрів [10,11], і, за певних його модифікацій, прогнозувати циклічність урожайності, кліматичних параметрів у довгострокових рядах спостережень [12, 13].

Методика статистичних обчислень представлена у наукових працях [6, 10], а алгоритм розрахунку показника Херста, що заснований на R/S -аналізі, передбачає таку послідовність. Спочатку визначається відхилення від середнього значення із урахуванням того, що: N – довжина періоду, який змінюється від 2 до “довжини часового ряду”; t – змінна, значення якої коливається від 1 до $N - 1$; MN – середнє значення N елементів; e – конкретний елемент часового ряду.

На кожній ітерації отримуємо $(N - 1)$ значень X_t . Далі відбувається нормування розмаху діленням на стандартне відхилення S , яке знаходиться за N значеннями. Логарифмуємо R/S та N і будемо на основі отриманих даних графік функції R/S у логарифмічному масштабі. На графіку функції $\ln(R/S)$ від $\ln(t)$ знаходимо нахил, використовуючи лінійну апроксимацію. Тангенс кута цього нахилу і є показником Херста, який пов’язаний із фрактальною розмірністю D кривої співвідношенням: $D = 2 - H$ (де D – фрактальна розмірність кривої).

Показник H за аналогією із узагальненим броунівським рухом може набувати значень від 0 до 1: $0 < H < 0,5$ або $1,5 < D < 2$ – антиперсистентний чи ергодичний часовий ряд (“рожевий шум”). У цьому випадку спостерігається контртрендовість, тобто схильність динамічної системи до постійної зміни тенденцій (зростання змінюється зниженням та навпаки). Зокрема, подібні явища можливі із питомою електропровідністю ГСП. Стійкість антиперсистентної поведінки ряду залежить від того, наскільки показник H є близьким до нуля. Що ближче його значення до нуля, то мінливішим або волатильним є ряд. Такий тип системи часто називають “поверненням до середнього”. Якщо $H = 0,5$ або $D = 1,5$, тоді числовий ряд абсолютно випадковий або стохастичний (“білий шум”), який характеризується відсутністю довготривалої статистичної залежності

(випадкова поведінка показника). Якщо $0,5 < H < 1$ або $1 < D < 1,5$, тоді часовий ряд персистентний (“чорний шум”). У цьому випадку спостерігається тренд, тобто збереження тенденцій до зростання чи зниження показника в минулому і в майбутньому. При цьому, чим більше значення показника, тим частіше за його зростанням настає зростання, а за зменшенням – зменшення.

Отже, відхилення значення показника Херста від 0,5 є своєрідним відображенням фрактальних властивостей процесів, які породжують часові ряди, а показник Херста пов’язаний із фрактальною розмірністю D кривої співвідношенням $D = 2 - H$. Крім використання показника Херста для аналізу тенденції ряду використовують кореляційне співвідношення, що дозволяє оцінити автокореляційний вплив попередніх значень динамічного ряду на його наступні значення та визначити майбутні тенденції $C = 2^{2H-1} - 1$ (де C – міра автокореляції; H – показник Херста [6]).

У науковій праці [14] використовуються методи фрактального аналізу для дослідження кліматичних параметрів та продуктивності зернових культур.

Передпрогнозний аналіз часових рядів методами фрактального аналізу та фазових траєкторій запропоновано у науковій праці [15]. Автори цієї наукової праці на основі досліджень, що представлені у працях [16–26], пропонують процедуру якісного аналізу часових рядів, для яких не підтверджується гіпотеза щодо наявності тренду. Ця процедура зводиться до використання методів нелінійної динаміки і теорії хаосу. Обґрунтуванням для проведення досліджень реальних часових рядів у науковій праці [15] є теорема Такенса.

Хаотичність досліджуваної динамічної системи, що задана часовими реалізаціями, встановлюється за допомогою показника Ляпунова. Оцінка стійкості стану здійснюється за допомогою фрактальної розмірності Хаусдорфа та індексу фрактальності. Візуальна оцінка часового ряду у таких випадках проводиться за допомогою процедури відновлення фазових траєкторій. У результаті проведення аналізу фазових точок фазового простору стає можливим виявити розщеплений аттрактор, що, у свою чергу, свідчить щодо бифуркації останнього.

Результати досліджень, отриманих у наукових працях [1–26], частково використані у цьому дослідженні, де аналізуються часові ряди зміни питомої електропровідності ГСП.

Результати дослідження та обговорення

Динамічні ряди зміни атмосферних опадів за п’ять років спостережень мали випадковий характер: показник $H = 0,362-0,432$,

фрактальна розмірність $\Phi P = 1,56-1,64$, коефіцієнт автокореляції часового ряду $C = -0,089-0,174$. Річні показники мають антиперсистентний характер: $H = 0,319$; $\Phi P = 1,68$; $C = -0,224$. За зимовий період ряд набуває випадкового характеру ($H = 0,410$; $H > 0,354$), тобто наближається до середнього значення, а динамічний ряд зміни кількості атмосферних опадів за рік має зростаючий (антиперсистентний) характер. Ряди динаміки за зимовий, весняний, літній та осінній періоди, а також за період вегетації мали випадковий характер. Загалом, показник Херста для рядів динаміки за п'ять років характеризується як випадковий із вірогідністю 99,7%, тобто значення змінюються відносно середнього значення (таблиця 1).

Оцінка динаміки середньодобової температури атмосферного повітря за періодами спостережень показала наявну тенденцію до її зростання (таблиця 1). Статистичні параметри зміни суми активних температур (таблиця 1) показали, що сума від'ємних температур за короткі періоди спостережень достовірно вища порівняно із спостереженнями за більш тривалі відрізки часу. За квітень – травень підтверджено достовірність зростання суми активних температур за короткі відрізки часу (критерій Стюдента $t_{кр} > 2$). За теплий період року сума активних температур достовірно перевищує середнє значення за п'ять років порівняно із спостереженнями за триваліший періоди, що свідчить про наростаючу аридизацію клімату.

Розрахунок показника Херста продемонстрував, що ряд динаміки за короткі відрізки часу – випадковий. Значення коефіцієнтів автокореляції знижуються зі скороченням періодів спостереження (таблиця 1). За показником Херста динамічні ряди питомої електропровідності ГСП за п'ять років більшою мірою тяжіли до рівня недостатнього зволоження, а також мали антиперсистентний характер. Фрактальна розмірність для них складала $\Phi P = 1,623-1,752$ ($H = 0,248-0,377$), а коефіцієнт автокореляції – $C = -(0,157-0,263)$.

Урожайність зернових культур у динамічних рядах визначилася шляхом розрахунку середніх значень за період 5 років (таблиця 2). У середньому за п'ять років рівень урожайності пшениці мав тенденцію до зниження відносно середнього рівня за більш тривалий період, але збереглася стійка тенденція до його зростання за безполицевого обробітку. Аналогічно знижувалися коефіцієнти варіації урожайності – за безполицевого обробітку до рівня 20,2–22,9%. За короткі відрізки часу (до п'яти років) відбулося істотне зростання урожайності зерна пшениці порівняно із контрольним варіантом без внесення добрив і середньою урожайністю за більш тривалі періоди. У сівозміні із горохом більший урожай отриманий за оранки (5,38–5,88 т/га), у

порівнянні із глибоким безпліцевим обробітком (5,22–5,36 т/га), та за поверхневого обробітку (5,24–5,41 т/га).

Таблиця 1 – Статистична оцінка параметрів клімату за періоди спостережень (2012 – 2017 рр.) та питомої електропровідності ГСП

Статистичні параметри	Період						Вірогідна характеристика ряду
	зима	весна	літо	осінь	вегетація	рік	
Показник Херста H	Атмосферні опади, мм						випадкова
	0,410	0,362	0,415	0,388	0,432	0,319	
	Фрактальна розмірність FR	1,59	1,64	1,59	1,61	1,56	
Коефіцієнт автокореляції ряду C	-0,117	0,174	0,111	-0,156	-0,089	-0,224	
Показник Херста H	Температура повітря, °C						випадкова
	0,412	0,375	0,388	0,403	0,416	0,401	
	Фрактальна розмірність FR	1,558	1,625	1,612	1,507	1,584	
Коефіцієнт автокореляції ряду C	-0,159	-0,159	-0,150	-0,126	0,112	0,190	

У варіантах із внесеними добривами під пшеницю коефіцієнти варіації менші та становлять для сівозміни із горохом і травами, відповідно, 21,5–25,4% і 20,6–21,4%. У середньому за п'ять років рівень урожайності пшениці має тенденцію до зниження відносно середнього рівня за тривалий період, але зберігається стійка тенденція до його зростання за безпліцевих обробітків.

За короткі відрізки часу (1–3 роки) відбувається істотне зростання урожайності зерна пшениці порівняно із контрольним варіантом без добрив і середньої урожайності за більш тривалий період (10 років). У сівозміни із горохом середня урожайність кукурудзи за тривалий період була найвищою за оранки і безпліцевого обробітку (6,32–6,38 т/га). Протягом п'яти років спостереження вона зросла на

0,80–1,50 т/га у сівозмінні із горохом і на 0,79–1,36 т/га – у сівозмінні із травами за глибоких обробітків.

Таблиця 2 – Продуктивність (т/га) сівозмін різного типу та коефіцієнти варіації продуктивності за періоди дослідження (5 років)

Сівозміна: до 60% – зернової; до 20% – зернобобової; до 20% – буряки цукрові						Сівозміна: до 60% – зернової; до 20% – буряки цукрові; до 20% – багаторічні трави					
Оранка на 20–22см	Коефіцієнт варіації, %	Безполицевий, на 20–22 см	Коефіцієнт варіації, %	Поверхневий, на 10–12 см	Коефіцієнт варіації, %	Оранка на 20–22см	Коефіцієнт варіації, %	Безполицевий, на 20–22 см	Коефіцієнт варіації, %	Поверхневий, на 10–12 см	Коефіцієнт варіації, %
Пшениця озима без внесення добрив (контрольний варіант)											
3,49	30	3,64	26	3,68	29	3,37	20	3,44	18	3,35	18
N ₆₀ P ₆₀ K ₆₀											
5,88	26	5,36	23	5,41	24	5,17	17	5,26	15	5,08	13
Кукурудза (середнє за сівозмінами) – N ₆₀ P ₆₀ K ₆₀											
8,22	24	7,79	19	7,81	22	8,41	25	7,92	26	7,77	21

Оцінка рядів динаміки зернових культур за нормованим показником Херста H для контрольного варіанта без добрив продемонструвала антиперсистентність динаміки в досліджуваних сівозмінах за безполицевого обробітку ($H < 0,354$), а за оранки і поверхневого обробітку ряди динаміки мали випадковий характер ($H > 0,354$). За внесення добрив ряди динаміки урожайності культур мали стійкий випадковий характер (як, до речі, й ряди динаміки питомої електропровідності ГСП) – $H = 0,354-0,649$.

За тривалий період досліджень (більше 10 років) ряди динаміки зернових культур були антиперсистентними ($H < 0,337$) у варіантах без внесення добрив, а за їх внесення – випадковими ($H = 0,337-0,663$).

За останні п'ять років ряди динаміки зернових культур мали випадковий характер – $H > 0,337$ (таблиця 3).

Таблиця 3 – Статистична оцінка за нормованим розмахом Херста урожайності зернових культур за період спостереження (5 років)

Внесено добрив	Оранка на 20–22 см			Безполіцейвий обробіток на 20–22см			Поверхневий обробіток на 10–12 см		
	<i>H</i>	<i>ФP</i>	<i>C</i>	<i>H</i>	<i>ФP</i>	<i>C</i>	<i>H</i>	<i>ФP</i>	<i>C</i>
Без добрив <i>A</i>	до 60% – зернової; до 20% – буряки цукрові; до 20% – багаторічні трави (2007 – 2012 рр.)								
	0,305 0,392	1,70 1,61	0,31 0,16	0,345 0,410	1,66 1,59	0,24 0,33	0,346 0,412	1,65 1,59	0,24 0,35
Без добрив <i>A</i>	до 60% – зернової; до 20% – буряки цукрові; до 20% – багаторічні трави (2013 – 2017 рр.)								
	0,441 0,432	1,56 1,57	0,08 0,09	0,403 0,491	1,61 1,51	0,14 0,01	0,383 0,475	1,62 1,53	0,18 0,04
Без добрив <i>A</i>	до 60% – зернової; до 20% – зернобобової; до 20% – буряки цукрові (2007 – 2012 рр.)								
	0,368 0,342	1,63 1,66	0,21 0,24	0,374 0,420	1,63 1,58	0,19 0,12	0,451 0,441	1,55 1,56	0,07 0,08
Без добрив <i>A</i>	до 60% – зернової; до 20% – зернобобової; до 20% – буряки цукрові (2013 – 2017 рр.)								
	0,465 0,499	1,54 1,50	0,05 0,01	0,467 0,493	1,54 1,51	0,05 0,01	0,455 0,556	1,56 1,44	0,07 0,06

Умовні позначення в таблиці: *H* – показник Херста; *ФP* – фрактальна розмірність; *C* – міра автокореляції; *A* – $N_{62}P_{62}K_{81}$. Достовірне зростання урожайності зерна кукурудзи отримано за останні 5 років за оранки – 8,22–8,41 т/га; за безполіцевого обробітку урожайність стабілізувалася на рівні 7,79–7,81 т/га. Коефіцієнти варіації (%) урожайності кукурудзи за великі проміжки часу (більше 10 років спостережень) були на рівні: за оранки – 30,5–31,0%; за безполіцевого обробітку – 29,6–29,9%; за поверхневого обробітку – вище 30%. За п'ять років спостереження коефіцієнт варіації зменшувався, але залишився у межах допустимих значень (30%).

Висновки

У результаті проведених досліджень виявлено річний цикл зміни питомої електропровідності ґрунтів сільськогосподарського призначення. Встановлено, що циклічність зміни урожайності зернових культур складає 4–5 років. Також встановлено, що зміни, зокрема, кліматичних умов та впровадження системи диференційованого підходу до елементарних ділянок поля і проведення системи адаптаційних заходів стосовно технологій вирощування сільськогосподарських культур, сприяють підвищенню питомої електропровідності ґрунтів сільськогосподарського призначення України. Крім того, підвищенням температури в умовах України спричиняє підвищення урожайності сучасних гібридів сільськогосподарських культур протягом усього періоду проведення досліджень.

Список посилань

1. Скритник, О.Я., Скритник, О.А., Ошурко, Д.О. (2013). Фрактальний аналіз часових рядів даних спостережень за температурою повітря в Україні. Гідрологія, гідрохімія і гідроекологія, 2(29), 89–95.
2. Mandelbrot, B.B. (1971). When can price be arbitrated efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale. *Models Review of Economics and Statistics*, 53(3), 225–236.
3. Mandelbrot, B. (1972). Statistical methodology for nonperiodic cycles: from the covariance to R/S analysis. *Annals of Economic and Social Measurement*, 1, 259–290.
4. Mandelbrot, B.B., Hudson, R. (2004). The (mis)behavior of markets: a fractal view of risk, ruin and reward. Basic Books, New York, 328.
5. Peters, E.E. (1994). Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics. John Wiley & Sons, Inc, 336.
6. Parzen, E. (2004). Long memory of statistical time series modeling. Texas A&M University, NBER/NSF Time Series Conference, 10.
7. Hurst, H.E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, 770–799.
8. Hurst, H.E. (1951). Long-term storage of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, 776–808.
9. Моисеев, К.Г. (2007). Применение методов подобия к физическому эксперименту. Физические, химические и климатические факторы продуктивности полей. ПИЯФ РАН, Санкт-Петербург, 72–77.
10. Найман, Э. (2009). Расчет показателя Херста с целью выявления трендовости (персистентности) финансовых рынков и макроэкономических индикаторов, 10, 25–29.
11. Лыков, И.А., Охотников, С.А. (2013). Влияние изменения функции Херста на возможности экономического прогнозирования. *Фундаментальные исследования*, 10, 1539–1544.

12. Грицюк, П.М. (2006). Дослідження циклічності природних процесів методом полігармонічного аналізу. Штучний інтелект, 2, 294–297.
13. Грицюк, П.М. (2007). Застосування R/S-аналізу для перевірки гіпотези про циклічність урожайності зернових культур. В: PDMU-2007, Крим (Новий світ), 52–54.
14. Демиденко, О.В. (2017). Фрактальний аналіз кліматичних параметрів та продуктивності зернових культур. Вісник аграрної науки, 7, 10–16.
15. Antonova, I.V., Chikina, N.A. (2018). Prepropriate analysis of time series by methods of fractal analysis and phase trajectories. Вісник Національного технічного університету “ХПІ”. Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях, 3(1279), 3–8.
16. Takens, F., Rand, D.A., Young, L.-S. (1981). Detecting strange attractors in turbulence. Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics, 898, 366–381.
17. Мун, Ф. (1990). Хаотические колебания: вводный курс для научных работников и инженеров. Мир, Москва, 312.
18. Hausdorff, F. (1919). Dimension und ausseres mass. Mathematische Annalen, 79, 157–179.
19. Федер, Е. (1991). Фракталы. Мир, Москва, 262.
20. Кроновер, Р. (2000). Фракталы и хаос в динамических системах. Постмаркет, Москва, 352.
21. Безручко, Б.П., Смирнов, Д.А. (2005). Математическое моделирование и хаотические временные ряды. ГосУНЦ “Колледж”, Саратов, 320.
22. Дубовиков, М.М., Крянев, А.В., Старченко, Н.В. (2004). Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов. Вестник РУДН, 3(1), 81–95.
23. Малинецкий, Г.Г., Потапов, А.Б., Подлазов, А.В. (2006). Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. Комкнига, Москва, 216.
24. Figliova, A., Serrano, E., Paccosi, G. (2010). About the effectiveness of different methods for the estimation of the multifractal spectrum of natural series. International Journal of Bifurcation and Chaos, 20(2), 331–339.
25. Delgniers, D., Torre, K. (2009). Fractal dynamics of human gait: a reassessment of the 1996 data of Hausdorff et al. Journal of Applied Plussiology, 106, 1279.
26. Старченко, Н.В. (2005). Локальный анализ хаотических временных рядов с помощью индекса фрактальности [Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук], Москва, 22.