

УДК 621.865.8

DOI 10.36910/10.36910/6775-2313-5352-2025-27-21

Пилипець М. І., Денисюк В. Ю.

Луцький національний технічний університет

МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДВОКООРДИНАТНИХ П'ЄЗОПРИВОДНИХ СКАНЕРІВ

У роботі представлено результати математичного моделювання динамічних характеристик двокоординатного п'єзоприводного сканера, призначеного для високоточного відтворення зображень у системах лазерного сканування та оптичного позиціонування. Запропоновано узагальнену розрахункову модель, що враховує взаємодію пружних елементів у двох площинах сканування та просторовий характер деформацій. Отримано аналітичні залежності для визначення кутів відхилення дзеркала і нижчої власної частоти системи з урахуванням геометричних та фізико-механічних параметрів елементів конструкції. Проведено чисельний аналіз впливу відносного діаметра пружного стержня на амплітуду кутових відхилень і власну частоту сканера. Показано, що максимальний кут сканування досягається при оптимальному співвідношенні діаметра та довжини пружних стержнів. Розроблена модель дозволяє виконувати оптимізацію конструктивних параметрів для підвищення ефективності двокоординатних п'єзосканерів і може бути використана при створенні мікромеханічних маніпуляторів та оптичних систем високої точності.

Ключові слова: п'єзопривод, двокоординатний сканер, біморфний елемент, математичне моделювання, кут сканування, власна частота, оптимізація.

Постановка проблеми. У сучасних оптико-механічних системах, зокрема в лазерних скануючих пристроях і високоточного позиціонування, важливою складовою є п'єзоелектричні приводи, що забезпечують мікро- та нанопереміщення з високою точністю. Проте більшість існуючих теоретичних моделей і практичних реалізацій обмежуються аналізом однокоординатних п'єзоприводів, які не відображають складних динамічних процесів, характерних для багатокоординатних систем.

У двокоординатних п'єзоприводних сканерах взаємодія кількох п'єзоелектричних елементів, пружних стержнів і жорстких елементів створює просторово-складну деформаційну схему, що істотно впливає на динамічні характеристики системи, кути сканування та власні частоти коливань.

Недостатня кількість узагальнених математичних моделей, які враховують ці фактори, ускладнює процес оптимізації геометричних і конструктивних параметрів сканерів для досягнення максимальних кутів сканування при збереженні високої частотної характеристики та компактності конструкції.

Тому актуальним завданням є побудова математичної моделі двокоординатного п'єзоприводного сканера, що описує взаємодію пружних елементів у двох площинах сканування, дозволяє оцінити динамічну поведінку системи та забезпечує можливість оптимізації її параметрів.

Проблема дослідження. Проблема досліджень полягає у визначенні впливу геометричних і фізико-механічних параметрів пружних елементів двокоординатного п'єзоприводного сканера – зокрема відношення діаметра пружного стержня до його довжини, жорсткості ресор із біморфними п'єзоелементами та типу з'єднання елементів – на амплітуду кутових відхилень дзеркала й нижчу власну частоту системи.

Для вирішення цієї проблеми необхідно розробити узагальнену математичну модель пружної системи сканера, яка б адекватно описувала її динаміку, дозволяла здійснювати аналітичне та чисельне моделювання, а також проводити оптимізацію конструктивних параметрів з метою підвищення ефективності сканування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання створення п'єзоелектричних приводів і скануючих систем є об'єктом активних наукових досліджень у галузі мікро- та наномеханіки, прецизійного приладобудування та оптоелектроніки. У сучасних публікаціях розглядаються теоретичні та експериментальні аспекти роботи п'єзоактуаторів, зокрема моделювання їх статичних і динамічних характеристик, вплив геометричних параметрів і матеріальних властивостей на точність і стабільність переміщень [1, 2]. Значна увага приділяється аналізу

однокоординатних систем на основі біморфних п'єзоелементів, які забезпечують високу точність позиціонування та компактність конструкцій [3, 4].

Розроблено низку математичних моделей, що описують поведінку п'єзоелектричних елементів у вигині, крутінні та при комбінованих навантаженнях. Ці моделі дозволяють оцінювати деформації, напружено-деформований стан та динамічну реакцію систем у різних режимах збудження. Однак переважна більшість робіт присвячена системам з однією ступенню вільності, де взаємодія між приводами не враховується або моделюється спрощено [5, 6].

У випадку двокоординатних п'єзоприводних сканерів, які забезпечують відхилення дзеркала в двох площинах, залишається недостатньо вивченим вплив взаємного зв'язку між жорсткими та гнучкими елементами конструкції. Лише окремі дослідження розглядають питання узгодження частотних характеристик двох ортогональних каналів керування, а також вплив співвідношення діаметра і довжини пружних стержнів на амплітуду кутових відхилень [7-9].

Актуальною науковою задачею є створення узагальненої математичної моделі двокоординатного п'єзоприводного сканера, яка б дозволила дослідити взаємодію елементів системи, визначити закономірності зміни кутових відхилень дзеркала залежно від конструктивних параметрів і розрахувати власні частоти пружної системи. Такі моделі є необхідними для подальшої оптимізації конструкцій сканерів, що застосовуються в системах лазерного запису та відтворення інформації, у прецизійних вимірювальних пристроях, а також в офтальмологічних візуалізаційних системах.

Метою роботи є розроблення математичної моделі двокоординатного п'єзоприводного сканера, що враховує взаємодію пружних елементів у двох площинах сканування, і дозволяє визначити кутові відхилення дзеркала та нижчу власну частоту системи залежно від геометричних і фізико-механічних параметрів елементів конструкції.

На основі моделі передбачається провести оптимізацію параметрів пружної системи для досягнення максимальних кутів сканування при фіксованій амплітуді керуючої напруги та заданих габаритах пристрою.

Викладення основного матеріалу. Для дослідження динамічних характеристик двокоординатного п'єзоприводного сканера розглянемо його узагальнену конструктивну схему, що складається з двох п'єзоелектричних приводів, розташованих взаємно перпендикулярно та з'єднаних з пружною системою, яка забезпечує просторове відхилення дзеркала.

Кожен п'єзоелектричний привід являє собою біморфний п'єзоелектричний елемент, здатний згинатися під дією прикладеної напруги, створюючи кутове переміщення у відповідній площині. Взаємодія між пружними елементами призводить до складного характеру деформації, який необхідно враховувати при побудові математичної моделі системи.

Для опису динамічної поведінки сканера приймемо низку спрощень, що не впливають суттєво на точність результатів. Зокрема, вважаємо, що деформації п'єзоелектричних елементів є малими, матеріал пружних елементів – ізотропним, а процес збудження відбувається в гармонічному режимі.

З урахуванням зазначених припущень рівняння руху системи можна подати у вигляді диференціальних залежностей, які описують зміну кутів відхилення дзеркала у функції часу та конструктивних параметрів сканера.

Для збільшення кута сканування, що еквівалентно або зменшенню габаритів пристрою, або розширенню області сканування, запропоновано конструкцію, зображену на рисунку 1. На чотирьох плоских металевих ресорах 1 встановлені п'єзокерамічні пластинки 2, які утворюють біморфний п'єзоелектричний привід (БПП). При подачі напруги пластинки згинаються і передають згинальні моменти на дзеркало 3 через пружні стержні 4, унаслідок чого дзеркало повертається в площині дії моментів.

Резонансний режим роботи п'єзоприводного сканера передбачає гармонійну залежність кута гойдання дзеркала від часу. Тому система відтворення зображення має включати елемент компенсації передачі даних, що враховує поточний кут нахилу дзеркала.

Наведена схема паралельного з'єднання чотирьох БПП забезпечує вихідній ланці – дзеркалу 3 – три ступені вільності: хитання навколо двох осей і поступальне переміщення вздовж осі. Якщо ж вихідна ланка системи зазнає підвищених механічних навантажень, жорсткість пристрою можна збільшити, ввівши паралельні ланки з БПП у кожне з чотирьох плечей трикоординатної пружної системи (рис. 1).

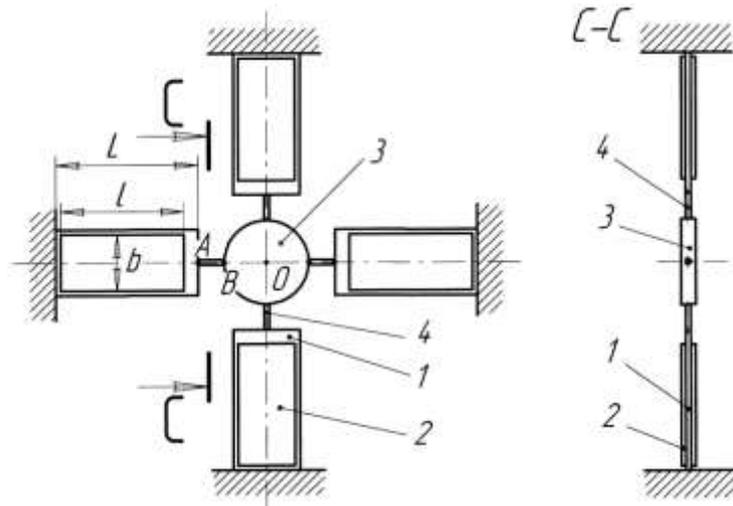


Рисунок 1 – Багатокоординатна маніпуляційна система з БПП

Основним завданням розрахунку двокоординатного скануючого пристрою є визначення залежностей кутів сканування від параметрів пружної системи та напруги, прикладеної до БПП. Крім того, здійснюється оптимізація параметрів із метою досягнення максимального кута сканування при фіксованій амплітуді напруги та сталих габаритах пристрою.

Пружна система сканера включає відносно жорсткі елементи – плоскі ресори з БПП 1 та 2 і дзеркало 3, а також відносно гнучкі елементи – пружні стержні 4. Вважаємо, що ресори з БПП мають нескінченну жорсткість на кручення, а дзеркало є абсолютно жорстким тілом. При одночасному відхиленні дзеркала в двох площинах усі чотири пружні стержні зазнають просторового (складного) вигину, при цьому напрямки векторів сил змінюються.

Для збереження постійного пружного опору зовнішнім впливам стержні повинні мати круглий поперечний переріз. Тому важливим фактором, що визначає кути повороту дзеркала, є відношення діаметра пружного стержня до його довжини. Одним із завдань моделювання є дослідження впливу цього відношення на кут повороту дзеркала.

Як розрахункову модель сканера розглядаємо статично невизначну пружну систему (рис. 2, а), що складається з однієї ресори з БПП, пружного стержня та половини дзеркала. Зовнішній вплив на неї описується еквівалентним моментом M_E , який відповідає дії напруги U , прикладеної до БПП. У точці гойдання дзеркала O діє момент опору M_0 , що виникає внаслідок скручування перпендикулярних пружних стержнів, які зв'язують п'єзоприводи з дзеркалом. Момент M_0 пропорційний куту повороту дзеркала θ_0 . Для подальшого аналізу систему доцільно розбити на дві частини, замінивши відкинуті елементи реакціями.

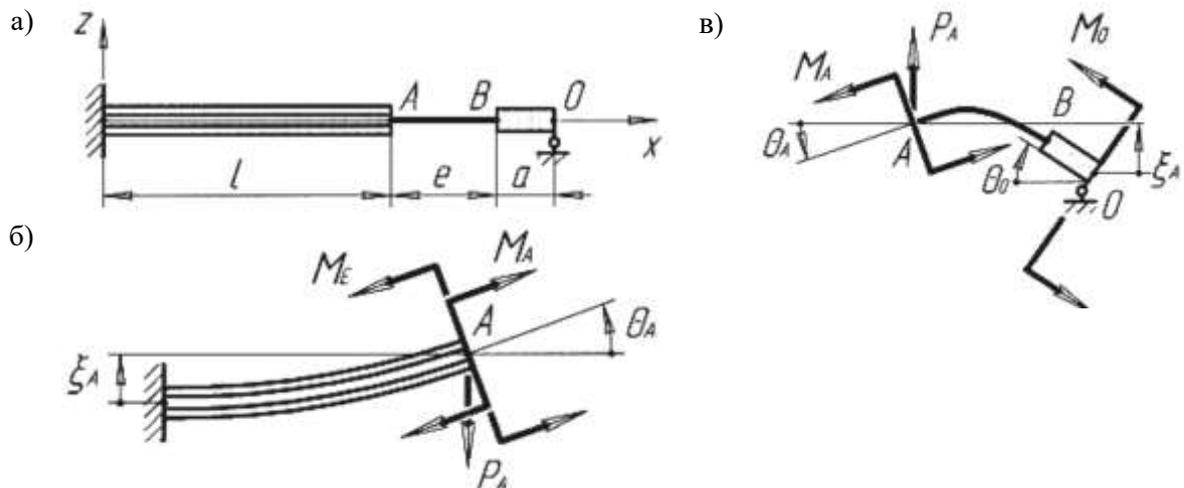


Рисунок 2 – Розрахункова схема двокоординатного сканера: а – загальна схема, б – схема ресори з БПП, в – схема половини дзеркала з пружним стержнем

Реакції, що діють уздовж осі x , не враховуємо, тому що згинальні моменти, що виникають при їх дії, вкрай незначні внаслідок малості кутів повороту перерізів (не більше 3°). При зазначеному напрямку осі x кут повороту ресори з БПП в точці А визначається за формулою (1):

$$\theta_A = (M_E - M_A)\lambda_B l - \frac{P_A}{2}\lambda_B l^2, \quad (1)$$

де λ_B – податливість перерізу БПП;

M_A і P_A – реактивний момент і реакція в точці А з боку відкинutoї частини системи.

Переміщення точки А по осі z визначається за формулою (2):

$$\xi_A = \frac{(M_E - M_A)}{2}\lambda_B l^2 - \frac{P_A}{3}\lambda_B l^3. \quad (2)$$

Для другої підсистеми, що включає пружний стержень та половину дзеркала, складемо рівняння статки (3):

$$P_A(e + a) = M_A + M_0. \quad (3)$$

Оскільки аналізу підлягає лише половина пружної системи сканера, кут повороту дзеркала визначається з виразу (4):

$$\theta_0 = -M_0 e \lambda_{ep}, \quad (4)$$

де λ_{ep} – крутильна податливість перерізу пружного стержня.

Слід зазначити, що знак « \rightarrow » у виразі (4) використано тому, що поворот дзеркала на поданій схемі відбувається за годинниковою стрілкою, тоді як позитивним напрямком вважається обертання проти годинникової стрілки. Крутильна податливість перерізу λ_{ep} пов'язана зі згинальною податливістю пружного стержня λ_e співвідношенням (5):

$$\lambda_{ep} = (1 + \mu_e)\lambda_e, \quad (5)$$

де μ_e – коефіцієнт Пуассона для матеріалу пружного стержня, так як

$$G_e = \frac{E_e}{2(1 + \mu_e)},$$

де G_e – модуль зсуву;

E_e – модуль пружності матеріалу пружного стержня.

Згинальна податливість перерізу круглого стержня визначається за формулою (6):

$$\lambda_e = \frac{64}{E_e \pi (d_e e)^4}, \quad (6)$$

де $d_e = \frac{d}{e}$, d – діаметр пружного стержня.

Враховуючи (3) і (4), отримаємо вираз (7):

$$P_A = A_0 \cdot M_A + B_0 \cdot \theta_0, \quad (7)$$

де $A_0 = (e + a)^{-1}$ і $B_0 = -[\lambda_{ep} e (e + a)]^{-1}$.

Оскільки дзеркало є абсолютно жорстким тілом, тому переміщення точки В можна визначити за формулою (8):

$$\xi_B = -a\theta_B, \quad (8)$$

причому $\theta_B = \theta_0$, а знак « \rightarrow » поставлений в (8) через те, що кут повороту негативний, а переміщення точки В позитивне.

Диференціальне рівняння зігнутої осі пружного стрижня має вигляд:

$$\theta' = \lambda_e (P_A x - M_A),$$

а з урахуванням (7), отримаємо:

$$\theta' = \lambda_e [(A_0 M_A + B_0 \theta_B) x - M_A]$$

Двічі проінтегрувавши дане рівняння, визначимо залежності кута повороту перерізу і переміщення осі пружного стержня від координати x :

$$\begin{aligned} \theta &= \lambda_e [(A_0 M_A + B_0 \theta_B) x^2 - M_A x] + C, \\ \xi &= \lambda_e \left[\frac{1}{6} (A_0 M_A + B_0 \theta_B) x^3 - \frac{1}{2} M_A x^2 \right] + Cx + D, \end{aligned}$$

де C і D – постійні інтегрування.

Постійну C знайдемо з умови $\theta(x=e) = \theta_B$:

$$C = \frac{1}{2} \lambda_e e (eA_0 - 2) M_A + \left(1 - \frac{1}{2} \lambda_e e^2 B_0\right) \theta_B,$$

постійну D знайдемо з умови $\xi(x=e) = \xi_B$ і (8):

$$D = \frac{1}{6} \lambda_e e^2 (2eA_0 - 3) M_A + \left(\frac{1}{3} \lambda_e e^3 B_0 - a - e\right) \theta_B.$$

Кут повороту перерізу в точці А ($x=0$) визначається за формулою (9):

$$\theta_A = C = -\frac{1}{2} \lambda_e e (eA_0 - 2) M_A + \left(1 - \frac{1}{2} \lambda_e e^2 B_0\right) \theta_B. \quad (9)$$

Переміщення в точці А за формулою (10):

$$\xi_A = D = \frac{1}{6} \lambda_e e^2 (2eA_0 - 3) M_A + \left(\frac{1}{3} \lambda_e e^3 B_0 - a - e\right) \theta_B. \quad (10)$$

З іншого боку, кут повороту перерізу ресори з БПП у точці А можна обчислити за формулою (1) з урахуванням виразу (7):

$$\theta_A = -\frac{1}{2} \lambda_e l \frac{2e+2a+l}{e+a} M_A + \lambda_B l M_E + \frac{1}{2} \lambda_B l^2 \frac{1}{\lambda_{ep} e(e+a)} \theta_B. \quad (11)$$

Переміщення ресори з БПП в точці А визначимо з формул (2) і (7):

$$\xi_A = \frac{1}{6} \lambda_B l^2 \frac{3e+3a+2l}{e+a} M_A + \frac{1}{2} \lambda_B l^2 M_E + \frac{1}{3} \lambda_B l^3 \frac{1}{\lambda_{ep} e(e+a)} \theta_B. \quad (12)$$

Прирівнявши кути θ_A у формулах (9) і (11) і прирівнявши переміщення ξ_A у формулах (10) і (12), отримаємо систему двох рівнянь відносно M_A і θ_B :

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \lambda_e e (eA_0 - 2) M_A + \left(1 + \frac{1}{2} \lambda_e e^2 B_0\right) \theta_B = -\frac{1}{2} \lambda_B l \frac{2e+2a+l}{e+a} M_A + \lambda_B l M_E + \frac{1}{2} \lambda_B l^2 \frac{1}{\lambda_{ep} e(e+a)} \theta_B; \\ \frac{1}{6} \lambda_e e^2 (2eA_0 - 3) M_A + \left(\frac{1}{3} \lambda_e e^3 B_0 - a - e\right) \theta_B = -\frac{1}{6} \lambda_B l^2 \frac{3e+3a+2l}{e+a} M_A + \\ + \frac{1}{2} \lambda_B l^2 M_E + \frac{1}{3} \lambda_B l^3 \frac{1}{\lambda_{ep} e(e+a)} \theta_B. \end{cases} \quad (13)$$

Розглянута система має розв'язок при $\forall d_e$ крім випадку $d_e = 0$, так як при $d_e \rightarrow 0$ пружний стержень вироджується в струну, яка не має згинальної жорсткості. Відповідно, кут повороту поперечного перерізу ресори з БПП в точці А θ_A не дорівнює куту нахилу в точці А виродженого в струну пружного стержня. Систему рівнянь (13), з урахуванням співвідношення (5), було розв'язано за допомогою символьного процесора програмного комплексу MathCad. Нижче наведено лише числові значення кута θ_B для окремого випадку ($a=0$), оскільки аналітичні вирази розв'язків системи рівнянь (13) мають надто громіздкий вигляд. Розглянутий окремий випадок ($a=0$) відповідає розрахунковій схемі сканера, зображеній на рисунку 3. Згідно з цією схемою, дзеркало 1 радіусом r_0 жорстко закріплено у точці О, яка є місцем перетину двох перпендикулярних пружних стержнів 2.

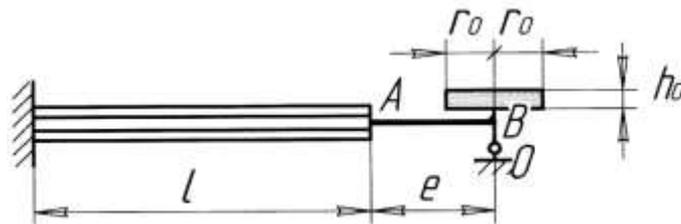


Рисунок 3 – Розрахункова схема сканера при $a=0$

Для визначення максимального кута повороту при фіксованому значенні довжини пружного стержня e проаналізуємо залежності кута повороту дзеркала θ_0 ($\theta_0 = \theta_B$) від відносного діаметра пружного стержня d_e .

Ці залежності в аналітичному вигляді представляють собою довгі математичні вирази, тому розглянемо ці функції для конкретного чисельного прикладу при наступних значеннях

параметрів: $l = 5,0 \cdot 10^{-2}$ м, $b = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м, $h_M = 0,10 \cdot 10^{-3}$ м, $h_P = 0,80 \cdot 10^{-3}$ м, $a = 0$, $E_M = 0,71 \cdot 10^{11}$ Па (дюралюміній), $E_e = 1,0 \cdot 10^{11}$ Па (олов'яно-фосфорна бронза), $\mu_e = 0,34$, $s_{11}^E = 10,7 \cdot 10^{-12}$ Па $^{-1}$, $d_{31} = 1,35 \cdot 10^{-10}$ Кл/Н, (п'єзокераміка ЦТБС-3). Розрахунки проводилися при $U = 500$ В і при трьох значеннях параметра e . На рисунку 4 наведені залежності кута повороту дзеркала θ_0 (в градусах) від відносного діаметра пружного стержня d_e ($\theta_{1_{00}}$ – при $e = 5,8 \cdot 10^{-3}$ м, $\theta_{2_{00}}$ – при $e = 10,0 \cdot 10^{-3}$ м, $\theta_{3_{00}}$ – при $e = 15,0 \cdot 10^{-3}$ м).

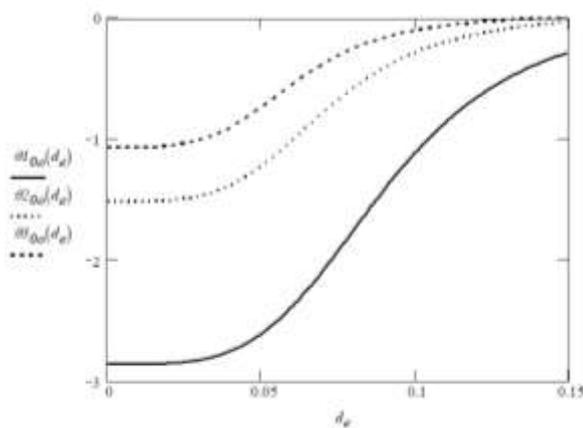


Рисунок 4 – Залежність кута повороту дзеркала θ_0 (в градусах) від відносного діаметра пружного стержня d_e . при трьох значеннях його довжини e ($\theta_{1_{00}}$ – при $e = 5,8 \cdot 10^{-3}$ м, $\theta_{2_{00}}$ – при $e = 10,0 \cdot 10^{-3}$ м, $\theta_{3_{00}}$ – при $e = 15,0 \cdot 10^{-3}$ м)

Графіки залежності показують, що максимальне значення кута повороту дзеркала теоретично досягається при $d_e = 0$, проте це неприйнятно. В діапазоні $0 \leq d_e \leq 0,05$ кут мало залежить від d_e і залишається на максимальному рівні, тому необхідно дотримуватися верхньої межі діапазону при проектуванні подібних пристроїв. Далі відбувається різке зменшення θ_0 , і практично при $d_e > 0,15$ кут $\theta_0 \cong 0$. Такий характер залежності можна пояснити тим, що в (13) параметр d_e побічно присутній в четвертій і восьмій ступенях. Таким чином, вплив цього параметра на кут повороту дуже великий. Тому при проектуванні систем з аналогічною кінематикою необхідно ретельно підбирати d_e . Негативне значення кута θ_0 у всьому діапазоні зміни аргументу (рис. 4) пояснюється тим, що поворот відбувається за годинниковою стрілкою.

Заслуговує на увагу порівняння кута θ_0 для значення $d_e = 1,0 \cdot 10^{-4}$ (наприклад, на графіку при $e = 5,0 \cdot 10^{-3}$ м кут повороту дзеркала $\theta_0 = -2,9^\circ$) з кутом повороту дзеркала аналогічної пружної системи, в якій пружний стержень в точці А має шарнірне з'єднання з ресорою з БПП (рис. 5). Для неї кут $\theta_0 = \frac{\xi_A}{e} = -0,037 = -2,1^\circ$. Порівняння показує, що кут повороту дзеркала при наявності жорсткого з'єднання з пружним стержнем малого діаметра більше на 26 % кута повороту для шарнірного з'єднання. Це пояснюється тим, що при жорсткому з'єднанні ресори з пружним стержнем в точці А він згинається по дотичній до пружної лінії ресори (на рисунку 5 вигнутий стержень показаний пунктирною лінією). Далі по осі x пружний стержень перегинається, маючи максимум переміщення ξ між точками А і В ($0 < x < e$), тому кут θ_0 буде більше кута між віссю x і прямою, що з'єднує точки А і О (як при шарнірному з'єднанні в точці А).

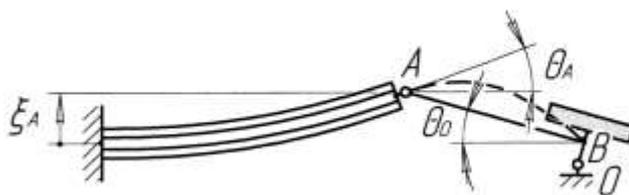


Рисунок 5 – Схема пружної системи сканера з шарніром в точці А

Отриманий в даному чисельному прикладі діапазон амплітудних значень кута від 1^0 до 3^0 задовольняє сучасним вимогам, що пред'являються до лазерних сканерів для відтворення інформації з лазерних дисків. Дана кінематична схема може бути використана для мікроманіпулятора, вихідна ланка якого має можливість крім гойдальних рухів в двох площинах здійснювати поступальний рух по осі z . Цей рух відтворюється при подачі напруги однієї полярності на всі БПП.

Для наближеного розрахунку нижчої власної частоти за методом Релея необхідно визначити максимальні потенціальну і кінетичну енергію пружної системи.

Потенціальна енергія двох ресор з БПП визначається виразом (14):

$$E_B^P = 2E_{BM}^P + 2E_{BP}^P, \quad (14)$$

де $E_{BM}^P = \frac{(M_E - M_A)\theta_A}{2}$ – потенціальна енергія деформованої ресори з БПП при дії еквівалентного моменту і реактивного моменту в точці А;

$$E_{BP}^P = -\frac{P_A \xi_A}{2} \text{ – потенціальна енергія деформованої ресори з БПП при дії реакції в точці А}$$

(знак « \leftarrow » у виразі поставлений у зв'язку з тим, що напрямок P_A протилежний напрямку переміщення ξ_A).

У формулі (14) M_A визначається з розв'язку системи (13), θ_A – з (1), P_A – з (7), а ξ_A – з (2).

Потенціальна енергія двох деформованих вигином пружних стержнів має вигляд (15):

$$E_e^P = 2(E_{eM}^P + E_{eP}^P + E_{e0}^P), \quad (15)$$

де $E_{eM}^P = \frac{M_A \theta_A}{2}$ – потенціальна енергія пружного стержня під дією реактивного моменту M_A ,

$$E_{eP}^P = -\frac{P_A \xi_A}{2} \text{ – потенціальна енергія пружного стержня під дією реакції } P_A,$$

$$E_{e0}^P = \frac{M_0 \theta_0}{2} \text{ – потенціальна енергія пружного стержня під дією реактивного моменту } M_0 \text{ (знак}$$

« \leftarrow » в виразі поставлений у зв'язку з тим, що напрямок M_0 протилежний напрямку θ_0). У формулі (15) θ_0 визначається з (13).

Потенціальна енергія пружної системи сканера дорівнює сумі енергій її частин:

$$E^P = E_B^P + E_e^P. \quad (16)$$

Кінетична енергія пружної системи визначається виразом (17):

$$E^K = E_0^K + 2E_B^K, \quad (17)$$

де $E_0^K = \frac{I_0 \bar{\theta}_0^2}{2}$ – кінетична енергія дзеркала, що коливається момент інерції якого визначається

$$\text{формулою } I_0 = \frac{m_0(h_0^2 + 3r_0^2)}{2};$$

m_0 – маса дзеркала;

$$E_B^K = \frac{33}{140} \cdot \frac{m_B \bar{\xi}_B^2}{2} \text{ – кінетична енергія консольно закріпленої ресори з БПП, яка коливається;}$$

m_B – маса ресори з БПП.

Слід зазначити, що кінетичну енергію коливних пружних стрижнів у розрахунках не враховано, оскільки їх маса на один-два порядки менша за масу інших елементів пружної системи, а швидкості руху є близькими до швидкостей цих елементів.

Враховуючи, що амплітудні швидкості визначаються виразами $\bar{\theta}_0 = \omega \theta_0$ і $\bar{\xi}_A = \omega \xi_A$ і прирівнюючи потенціальну енергію з (16) кінетичною енергією системи (14), отримаємо наближену формулу для визначення нижчої власної частоти двокоординатного сканера:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E^P}{\frac{I_0 \bar{\theta}_0^2}{2} + \frac{33}{140} \cdot \frac{m_B \bar{\xi}_B^2}{2}}}. \quad (18)$$

Результати розрахунку нижчої власної частоти за формулою (18) при зазначених вище параметрах системи і при $h_0 = 2,0 \cdot 10^{-3}$ м, $r_0 = 2,0 \cdot 10^{-3}$ м, $m_0 = 6,1 \cdot 10^{-5}$ кг (густина матеріалу дзеркала – $\rho_0 = 2,4 \cdot 10^3$ кг/м³), $m_B = 5,9 \cdot 10^{-3}$ кг представлені на рисунку 6.

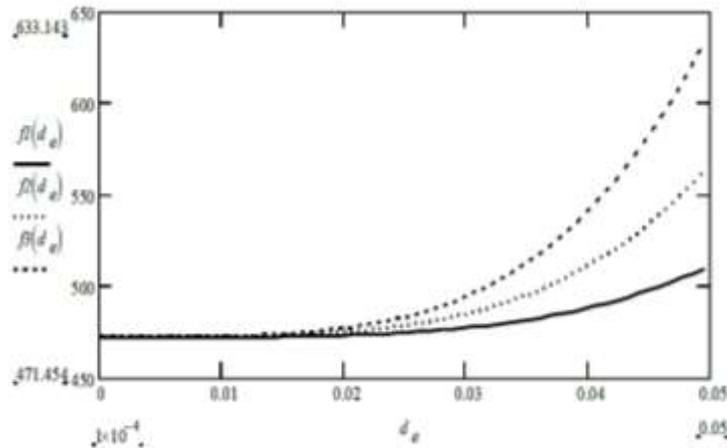


Рисунок 6 – Залежність власної частоти f (в Гц) від відносного діаметра пружного стержня d_e при трьох значеннях його довжини e (f_1 при $e = 5,0 \cdot 10^{-3}$ м, f_2 – при $e = 10,0 \cdot 10^{-3}$ м, f_3 – при $e = 15,0 \cdot 10^{-3}$ м)

Із графіків видно, що значення власних частот f_1 , f_2 , f_3 при збільшенні параметра d_e прямують до певної граничної величини (у наведеному чисельному прикладі – $f_0 = 470$ Гц). У досліджуваному діапазоні зміни d_e спостерігається плавне зростання власних частот. При подальшому збільшенні d_e відбувається різкий стрибок значень частот. При цьому виявляється певний парадоксальний ефект: за меншої довжини стержня e швидкість зростання власної частоти системи є більшою. Цей ефект пояснюється тим, що жорсткість пружного стержня пропорційна четвертому степеню d_e і лише другому степеню довжини e . Слід зазначити, що достовірність розрахунку нижчої власної частоти описаним методом зменшується зі збільшенням d_e , оскільки запропонована модель не повною мірою враховує фізичні процеси, що відбуваються в пружній системі, коли жорсткість перерізу пружних стержнів стає порівнянною із жорсткістю перерізу ресори з БПП.

Для оцінювання точності результатів порівняємо отримані значення власної частоти системи з нижчою власною частотою одиночної консольно закріпленої ресори з БПП. Її можна визначити за наближеною формулою (19):

$$f_B = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{140}{33} \cdot \frac{3}{m_B l^3 \lambda_B}}. \quad (19)$$

Підставивши в (19) зазначені вище чисельні значення параметрів ресори з БПП, отримаємо значення власної частоти $f_B = 410$ Гц. Значення відносної різниці $\frac{f_0 - f_B}{f_0} \cdot 100 = 13\%$. Таке

порівняно невелике розходження частот свідчить про те, що при $d_e \rightarrow 0$ пружний зв'язок між протилежними ресорами з БПП і дзеркалом в пружній системі сканера майже не впливає на власну частоту системи в цілому. Чисельні значення нижчих власні частот в наведеному прикладі (~ 400 Гц) дозволяє розробити ефективну конструкцію двокоординатного сканера як для візуальної системи з відтворенням зображення на сітківці ока, так і для систем запису і відтворення інформації на лазерні диски. Отримана математична модель двокоординатного сканера дозволяє наближено визначити кути сканування і нижчу власну частоту пружної системи в залежності від геометричних і фізичних параметрів елементів системи, а також знайшли їх оптимальні значення (для досягнення максимуму кута сканування).

Висновки. Розроблено математичну модель двокоординатного п'єзоприводного сканера, що враховує взаємодію пружних елементів і дозволяє визначати кутові відхилення дзеркала та нижчу власну частоту системи. Аналітичний аналіз і чисельні розрахунки показали суттєвий вплив відносного діаметра пружного стержня d_e на амплітуду кутових відхилень. Максимальне

значення кута сканування спостерігається у діапазоні $d_e = 0,05-0,1$, що визначає оптимальні геометричні параметри для проектування сканера.

Встановлено, що жорстке з'єднання ресори з пружним стержнем забезпечує збільшення кута повороту дзеркала до 26 % порівняно із шарнірним варіантом, що підтверджує доцільність використання саме такої конструктивної схеми. Нижча власна частота пружної системи визначається переважно жорсткістю пружних стержнів і для досліджених параметрів становить близько 400-470 Гц, що відповідає вимогам до лазерних сканерів високої точності.

Запропонована модель може бути застосована для оптимізації конструкцій двокоординатних п'єзосканерів у системах лазерного запису, відтворення інформації та офтальмологічних приладів, де необхідне стабільне кутове позионування з високою частотною характеристикою.

Інформаційні джерела

1. Філяшкін М. К. Мікроелектромеханічні системи: навч. посібн. Київ: НАУ, 2019. 276 с.
2. Невлюдов І. Ш., Палагін В. А. Мікросистемна техніка та нанотехнології: монографія. Київ: НАУ, 2017. 528 с.
3. Лобур М., Мельник М. Основи мікросистемних пристроїв: навч. посіб. URL: <http://cad.lp.edu.ua/project/b3.pdf> (дата звернення 06.11.2025).
4. Теслюк В. М., Кривий Р. З., Мельник М. Р. Автоматизація проектування МЕМС з використанням системи COMSOL: навч. посіб. Львів: Львівська політехніка, 2016. 216 с.
5. Боровий М. О., Куницький Ю. А., Каленик О. О., Овсієнко І. В., Цареградська Т. Л. Наноматеріали, нанотехнології, нанопристрої: навч. посіб. Київ: Інтерсервіс, 2015. 350 с.
6. Денисюк В. Ю. Методика розрахунку і проектування актюаторів дискретної дії. «Перспективні технології та прилади»: зб. статей. Луцьк, 2024. Вип. 25. С. 53-58. <https://doi.org/10.36910/10.36910/6775-2313-5352-2024-25-08>
7. Діденко Ю. В., Татарчук Д. Д. Основи технології виготовлення елементів мікро- та наносистемної техніки: навч. посіб. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 113 с.
8. Денисюк В. Ю., Пташенчук В. В. Методика проектування високоточних оптико-електронних приладів для безконтактного автоматичного вимірювання лінійних переміщень. «Перспективні технології та прилади»: зб. статей. Луцьк, 2023. Вип. 23. С. 22-28. <https://doi.org/10.36910/10.36910/6775-2313-5352-2023-23-04>
9. Денисюк В. Ю. Система автоматичного регулювання прецизійного переміщення сканера скануючого зондового мікроскопа. «Перспективні технології та прилади»: зб. статей. Луцьк, 2021. Вип. 19. С. 44-48. <https://doi.org/10.36910/6775-2313-5352-2021-19-7>

Pylypets M., Denysiuk V.

Lutsk National Technical University

MODELING OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF TWO-COORDINATE PIEZO-ACTUATED SCANNERS

The paper presents the results of mathematical modeling of the dynamic characteristics of a two-coordinate piezoelectric scanner designed for high-precision image reproduction in laser scanning and optical positioning systems. A generalized computational model is proposed that takes into account the interaction of elastic elements in two scanning planes and the spatial nature of deformations. Analytical dependencies are obtained for determining the angles of deflection of the mirror and the lowest natural frequency of the system, taking into account the geometric and physical-mechanical parameters of the structural elements. A numerical analysis of the influence of the relative diameter of the elastic rod on the amplitude of angular deviations and the natural frequency of the scanner is performed. It is shown that the maximum scanning angle is achieved at the optimal ratio of the diameter and length of the elastic rods. The developed model allows optimization of design parameters to increase the efficiency of two-axis piezoscanners and can be used in the creation of micromechanical manipulators and high-precision optical systems.

Keywords: piezoactuator, two-axis scanner, bimorphic element, mathematical modeling, scanning angle, natural frequency, optimization.

Дата першого надходження
статті до видання
11.10.2025 р

Дата прийняття статті
до друку
15.11.2025 р.

Дата
оприлюднення
25.12.2025 р.