

УДК 629.114.2 DOI 10.36910/6775-2313-5352-2021-19-11

<sup>1</sup>Є.І. Калінін, <sup>2</sup>А.І. Коробко, <sup>3</sup>В.Є. Шатіхіна

<sup>1</sup>Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

<sup>2</sup>Український науково-дослідний інститут прогнозування і випробування техніки і технологій для сільськогосподарського виробництва імені Леоніда Погорілого, Харківська філія

<sup>3</sup>Харківський національний автомобільно-дорожній університет

## КІЛЬКІСНА ОЦІНКА ВТРАТИ АДЕКВАТНОСТІ ПРИ ФОРМУВАННІ МОДЕЛІ ВИПРОБУВАНЬ

**Анотація.** Основною метою роботи є синтез кількісної оцінки втрат адекватності під час використання немодельного впливу в випробуваннях систем. В ході досліджень встановлено, що міра неадекватності опису системи при класичному модельному експерименті була б обчислена як математична міра віддалення векторів величин самої системи і її опису, тобто міра неадекватності опису є число. Використання міри, таким чином, вводить в множину допустимих впливів відношення переваги. При цьому, як можна простежити, враховуються динамічні властивості досліджуваної системи, характер модельного (нездійсненого) впливу, обмежене призначення математичної моделі і, нарешті, обмежені можливості випробувального устаткування. У загальному випадку пошук являє собою варіаційну задачу, в найпростішому випадку – дослідження функції на екстремум.

**Ключові слова:** динамічні випробування, система, вплив, варіаційна задача, пошук.

**Вступ.** Відомо декілька методів раціоналізації експерименту. Основним методом є теорія подібності, що дозволяє вивчати явище в змінених масштабах, що в кінцевому підсумку здешевлює експеримент. Платою за вигоду буває втрата адекватності умов в експерименті відносно природи. Причина втрати адекватності криється в обмеженості апріорних математичних моделей, спираючись на які, застосовують теорію подібності. Оцінка втрати адекватності при переході від природи до експерименту в даний час у величезній більшості випадків не проводиться, хоча повсюдно велика увага приділяється масштабам подібності, якими, власне, і займається класична теорія подібності. Такий стан може бути пояснено частково тим, що оцінка втрати адекватності виходить за рамки теорії подібності і відноситься до імітації. Теорія імітації, на нашу думку, ще не оформилася у вигляді більш-менш самостійного розділу науки, проте роботи, зміст яких може бути витлумачено як спроби кількісно оцінити втрати адекватності при відхиленнях від вимог теорії подібності, з'являються як у вітчизняній, так і в закордонній науковій літературі. Потік таких робіт швидко зростає, особливо останні роки. Цей факт говорить про те, що повсюдно зростає потреба доводити немодельний експеримент як допустимий прийом досліджень, якщо проведена кількісна оцінка втрати адекватності. Простий аналіз практики моделювання призводить до висновку про те, що завжди порушуються умови, які передбачені теорією подібності, і, таким чином, теорія подібності завжди виливається в практику імітації.

Відомі роботи, де обговорюються питання формування збурень для ідентифікації систем. Завдання ідентифікації ширше завдання випробувань, і тому в роботах з ідентифікації обговорюється і питання, що розглядається. Серед таких робіт слід згадати [1], де розглянуто вибір вхідного сигналу для ідентифікації вектору параметрів, що лінійно входить в вагову функцію системи, або для уточнення за параметрами наближено відомої вагової функції. У даній роботі завдання розглянуте в статистичній постановці, і на вибір вхідного сигналу обмеження не накладаються. В роботі [2] вхідні впливи на системи оцінюються за погрешностями ідентифікації при наявності перешкод. У цьому сенсі різні сигнали виявляються суттєво нерівноцінними, що дозволяє автору шукати оптимальну послідовність випробувальних впливів. Результати [2] виявляють можливість будувати оптимальну стратегію ідентифікації в умовах імітації. Однак в [2] не враховується зовсім натуральний вплив, що робить задачу ідентифікації надмірно широкою для випробувань в умовах імітації.

Серед інших робіт, де вивчається відмінність у вхідних випробувальних сигналах, можна вказати [3, 4, 5, 6].

Зупинимось на спробі кількісно оцінити втрату адекватності при використанні немодельного впливу в випробуваннях систем. Необхідність в такій оцінці особливо потрібна при широкому застосуванні випробувальних стендів, нездатних відтворити модельний вплив, але таких, що відтворюють вплив з деякого певного сімейства. Широко поширені, наприклад, гальмівні стенди для оцінки тягово-динамічних характеристик тракторів, де безліч стандартних впливів не включає в себе модельний вплив. В цьому випадку потрібно серед допустимих впливів вибрати такий (такі), яке забезпечить мінімальну (з можливих) втрату адекватності.

**Метою статті** є спроба по-іншому формалізувати задачу вибору впливів і намітити шляхи її розв'язку. В основі наших побудов використовуються поняття функціонального моделювання. Нехай  $A_0$  – апріорна математична модель випробуваної системи. Ця модель відома до експерименту і має вигляд оператора  $A_0$ , який зв'язує вектор  $x$  впливів і вектор реакції (траєкторії)  $y$  системи, тобто:  $A_0(y)=x$  або  $y = A_0^{-1}(x)$ .

**Результати дослідження.** Метою будь-яких випробувань є експериментальне визначення ступеня (міри) неадекватності моделі  $A_0$  і натуральної системи  $A$ .

Крім математичної моделі (1), введемо перелік розрахункових параметрів  $\varphi_i(y), i = \overline{1, n}$ . Нехай ці параметри цікавлять дослідника в першу чергу; вони розраховуються на базі математичної моделі  $A_0$  і вони ж будуть спостерігатися в експерименті. Прикладами можуть служити максимуми показників елементів системи або інтеграли від них. З математичної точки зору  $\varphi_i$  є функціоналами, що визначені на траєкторіях системи. За змістом введення функціоналів  $\varphi_i$  ясно, що міру неадекватності тих чи інших умов слід визначати, порівнюючи вектори  $\varphi_i = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ , що обчислені в цих умовах. Нехай, далі  $U$ , є множиною допустимих (стендових) впливів і  $u \in U$ . Будемо вважати, що математична модель  $u(t)$  стендового впливу досить точна. Натурний (або модельний) вплив задається досить точною математичною моделлю  $v(t)$  ( $t$  – час). Однак, згідно з метою нашого завдання,  $v(t) \notin U$ , тобто подобу впливів в експерименті не може бути досягнуто. Необхідна імітація.

Якщо  $A_0$  – є математична модель системи, то  $y(A_0, v)$  – математична модель траєкторії системи при модельному впливі  $v(t)$ . При цьому, передбачені значення параметрів  $\varphi_i$  позначимо як  $\varphi_i(y(A_0, v))$ , а весь вектор  $\varphi$  як  $\varphi(y(A_0, v))$ . Для стислості запишемо цей вектор як  $\varphi(A_0, v)$ . Отже,  $\varphi(A_0, v)$  є математичною моделлю вектору  $\varphi(A, v)$ , отриманого в експерименті з реальною системою  $A$  (або з її моделлю) і з модельним впливом  $v(t)$ . Таким чином, міра неадекватності опису  $A_0$  системи  $A$  при класичному модельному експерименті була б обчислена як математична міра  $\rho$  віддалення векторів  $\varphi(A, v)$  і  $\varphi(A_0, v)$ , тобто міра неадекватності опису  $A_0$  є число  $\rho(\varphi(A, v), \varphi(A_0, v))$ .

Часто вживаються, наприклад, міри:

$$\begin{aligned} \rho_1^2(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) &= \sum_{i=1}^{i=n} (\varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(2)})^2; \\ \rho_2(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) &= \sum_{i=1}^{i=n} |\varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(2)}|; \\ \rho_3(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) &= \max_i \{|\varphi_i^{(1)} - \varphi_i^{(2)}|\}. \end{aligned} \quad (1)$$

При наших обмеженнях в експерименті можна спостерігати тільки вектори  $\varphi(A, u)$  і  $u \in U$ . Природно, що порівнювати ці вектори для обчислення міри неадекватності можна тільки з векторами  $\varphi(A_0, u)$ . Отже, математично задача найкращої імітації в даному випадку зводиться до найкращої апроксимації величини  $\rho(\varphi(A, v), \varphi(A_0, v))$ , що не спостерігається, величиною  $\rho(\varphi(A, u), \varphi(A_0, u))$ .

З «нерівності трикутника» для міри  $\rho$  в просторі векторів  $\varphi$  отримуємо оцінку

$$|\rho(\varphi(A, v), \varphi(A_0, v)) - \rho(\varphi(A, u), \varphi(A_0, u))| \leq \rho(\varphi(A_0, v), \varphi(A_0, u)) + \rho(\varphi(A, v), \varphi(A, u)). \quad (2)$$

У правій частині (2) стоять міри неадекватності впливів  $u(t)$  і  $v(t)$ , що обчислені за  $A_0$  і за  $A$  відповідно. Припустимо, що, починаючи з деякого рівня близькості  $A_0$  до  $A$ , обидва доданки у правій частині оцінки (2) мають властивість:

$$[\rho(\varphi(A_0, v), \varphi(A_0, u_1)) - \rho(\varphi(A_0, v), \varphi(A_0, u_2))] \times \\ \times [\rho(\varphi(A, v), \varphi(A, u_1)) - \rho(\varphi(A, v), \varphi(A, u_2))] \geq 0 \quad (3)$$

де  $u_1, u_2 \in U$ .

В цьому випадку з (3) випливає, що оцінка (2) на множині  $U$  допустимих (стендових) впливів може бути поліпшена, якщо в якості  $u(t)$  застосувати вплив  $u^*(t) \in U$ , що визначається за ознакою

$$\rho(\varphi(A_0, v), \varphi(A_0, u^*)) \equiv \min_{u \in U} \rho(\varphi(A_0, v), \varphi(A_0, u)). \quad (4)$$

Визначення (4) найкращого випробувального впливу є коректним, якщо існує мінімум. Ясно, що для технічних цілей можна замість ознаки (4) застосовувати метод послідовних наближень, де  $u^*(t)$  замінюється на  $u_{i+1}(t)$ , де  $u_{i+1}(t)$  має лише властивість виду:

$$\rho(\varphi(A_0, v), \varphi(A_0, u_{i+1})) < \min_i \{\rho(\varphi(A_0, v), T(A_0, u_i))\}. \quad (5)$$

Використання міри  $\rho$ , таким чином, вводить в множину допустимих впливів  $U$  відношення переваги. При цьому, як можна простежити, враховуються динамічні властивості досліджуваної системи, характер модельного (нездійсненого) впливу, обмежене призначення математичної моделі ( $\varphi$ ) і, нарешті, обмежені можливості випробувального устаткування.

У загальному випадку пошук  $u^*(t)$  за залежністю (4) являє собою варіаційну задачу, в найпростішому випадку – дослідження функції на екстремум. Розглянемо найпростіший приклад.

Нехай система  $A$  і модельний вплив  $v(t)$  задаються лівою і правою частинами рівняння

$$\dot{x} + kx = 2pt, \quad x(0) = 0. \quad (6)$$

Тоді розв'язок  $x(t)$  рівняння (6) відповідає траєкторії системи при ідеальних модельних випробуваннях. Нехай для простоти прикладу вектор-функціонал  $\varphi$  має тільки одну компоненту, наприклад,  $\varphi(A, v) = \int_0^T x(t) dt, T > 1$ .

В якості математичної моделі системи  $A$  взято найпростіше рівняння  $\dot{y} = u(t)$ ,  $y(0) = 0$ , а можливості випробувального устаткування нехай обмежені тим, що вплив має вигляд «функції включення»  $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ a, & t \geq 0. \end{cases}$

Множина  $U$  задається обмеженнями виду:

$$B_1 \leq a \leq B_2, \quad B_1 = pT, \quad B_2 = 2pT. \quad (7)$$

Тому  $\varphi(A_0, u)$  обчислюється на траєкторіях  $y = at, B_1 \leq a \leq B_2$ . В умовах нашого елементарного прикладу легко випишуються в явному вигляді всі функціонали:

$$\varphi(A, v) = \frac{2p}{k^2} \left( \frac{kT^2}{2} - T + \frac{1 - \exp(-kT)}{k} \right); \quad (8)$$

$$\varphi(A_0, u) = \frac{aT^2}{2}; \quad (9)$$

$$\varphi(A_0, v) = \frac{pT^3}{3}; \quad (10)$$

$$\varphi(A, u) = \frac{a}{k} \left( T - \frac{1 - \exp(-kT)}{k} \right). \quad (11)$$

Нехай мірою неадекватності є міра  $\rho_1$  (в нашому випадку  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ ), тобто:

$$\rho(\varphi^1, \varphi^{(2)}) \equiv |\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}|. \quad (12)$$

Для пошуку випробувального впливу  $u^*$  мінімізуємо міру (12)  $\rho(\varphi(A_0, u), \varphi(A_0, v))$  за  $a$  з обмеженнями (7), (9) і (10) отримуємо:

$$\rho(\varphi(A_0, u), \varphi(A_0, v)) = T^2 \left| \frac{a}{2} - \frac{p}{3} \right|, \quad a^* = pT. \quad (13)$$

Таким чином, в рекомендованому експерименті буде спостерігатися функціонал

$$\varphi(A, u^*) = \frac{pT}{k} \left( 1 - \frac{1 - \exp(-kT)}{k} \right), \quad (14)$$

в той час як передбачено буде значення:

$$\varphi(A_0, u^*) = \frac{pT^3}{2}. \quad (15)$$

Отже, при рекомендованій імітації міра неадекватності, що отримана експериментально, дорівнює числу

$$\rho(\varphi(A_0, u^*), \varphi(A, u^*)) = pT \left| \frac{T^2}{2} - \frac{1}{k} \left( T - \frac{1 - \exp(-kT)}{k} \right) \right|, \quad (16)$$

в той час, як справжня міра неадекватності моделі  $A_0$  дорівнює

$$\rho(\varphi(A_0, v), \varphi(A, v)) = p \left| \frac{T^3}{3} - \frac{2}{k^2} \left( \frac{kT^3}{2} - T + \frac{1 - \exp(-kT)}{k} \right) \right|. \quad (17)$$

За некерованої імітації вимірюється міра невідповідності у вигляді:

$$\rho(\varphi(A_0, u), \varphi(A, u)) = a \left| \frac{T^2}{2} - \frac{1}{k} \left( T - \frac{1 - \exp(-kT)}{k} \right) \right|, \quad B_1 \leq a \leq B_2. \quad (18)$$

#### Висновки:

В ході досліджень встановлено, що міра неадекватності опису системи при класичному модельному експерименті була б обчислена як математична міра віддалення векторів величин самої системи і її опису, тобто міра неадекватності опису є число. Використання міри, таким чином, вводить в множину допустимих впливів відношення переваги. При цьому, як можна простежити, враховуються динамічні властивості досліджуваної системи, характер модельного (нездійсненого) впливу, обмежене призначення математичної моделі і, нарешті, обмежені можливості випробувального устаткування. У загальному випадку пошук являє собою варіаційну задачу, в найпростішому випадку – дослідження функції на екстремум.

#### Список використаних джерел

1. Купрюхин Д.Г. (2008) Анализ надежности (безотказности) отечественных и зарубежных тракторов. М. : ООО «Столичная типография, 96 с
2. Лихачев В.С. (1974) Испытания тракторов: Учеб. пособие для вузов. М. : Машиностроение, 288 с.
3. Калінін Є. І. (2016) Вплив обертання елементів трансмісії як пружної системи на власні коливання. Інженерія природокористування. 24-28
4. Хабардин В.Н. (2009) Определение эффективной мощности двигателя при испытании трактора в тяговом режиме движения с места. Вестник КрасГАУ. 12. 176-179
5. Лебедев А.Т., Калінін Є.І., Шуляк М.Л., & Колеснік І.В. (2016) Аналітична модель повороту трактора з шарнірно-зчленованою рамою. Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка. 173. 161-167.
6. Ovsyannikov S., Kalinin E., & Kolesnik I. (2018) Oscillation process of multi-support machine when driving over irregularities. Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport. 307-317. doi: 10.1007/978-3-030-19756-8\_28.

<sup>1</sup>Е.И. Калинин, <sup>2</sup>А.И. Коробко, <sup>3</sup>В.Е. Шатихина

<sup>1</sup>Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

<sup>2</sup>Украинский научно-исследовательский институт прогнозирования и испытаний техники и технологий для сельскохозяйственного производства имени Леонида Погорелого, Харьковский филиал

<sup>3</sup>Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет

## КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ПОТЕРИ АДЕКВАТНОСТИ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ МОДЕЛИ ИСПЫТАНИЙ

*Основной целью работы является синтез количественной оценки потерь адекватности при использовании немодельного влияния в испытаниях систем. В ходе исследований установлено, что мера неадекватности описания системы при классическом модельном эксперименте была бы вычислена как математическая мера удаления векторов величин самой системы и ее описания, то есть мера неадекватности описания является числом. Использование меры, таким образом, вводит в множество допустимых воздействий отношение преимуществ. При этом, как можно проследить, учитываются динамические свойства исследуемой системы, характер модельного (невыполнимого) воздействия, ограниченное назначение математической модели и, наконец, ограниченные возможности испытательного оборудования. В общем случае поиск представляет собой вариационную задачу, в простейшем случае – исследование функции на экстремум.*

**Ключевые слова:** динамические испытания, система, влияние, вариационная задача, поиск

<sup>1</sup>Е. Kalinin, <sup>2</sup>А. Korobko, <sup>3</sup>В. Shatihina

<sup>1</sup>National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"

<sup>2</sup>"Leonid Pogorilyy Ukrainian Scientific Research Institute of Forecasting and Testing of Machinery and Technologies for Agricultural Production", Kharkiv branch

<sup>3</sup>Kharkiv national automobile and highway University

### QUANTITATIVE MEASURE OF LOSS OF ADEQUACY DURING TEST MODEL FORMATION

*The main purpose of the work is to synthesize a quantitative assessment of the loss of adequacy when using non-model influence in testing systems. In the course of the research, it was found that the measure of the inadequacy of the description of the system in a classical model experiment would be calculated as a mathematical measure of the removal of the vectors of the values of the system itself and its description, that is, the measure of inadequacy of the description is a number. The use of the measure thus introduces an advantage relation into the set of permissible influences. In this case, as can be traced, the dynamic properties of the system under study, the nature of the model (unfeasible) impact, the limited purpose of the mathematical model and, finally, the limited capabilities of the test equipment are taken into account. In the general case, the search is a variation problem, in the simplest case - the study of a function for an extremum.*

**Keywords:** dynamic tests, system, influence, variational problem, search.

#### Literatura

1. Kuprjuhin D.G. (2008) Analiz nadezhnosti (bezotkaznosti) otechestvennyh i zarubezhnyh traktorov. M. : ООО «Stolichnaja tipografija, 96 s
2. Lihachev V.S. (1974) Ispytanija traktorov: Ucheb. posobie dlja vuzov. M. : Mashinostroenie, 288 s.
3. Kalinin Є. І. (2016) Vpliv obertannja elementiv transmisii jak pruzhnoї sistemi na vlasni kolivannja. Inzhenerija prirodokoristuvannja. 24-28
4. Habardin V.N. (2009) Opredelenie jeffektivnoj moshhnosti dvigatelja pri ispytanii traktora v tjavovom rezhime dvizhenija s mesta. Vestnik KrasGAU. 12. 176-179
5. Lebedev A.T., Kalinin Є.I., Shuljak M.L., & Kolesnik I.V. (2016) Analitichna model' povorotu traktora z sharnirno-zchlenovanoju ramoju. Visnik Harkivs'kogo nacional'nogo tehničnogo universitetu sil'skogo gospodarstva imeni Petra Vasilenka. 173. 161-167.
6. Ovsyannikov S., Kalinin E., & Kolesnik I. (2018) Oscillation process of multi-support machine swhen driving overir regularities. Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport. 307-317. doi: 10.1007/978-3-030-19756-8\_28.

Стаття надійшла в редакцію 11.11.2021 р.