УДК 532.61

Боднар Р.Т., к.т.н.
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газ

ДОСЛІДЖЕННЯ МОДЕЛЕЙ ВИЗНАЧЕННЯ ОБ’ЄМУ РІДИНИ В НАХИЛЕНИХ РЕЗЕРВУАРАХ

Анотація. *В роботі проведено аналіз існуючих методів та засобів визначення об’єму рідини в резервуарах. Встановлено, що в основному всі публікації стосуються тільки резервуарів з горизонтальною основою і вертикальними стінками. Для врахування непоодиноких випадків негоризонтального розміщення основи резервуара встановлено найбільш ймовірні варіанти їх встановлення враховуючи їхню геометричну форму.*

Виходячи із канонічних формул для обчислення об’ємів тіл різної геометричної форми (прямокутна призма, круговий циліндр, еліптичний циліндр) і, використовуючи методи аналітичної геометрії, вищої алгебри та інтегрального числення, виведено аналітичні моделі для визначення об’єму рідин в нахилених відносно горизонтальної площини резервуарах вищевказаних геометричних форм. Вимірюваними параметрами є кути нахилу резервуарів в ортогональних площинах відносно горизонтальної площини та відстань по вертикалі від центра горловини резервуара до поверхні рідини. Відомими параметрами вважаються форма та геометричні розміри резервуарів. Для визначення об’ємів нахилених резервуарів типу круговий циліндр і прямокутна призма, нахилена відносно одного ребра основи, отримано відносно прості вирази. Для обчислення об’єму рідини в інших резервуарах за отриманими виразами рекомендовано використовувати методи обчислювальної математики.

Ключові слова: *об’єм рідини, форма резервуару, нахилені резервуари, рівень рідини, кут нахилу.*

Актуальність задачі. Збереження енергоресурсів є досить актуальним в нашій країні. В цю проблему входить і питання точного обліку кількості рідин,зокрема, нафти і нафтопродуктів. При транспортуванні і зберіганні рідин, особливо нафтопродуктів, виникає проблема контролю кількості рідини в резервуарах. Встановлюються такі резервуари переважно з горизонтальним розміщенням основи. Визначення кількості рідини в таких резервуарах в даний час є достатньо опрацьованим і не становить ніяких проблем. Але на практиці часто зустрічаються випадки відхилення від горизонтального розміщення, що може призвести до неправильного контролю кількості рідини і до значних економічних втрат для підприємства.

Постановка проблеми. Термін служби стаціонарних резервуарів становить від 10 до 50 років. За цей час, внаслідок руху ґрунтів, відбувається нерівномірне просідання резервуарів. Ще одним досить суттєвим фактором є недотримання правил встановлення резервуарів, що може спричинити зміну положення резервуару в процесі його експлуатації, внаслідок значного збільшення його маси, а також ряду інших факторів.

Коли днище резервуара знаходиться в негоризонтальному положенні практикам важко встановити точну кількість рідини в резервуарах. Особливо актуальною проблема контролю об’єму рідини в нахилених резервуарах є в Україні, так як більшість резервуарів на українських підприємствах експлуатуються досить довго.

Навіть незначне відхилення осі резервуара від вертикального чи горизонтального положення призводить до значного зростання похибки вимірювання кількості рідини. Тому слід визначати об’єм рідини методом, який враховує просторову орієнтацію резервуарів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Основним параметром, який необхідно знати для визначення кількості рідини в ємностях є значення рівня рідини в резервуарі, і, звичайно, розміри та геометрична форма самого резервуару. Для визначення рівня рідини можна використовуючи будь-який рівнемір: вмонтований чи переносний.

Тепер у світі існує досить багато засобів для контролю рівня та визначення об’єму рідини в резервуарах. Найпоширенішими з них є. візуальні (за допомогою водомірного скла); гідростатичні, в яких рівень визначають за значенням тиску рідини на дно резервуара з наступним вимірюванням різниці даного тиску та атмосферного за допомогою диференціального манометра; електромеханічні та механічні, зокрема поплавкові та буйкові;

електричні, в яких рівень перетворюється в зміну електричного опору (кондуктометричні) або в зміну ємності (ємнісні), безконтактні (оптичні) [1–3].

Але в усіх розглянутих способах і засобах розглядаються тільки горизонтально чи вертикально розташовані пристрої. Вимірювання об'єму рідини в нахиленому резервуарі розроблено тільки для циліндричного резервуар, але розміщеного відносно землі по твірній, а не на круглій основі [4].

Викладення основного матеріалу. Оскільки, в силу певних обставин, основа резервуару може розташовуватись не в горизонтальному чи вертикальному положенні, а під певним кутом, то в такому випадку використання традиційних методів визначення об'єму рідини є недоцільним, так як вимірюваний рівень рідини в резервуарі не буде відображати істинне значення об'єму рідини, тобто вноситиме значну похибку вимірювання. Для вирішення поставленої проблеми треба встановити залежність значення об'єму рідини в резервуарі від його просторової орієнтації відносно горизонтальної площини з врахуванням типу резервуару та його розмірних параметрів.

На сьогоднішній час створено декілька типів резервуарів для зберігання в них речовин в рідкому стані. Це, насамперед, резервуари циліндричної, призматичної та еліпсовидної форм.

Для найбільш поширеного типу циліндричного резервуара у випадку відхилення його осі від вертикалі на кут α об'єм рідини у резервуарі буде рівний [5]:

$$V = \frac{\pi D^2}{4} \cdot h_c, \tag{1}$$

де D – діаметр резервуара h_c – висота рівня рідини по осі резервуара.

Оскільки у більшості центр люка (горловини) для заливання рідини знаходиться не в центрі кругової кришки, а на відстані d від краю (рис. 1), то вимірювання можуть проводитись тільки висоти $h_в$ від центра люка до рівня рідини, а не по осі резервуара.

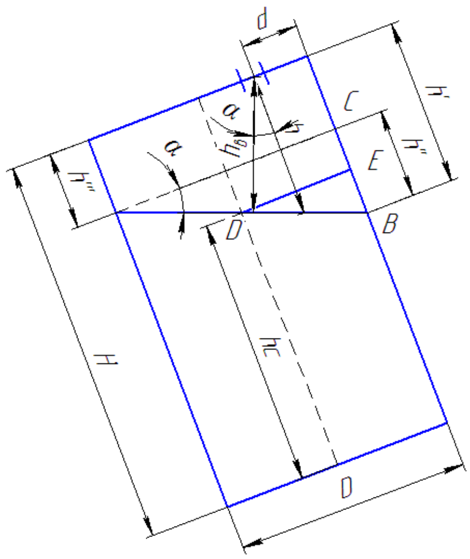

Рис. 1. Рідина в нахиленому резервуарі циліндричної форми (AB – лінія рівня поверхні рідини)

Тоді висота h_c визначиться з виразу:

$$h_c = H - \frac{h' + h'''}{2}. \tag{2}$$

Виразимо h' як суму h′′ та h''', звідки

$$h_c = H - \frac{h''' + h'' + h'''}{2} = H - \left(h''' + \frac{h''}{2}\right). \tag{3}$$

З прямокутного трикутника АВС виражаємо h′′ через тангенс кута α, тобто

$$h_c = H - \left(h''' + \frac{1}{2} D \cdot tg\alpha\right). \tag{4}$$

В залежності (2) h′′′ виразимо як різницю h′ і h′′ та проведемо певні математичні перетворення, отже, h_c, буде рівне:

$$h_c = H - \frac{h'+h'''}{2} = H - \frac{1}{2}(h'+h'-h'') = H - \frac{1}{2}(2h'-h'') = H - h' + \frac{1}{2}h''; \quad (5)$$

$$h' = h + BE, \quad (6)$$

$$BE = \left(\frac{D}{2} - d\right)\cdot tg\alpha. \quad (7)$$

Звідки:

$$h' = H - h + \left(\frac{D}{2} - d\right)\cdot tg\alpha. \quad (8)$$

Отже, підставивши (8) в (5) і виразивши h′′ через tgα отримаємо

$$h_C = H - h + \left(\frac{D}{2} - d\right)\cdot tg\alpha + \frac{1}{2}D\cdot tg\alpha = H - h + tg\alpha(D-d). \quad (9)$$

Перейдемо від h до вимірюваної відстані від центра люка до поверхні рідини $h_в$:

$$h = \frac{h_в}{\cos\alpha}. \quad (10)$$

Тоді, підставивши (2.10) в (2.9) отримаємо

$$h_C = H - \frac{h_в}{\cos\alpha} + tg\alpha(D-d). \quad (11)$$

Помірявши кут нахилу α циліндричного резервуара та визначивши висоту рівня рідини по осі h_c можна підставляти всі величини в (1) та підрахувати об'єм рідини.

Визначення об'єму рідини в резервуарі з прямокутною основою, нахиленому відносно одного ребра основи (рис. 2), визначається з залежності:

$$V_p = a\cdot b\cdot h_c, \quad (12)$$

де *a, b* – сторони основи.

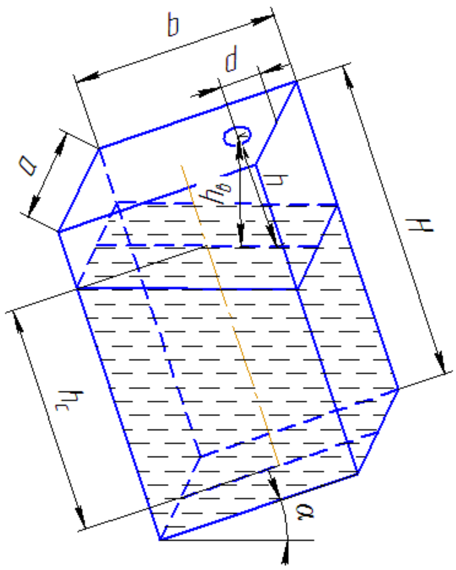

Рис. 2. Рідина в резервуарі з прямокутною основою, нахиленому відносно ребра основи

Висота рівня рідини по осі резервуара h_c визначається аналогічно як у циліндричному резервуарі, отже

$$h_c = H - \frac{h_в}{\cos\alpha} + tg\alpha\cdot(b-d), \quad (13)$$

де *H* – висота резервуару, *d* – відстань від центра люка до краю.

Досить поширеним типом резервуара є це резервуар з овальною основою. Для визначення об’єму рідини в такому резервуарі застосуємо потрійне інтегрування.

За область, на яку поширюється потрійний інтеграл, приймається замкнута просторова область, обмежена зверху і знизу плоскими еліптичними поверхнями, а з боків – циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі Oz (рис. 3).

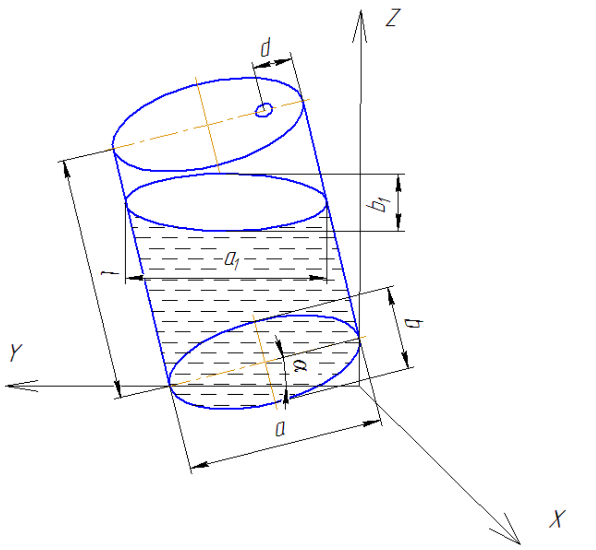

Рис. 3 Рідина в нахиленому резервуарі з овальною основою

Використаши рівняння еліпса [6]

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{14}$$

об'єм в такому резервуарі визначається з формули [5]

$$V=\iint\int\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)dxdydz.. \tag{15}$$

Межі інтегрування будуть відповідно від 0 до $b_1/2$, та від 0 до $a/2$ по dx та dy і від 0 до $H-\left(\frac{h_в}{\cos\alpha}-d\cdot tg\alpha\right)$ по dz:

$$V=\int_0^{H-\left(\frac{h_в}{\cos\alpha}-d\cdot tg\alpha\right)} 4\int_0^{b_1/2}\int_0^{a/2}\left(\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}-1\right)dxdydz, \tag{16}$$

де $b_1=b\cdot\cos\alpha$, $a_1=a$.

Визначимо об'єм рідини в резервуарі в овальною основою, але коли він розташований під кутом до горизонту по твірній (рис. 4).

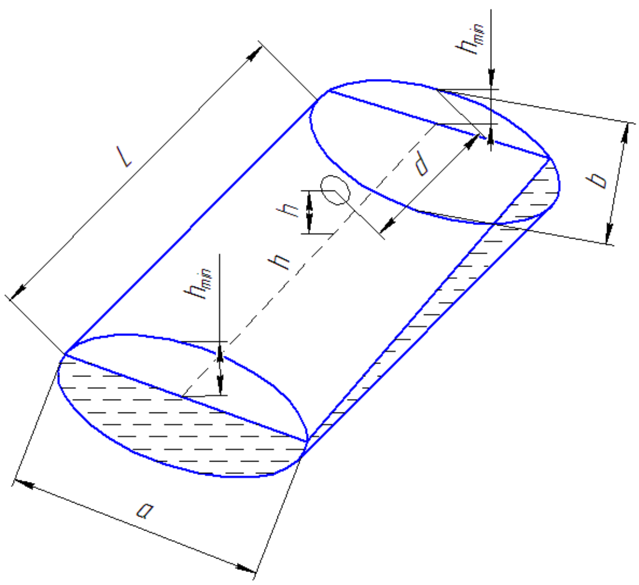

Рис. 4. Рідина в резервуарі з овальною основою, що нахилений по твірній

Об'єм незаповненої частини резервуару визначається за формулою [7]:

$$V_{нез} = L \cdot S_{сер}, \tag{17}$$

де L – довжина резервуару, $S_{сер}$ – площа середнього перерізу незаповненої частини резервуару.

Перерізом резервуару є еліпс (14). З рівняння (14) виразимо x, який буде рівний:

$$x = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}. \tag{18}$$

Площа середнього перерізу незаповненої частини резервуару визначається з формули:

$$S_{cep} = \frac{1}{2}\left(S_{\min} + S_{\max}\right), \tag{19}$$

де S_{min} та S_{max} – мінімальна та максимальна площа перерізу незаповненої частини резервуару.

Площі S_{min} та S_{max} визначають проінтегрувавши рівняння площин по осі ординат, що їх утворюють. Межі інтегрування визначають з контура, що їх обмежує.

$$S_{\min} = a\int\limits_{b-\frac{hв}{\cos\alpha}+dtg\alpha}^{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy, \tag{20}$$

$$S_{\max} = a\int\limits_{b-(L-d)tg\alpha+\frac{hв}{\cos\alpha}}^{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy. \tag{21}$$

Підставивши (20) та (21) в (19) отримаємо:

$$S_{cep} = \frac{a}{2}\left(\int\limits_{b-\frac{hв}{\cos\alpha}+dtg\alpha}^{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy + \int\limits_{b-(L-d)tg\alpha+\frac{hв}{\cos\alpha}}^{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\right). \tag{22}$$

Виходячи із (17) формула для обчислення об'єму рідини в резервуарі наступна:

$$V = aL\left(2\int\limits_{0}^{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy - \frac{1}{2}\left(\int\limits_{b-\frac{hв}{\cos\alpha}+dtg\alpha}^{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy + \int\limits_{b-(L-d)tg\alpha+\frac{hв}{\cos\alpha}}^{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\right)\right). \tag{23}$$

Розглянемо випадок, в якому резервуар з прямокутною основою буде нахилений так, що одна з його сторін основи MN буде нахилена під кутом α, а інша сторона MK – під кутом β (рис. 5). Дані кути будуть визначатися за допомогою будь-якого вимірювача кутів, що задовольняє вимоги точності.

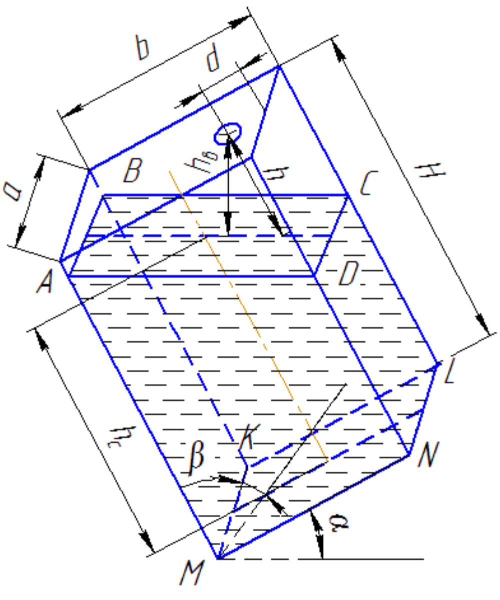

Рис. 5. Резервуар з прямокутною основою з відхиленням ребер основи під різними кутами від горизонталі

Для початку визначимо об'єм фігури, утвореної днищем резервуара та його проекцією на площину *XOY* (рис. 6).

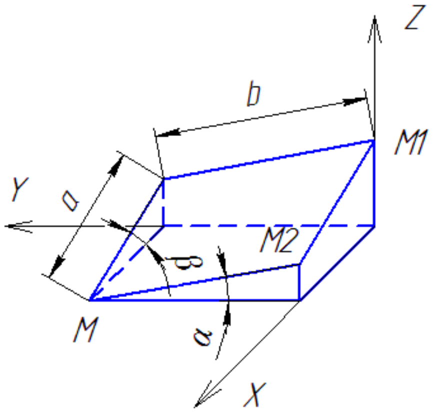

Рис. 6 . Фігура, утворена днищем нахиленого резервуара та його проекцією на горизонтальну поверхню

Розглянемо три точки, що лежать в площині P (і не лежать на одній прямій): $M(x_0, y_0, z_0),\ M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2) \in P$ [6].

Очевидно, що вектори $MM_1 = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0),\ \ MM_2 = (x_2 - x_0,\ y_2 - y_0,\ z_2 - z_0)$ також будуть лежати в площині P. Тоді довільна точка $N(x, y, z)$ буде належати цій площині, коли вектор $MN = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ буде лежати в площині. Якщо три вектори компланарні, то їх змішаний добуток дорівнює нулю.

Записавши змішаний добуток трьох векторів в координатній формі, одержимо:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \tag{24}$$

Отримане рівняння (24) є рівнянням площини, що проходить через три заданих точки.

Знайдемо рівняння площини в якій знаходиться днище за трьома точками *M*, *M*1 та *M*2 [6]. Значення координат точок отримано внаслідок проектування цих точок на відповідні осі координат: *M*1(0, 0, (*bsin*α+*asin*β)); *M*2(*acos*α, 0, *bsin*β); *M*(*acos*β, *bcos*α, 0).

Отже, рівняння площини матиме вигляд

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - (b\sin\alpha + a\sin\beta) \\ a\cos\beta - 0 & 0 - 0 & b\sin\beta - b\sin\alpha + a\sin\beta \\ a\cos\beta - 0 & b\cos\beta - 0 & 0 - (b\sin\alpha + a\sin\beta) \end{vmatrix} = 0. \tag{25}$$

Зведемо рівняння площини до загального вигляду, знайшовши визначник матриці (25).

$$\Delta = \begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - (b\sin\alpha + a\sin\beta) \\ a\cos\beta - 0 & 0 - 0 & b\sin\beta - b\sin\alpha + a\sin\beta \\ a\cos\beta - 0 & b\cos\beta - 0 & 0 - (b\sin\alpha + a\sin\beta) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y & z - (b\sin\alpha + a\sin\beta) \\ a\cos\beta & 0 & b\sin\beta - b\sin\alpha + a\sin\beta \\ a\cos\beta & b\cos\beta & (b\sin\alpha + a\sin\beta) \end{vmatrix} \tag{26}$$

Введемо такі позначення: якщо a_{ij} – елемент визначника *d*, то через M_{ij} позначимо доповнюючий мінор цього елемента, тобто мінор (*n*-1)-го порядку, який одержуємо після викреслення з визначника *i*-го рядка та *j*-го стовпця. Далі, через A_{ij} позначимо алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{27}$$

Визначник матриці, яка одержується викреслюванням всіх рядків та стовпців, окрім вибраних, є мінором k-го порядку, розташованим в рядках з номерами i_1, i_2, , i_k та стовпцях з номерами j_1, j_2, , j_k [6]:

$$M_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k} = det\begin{pmatrix} a_{i1j1} & a_{i1j2}\cdots & a_{i1jk} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ikj1} & a_{ikj2}\cdots & a_{ikjk} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Визначник Δ рівний сумі добутків всіх елементів довільного його рядка на їх алгебраїчні доповнення.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+...+a_{in}A_{in} \quad (29)$$

Замінюючи у виразі (27) алгебраїчні доповнення відповідними мінорами зі знаками плюс чи мінус, зведемо обчислення визначника *n*-го порядку до обчислення кількох визначників (*n*-1)-го порядку.

Застосуємо формулу (29) для визначення визначника матриці (26):

$$\begin{gathered}\Delta = \left(ab\cos\beta\sin\alpha + a^2\sin\beta\cos\beta - b^2\cos\alpha\sin\beta + b^2\cos\alpha\sin\alpha - ab\sin\beta\cos\alpha\right)x + \\ + (ab\sin\beta\cos\beta - ab\sin\alpha\cos\beta + a^2\sin\beta\cos\beta)y + a\cos\beta z - a\cos\alpha(b\sin\alpha + a\sin\beta).\end{gathered} \quad (30)$$

Позначимо коефіцієнти при *x, y, z* і вільний член відповідно *A, B, C, D*, тоді отримаємо рівняння площини:

$$Ax+By-Cz-D=0, \quad (31)$$

де $A = ab\cos\beta\sin\alpha + a^2\sin\beta\cos\beta - b^2\cos\alpha\sin\beta + b^2\cos\alpha\sin\alpha - ab\sin\beta\cos\alpha;$

$B = ab\sin\beta\cos\beta - ab\sin\alpha\cos\beta + a^2\sin\beta\cos\beta;\ \ C = a\cos\beta;\ \ D = a\cos\alpha(b\sin\alpha + a\sin\beta).$

Об'єм резервуара отримаємо, взявши потрійний інтеграл від рівняння площини:

$$V = \int_0^m\int_0^n\int_0^k (Ax + By - Cz - D)dxdydz, \quad (32)$$

де $m = b\sin\alpha + a\sin\beta$ – верхня межа інтегрування по dz; $n = b\cos\beta$ – верхня межа інтегрування по dy; $k = a\sin\beta$ – верхня межа інтегрування по dx.

Для обчислення визначених інтегралів існує ряд методів: Ньютона, Сімпсона, Гауса, Чебишева, метод трапецій та інші. Всі ці методи дають наближене значення розв'язку визначеного інтеграла, однак найточнішим вважається метод Сімпсона, тому його доцільно застосувати в цьому випадку, використовуючи сучасні засоби обчислювальної техніки. Наступні дослідження в цьому напрямку будуть спрямовані на розроблення алгоритмів обчислень та компактних засобів вимірювання.

Висновки. В роботі проведено аналіз існуючих методів визначення об'єму рідин у резервуарах, їх переваг та недоліків. Виведено формули для визначення об'єму рідин в нахилених відносно горизонтальної площини резервуарах довільної орієнтації та різної форми через вимірювані параметри, а саме кути нахилу резервуара та відстань від центра люка до поверхні рідини при відомих розмірах резервуара.

Вищенаведений метод дозволяє підвищити точність визначення об'єму рідин як для стаціонарних, так і для мобільних резервуарів.

Інформаційні джерела

1. Поліщук Є.С. Метрологія та вимірювальна техніка: Підручник / Є.С. Поліщук, М.М. Дорожовець, В.О. Яцук, В.М. Ванько, Т.Г. Бойко; За ред. проф. Є.С. Поліщука. – Львів: Видавництво "Бескид Біт", 2003. – 544 с.

2. Спосіб визначення об`єму рідини у резервуарі / Гаврилович І. О., Дашківський В. О., Дюлович Я. Л.: пат. **32385** А Україна. Опубліковано: 15.04.2003. бюл №7 2000 МПК G01F17/00 23/00 МПК 99052928

3. Вимірювач рівня та об'єму рідини / Божок А. М., Понеділок В. Ф., Кримський В. П.: пат. 12214 U Україна. Опубліковано: 16.01.2006 бюл №1 2006, МПК G01F 23/04 (2006.01) U 200508390.

4 Пристрій для визначення об'єму зрідженого газу / Білинський Й. Й., Книш Б. П.: пат. 86552 U Україна. Опубліковано: 10.01.2014, бюл №1 МПК G01N21/81

5. Федорчук В.В. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / В.В. Федорчук. – М.: Наука, 1977, 288 с. 6. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике / И.А. Каплан. – Харьков: Издательство Харьковського университета, 1965. – 375 с. 7. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до

математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення / П.П. Овчинников. – К.: Техніка, 2003. – 600 с.

Боднар Р.Т., к.т.н.
Ивано-Франковский национальный технический университет нефти и газа

ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЪЕМА ЖИДКОСТИ В НАКЛОНЕНЫИХ РЕЗЕРВУАРАХ

Аннотация. В работе проведен анализ существующих методов и средств определения объема жидкости в резервуарах. Установлено, что в основном все публикации касаются только резервуаров с горизонтальным основанием и вертикальными стенками. Для учета неоднократных случаев негоризонтального размещения основы резервуара установлены наиболее вероятные варианты их установки учитывая их геометрическую форму..

Исходя из канонических формул для вычисления объемов тел различной геометрической формы (прямоугольная призма, круговой цилиндр, эллиптический цилиндр) и, используя методы аналитической геометрии, высшей алгебры и интегрального исчисления, выведены аналитические модели для определения объема жидкостей в наклоненных относительно горизонтальной плоскости резервуарах вышеуказанных геометрических форм. Измеряемыми параметрами являются углы наклона резервуаров в ортогональных плоскостях относительно горизонтальной плоскости и расстояние по вертикали от центра горловины резервуара к поверхности жидкости. Известными параметрами считаются форма и геометрические размеры резервуаров. Для определения объемов наклонных резервуаров типа круговой цилиндр и прямоугольная призма, наклонена относительно одного ребра основания, получено относительно простые выражения. Для вычисления объема жидкости в других резервуарах по полученным выражениям рекомендуется использовать методы вычислительной математики.

Ключевые слова: объем жидкости, форма резервуара, наклонены резервуары, уровень жидкости, угол наклона.

Bodnar R.T., Ph.D.
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas

RESEARCH OF MODELS FOR DETERMINATION OF LIQUID VOLUME IN TILT TANKS

Abstract. In the paper analyzes the existing methods and means of determining the volume of liquid in tanks. It is established that basically all publications concern only tanks with a horizontal basis and vertical walls. To take into account the frequent cases of non-horizontal placement of the tank base, the most probable options for their installation are established, taking into account their geometric shape.

Based on canonical formulas for calculating the volumes of bodies of different geometric shapes (rectangular prism, circular cylinder, elliptical cylinder) and using methods of analytical geometry, higher algebra and integral calculus, analytical models are derived to determine the volume of liquids inclined relative to the horizontal tanks of the above geometric shapes. The measured parameters are the angles of inclination of the tanks in the orthogonal planes relative to the horizontal plane and the vertical distance from the center of the neck of the tank to the surface of the liquid. Known parameters are the shape and geometric dimensions of the tanks. To determine the volumes of inclined tanks such as a circular cylinder and a rectangular prism inclined relative to one edge of the base, relatively simple expressions are obtained. It is recommended to use the methods of computational mathematics to calculate the volume of liquid in other tanks from the obtained expressions.

Keywords: volume of liquid, shape of the tank, inclined tanks, liquid level, angle of inclination.