

УДК 621.9.02-229

DOI 10.36910/10.36910/6775-2313-5352-2023-22-11

Кузнєцов Ю. М., Сінмін Г., Самойленко О.В.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна

СТВОРЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ФРЕЗЕРУВАННЯ СКЛАДНОПРОФІЛЬНОЇ ДЕТАЛІ, ЗАКРІПЛЕНОЇ У ФРАКТАЛЬНИХ ЛЕЩАТАХ

Стаття присвячена питанню створення математичної моделі процесу фрезерування деталі, закріпленої у фрактальних лещатах. Коротко наведена історія створення універсальних лещат, проаналізовано представленість фрактальних лещат на ринку верстатного оснащення на підставі аналізу декількох вітчизняних та світових платформ електронної комерції. Проаналізовані декілька існуючих робіт в цьому напрямку. Визначено головний принцип роботи фрактальних лещат – самовстановлюваність по довільній поверхні деталі. Зроблені декілька допущень для подальшого моделювання. Запропоновано математичну модель на основі принципів кінестатики та статичної рівноваги, яка складається із системи трьох диференціальних рівнянь другого порядку із зосередженими коефіцієнтами. Математична модель придатна для її реалізації на сучасному спеціалізованому програмному забезпеченні для моделювання, імітації та аналізу динамічних систем. Надані рекомендації по наближенню математичної моделі до натурального експерименту.

Ключові слова: фрактальні лещата; фрактальна структура; фрезерування, математичне моделювання, динамічна система; кінестатика; статична рівновага; диференціальні рівняння.

Вступ. Фрактальні лещата для затиску деталей складної форми (рис. 1) відомі досить давно. Перший відомий патент (рис. 2) на фрактальні лещата (декількох типів) є американським [3], однак, належить підданому Австро-Угорської імперії. Патент датований 1913 роком, але можна припустити, що ідеї подібного затискного пристрою виникали й раніше, з розвитком уявлень про фрактальні структури взагалі та можливість їхнього застосування в різних галузях науки і техніки [10].

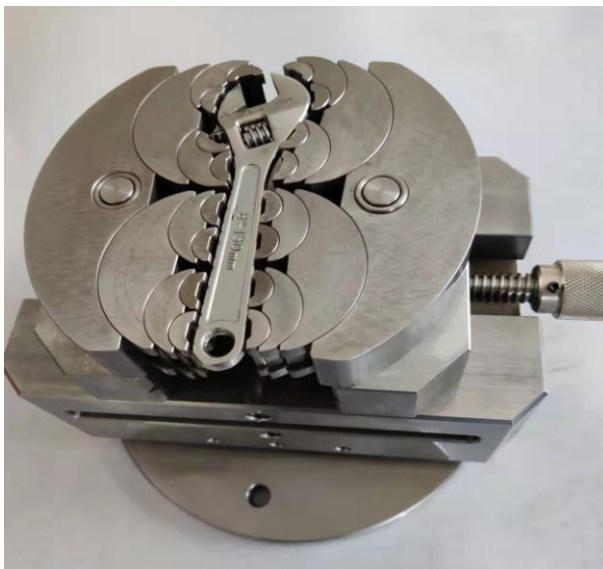


Рисунок 1 – Типові фрактальні лещата із ручним затиском

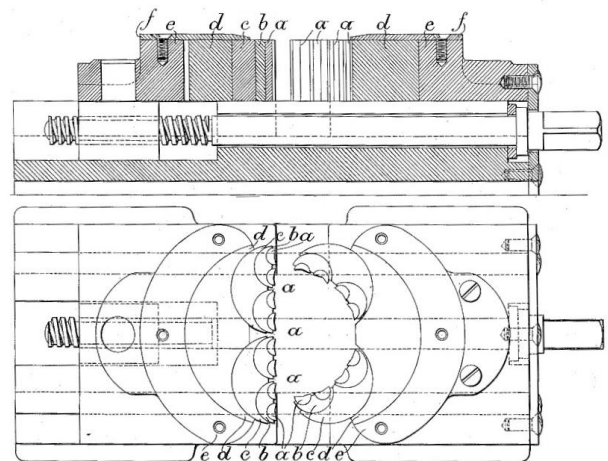


Рисунок 2 – Один з варіантів фрактальних Лещат за патентом US1059545A

Не зважаючи на широкоуніверсальність та різноманітність форм деталей, що затискаються, фрактальні лещата не набули широкого застосування на цей час. Ймовірною причиною цього є складність у виготовленні. Опосередкованим свідченням тому є практично повна їхня відсутність на ринку верстатного оснащення як в Україні, так і за кордоном.

Так, найбільший маркетплейс України *Prom* на запит "фрактальні лещата" не знаходить позицій з такою назвою [6]. На найбільшому китайському маркетплейсі *AliExpress* також відсутні потрібні позиції. При запиті, в тому числі й англійською мовою "fractal vise" [2], пошукова машина цього маркетплейсу видає або слюсарні, або верстатні лещата традиційної форми. Аналогічна ситуація із пошуком на сервісі *Google Покупки*. Навіть найбільша в світі платформа електронної комерції *Amazon* за запитом "fractal vise" пропонує слюсарні, верстатні або ювелірні лещата [1]. Фрактальних лещат серед них немає.

Отже, можна зробити висновок, що, не зважаючи на суттєві переваги фрактальних лещат у затиску складнопрофільних деталей, сучасні виробники не зацікавлені в їхньому виготовленні та просуванні на ринку.

Однак, цілком можливо, що в майбутньому можуть скластись такі обставини в промисловості, що фрактальні лещата отримають "друге життя", як це ставалось із багатьма іншими винаходами і технічними рішеннями [5].

Тому доцільним є подальше дослідження цього цікавого технологічного оснащення як фрактальні лещата поряд з іншими універсальними лещатами з перспективою суттєвого розширення їхнього застосування в майбутньому.

Зокрема, науковий інтерес становить моделювання процесу обробки деталей, закріплених у фрактальних лещатах, на металообробному обладнанні, в першу чергу через те, що затиск деталі відбувається у багатьох довільно розташованих точках.

Наприклад, в роботі [8] була запропонована динамічна модель фрезерного верстату з урахуванням особливостей верстатних лещат, в яких закріплюється оброблювана деталь. Однак, питання фрактальних лещат як складової частини динамічної моделі розглянуто побіжно, як один із декількох варіантів верстатних лещат, і не представлені математичні залежності для підрахунку результуючої жорсткості фрактальних губок.

Цікавою і перспективною вбачається конструкція лещат [9, 11] для закріплення складнопрофільних деталей (рис. 3). Губки лещат виконані у вигляді резервуарів із гнучкими стінками, наповнених деяким середовищем нестійкої форми (рідким сипучим, пластичним тощо) із вкрай низьким коефіцієнтом стиснення (наприклад, металевий шріт).

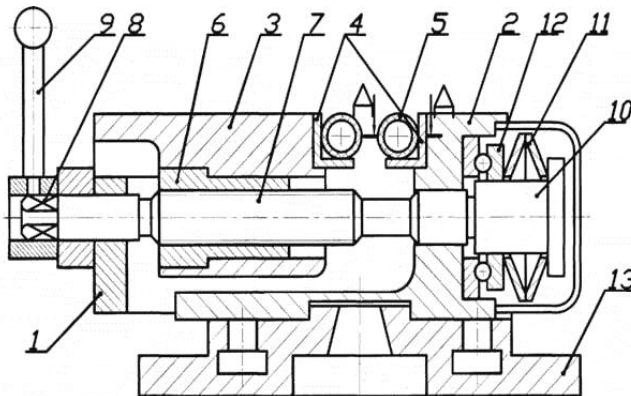


Рисунок 3 – Повздовжній переріз лещат з накладками, в порожнинах яких розміщені еластичні оболонки:

1 – корпус; 2 – нерухома губка; 3 – рухома губка; 4 – накладки; 5 – еластичні оболонки; 6 – гайка; 7 – гвинт; 8 – квадратний хвостовик гвинта (ліворуч); 9 – рукоятка; 10 – циліндричний хвостовик гвинта (праворуч); 11 – пакет тарілчастих пружин; 12 – упорний шарикопідшипник; 13 – корпус

Таку конструкцію можна вважати фрактальною в тривимірному просторі з практично нескінченими фрактальними рівнями, однак, лише в першому наближенні, оскільки затиск деталі досягається за рахунок іншого ефекту – деякого гідравлічного обволікання поверхні деталі. Тому і методи розрахунку та моделювання подібних лещат відрізнятимуться від "класичних" фрактальних.

Постановка задачі. Метою роботи є створення адекватної математичної моделі процесу механічної обробки деталі складної форми, закріпленої у фрактальних лещатах. Модель повинна бути придатною для подальшої реалізації на сучасному спеціалізованому програмному забезпеченні для моделювання, імітації та аналізу динамічних систем, наприклад, в модулі *Simulink* пакету *Matlab* [7].

Результати досліджень. В основі роботи фрактальних лещат лежить принцип самовстановлення затискних елементів відносно контурів деталі, що затискається. Завдяки цьому створюються передумови для рівномірного обтискання в усіх точках контакту затискних губок з поверхнею оброблюваної деталі.

Подібний ефект досягається в інших механізмах. Так, чотирирівний залізничний візок можна представити як фрактальну структуру з двома рівнями, де першим рівнем виступає основна балка, а другим – рами, які несуть колісні пари. Якщо уявити восьмивісний вагон, то утворюється фрактальна структура з трьома рівнями, де перший рівень – рама вагону, другий рівень – балка, а третій – рами з колісними парами. Аналогічним чином влаштована великорозмірна щітка автомобільного склоочисника, де закладена фрактальна структура з трьома рівнями та, відповідно, вісьмома точками контакту. При такому підході фрактальними структурами другого порядку можна вважати деякі гусеничні підвіски.

В усіх випадках досягається рівномірний розподіл навантаження на контактуючу поверхню (залізнична рейка, автомобільне скло та дорожнє покриття відповідно) в межах множини точок контакту.

При створенні математичної моделі процесу фрезерування деталі, закріпленої в фрактальних лещатах, слід прийняти деякі попередні допущення:

1. Зважаючи на значну висоту фрактальних губок, слід вважати, що всі силові фактори діють в одній площині або паралельних площинах. Тобто, розрахункова модель є плоскою.

2. Процес затиску деталі відбувається в три етапи: підведення фрактальних губок під деталь → самовстановлення кінцевих губок → затиск деталі з робочим зусиллям.

Після затиску обидві фрактальні губки набувають властивостей деякого моноліту. Пояснюється це тим, що площа контакту кінцевих губок (їх затискних поверхонь) та оброблюваної деталі обраховується десятками квадратних міліметрів. Натомість, контакт кінцевих губок та наступних за порядком проміжних фрактальних елементів відбувається за схемою "циліндр по циліндру" та обраховується уже значною кількістю квадратних міліметрів. Наступні контакти проміжних елементів також відбуваються за схемою "циліндр по циліндру", а площа контакту росте в геометричній прогресії. Тому можна вважати, що відчутне деформування при затиску відбувається лише в точках контакту кінцевих губок та деталі.

Саме з цієї причини розглянута в роботі [8] розрахункова схема для визначення результуючої жорсткості фрактальних губок повинна враховувати суттєву різницю жорсткостей всередині фрактальної структури губок фрактальних лещат.

3. В якості модельованого робочого процесу прийнята фрезерна обробка пальцевою фрезою як найбільш універсальна для плоскої моделі, оскільки вона характеризується силою різання в площині моделі, а також моментом різання.

4. В точках контакту кінцевих губок та поверхні оброблюваної деталі відбуваються пружно-демпфуючі явища в нормальному напрямку та спостерігаються процеси тертя в тангенціальному напрямку. Коефіцієнти тертя однакові для усіх точок контакту, оскільки кінцеві губки ідентичні. Зусилля затиску розподілене рівномірно між точками контакту.

5. Маса фрактальних губок значно перевищує масу оброблюваної деталі, а жорсткість механізму затиску значно перевищує контактну жорсткість взаємодії кінцевих губок та поверхні деталі. Тому обидві фрактальні губки можна вважати нерухомими.

Тут і надалі під терміном "фрактальні губки" слід розуміти всю складену фрактальну структуру губок, а під терміном "кінцеві губки" – кінцеві елементи фрактальних губок останнього фрактального рівня у вигляді двохплечого симетричного важеля, оснащеного спеціально виконаними поверхнями для контакту із оброблюваною деталлю.

Початкова конструктивна схема (рис. 4) містить узагальнену складнопрофільну деталь з приведеною масою m_d та приведеним моментом інерції J_d , затиснуту зусиллям \vec{S} між двох фрактальних губок $Jaw1$ та $Jaw2$, які містять відповідно k і n кінцевих губок. На деталь діють такі силові фактори процесу різання: проекції результуючої сили різання \vec{P}_x та \vec{P}_y вздовж координатних осей x та y відповідно, а також момент різання \vec{M} , прикладені в точці O_p . Початок O системи координат розташований в геометричному центрі лещат.

Подальша еволюція розрахункової схеми (рис. 5) відповідає етапу набуття фрактальними губками деякої монолітної структури, відповідно до вищезазначеного допущення №2.

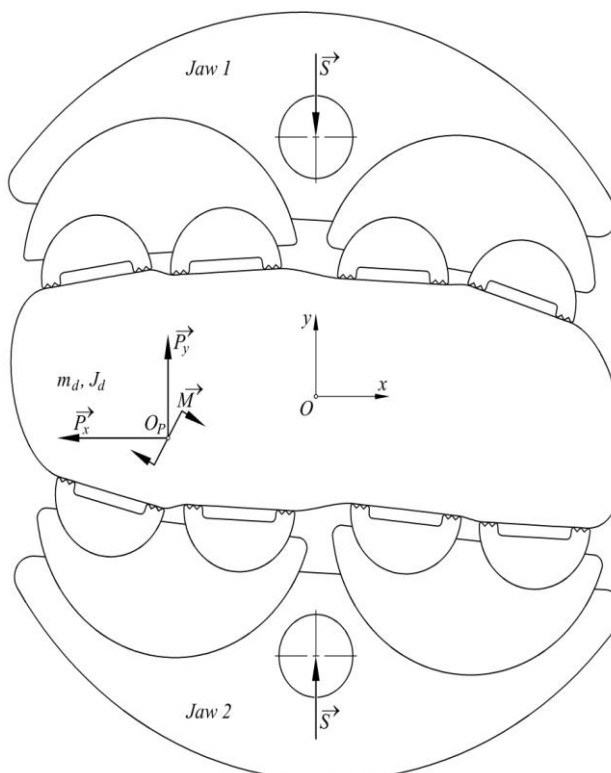


Рисунок 4 – Початкова конструктивна схема обробки деталі у фрактальних лещатах

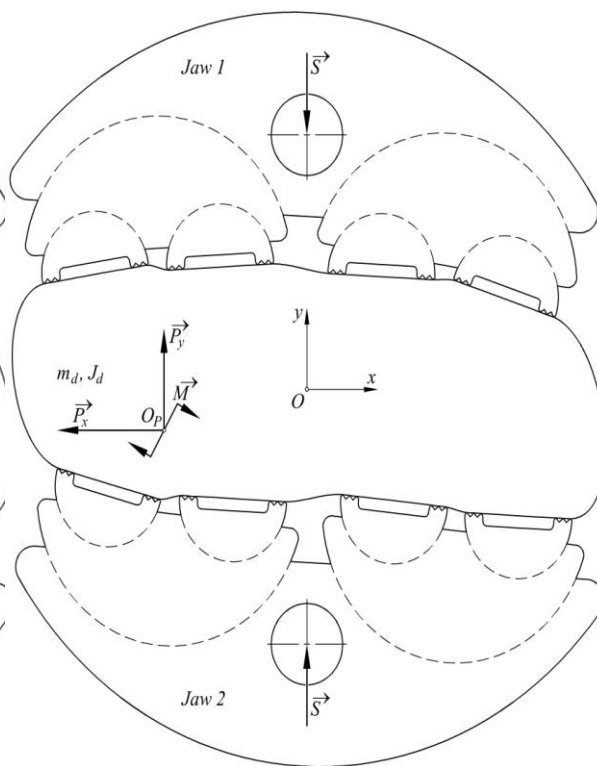


Рисунок 5 – Розрахункова схема після об'єднання фрактальних губок у монолітну структуру

Точки контакту кінцевих губок із поверхнею деталі являють собою пружно-демпфуючі елементи (рис. 6), орієнтовані в просторі паралельно осям симетрії відповідних кінцевих губок в їхньому робочому положенні.

Зважаючи на те, що кінцеві губки мають площину симетрії та дві симетричні точки контакту із деталлю, пружно-демпфуючі елементи в точках контакту кожної із кінцевих губок є паралельні та ідентичні.

Це дає змогу спростити розрахункову схему, об'єднавши попарно пружно-демпфуючі елементи для кожної з точок контакту кінцевих губок в деякі результуючі пружно-демпфуючі елементи для кожної кінцевої губки.

Таким чином, відповідно до результуючої розрахункової схеми (рис. 7), деталь контактує з фрактальними губками в точках A_{1i}, A_{2j} через пружно-демпфуючі елементи з жорсткостями c_{1i}, c_{2j} і коефіцієнтами демпфування h_{1i}, h_{2j} . Точки A_{1i}, A_{2j} лежать на осях симетрії відповідних кінцевих губок та мають координати X_{1i}, Y_{1i} та X_{2j}, Y_{2j} відповідно.

В точках A_{1i}, A_{2j} прикладені сили реакції фрактальних губок $\vec{R}_{1i}, \vec{R}_{2j}$ та сили тертя між губками та деталлю $\vec{F}_{1i}, \vec{F}_{2j}$. Орієнтація пружно-демпфуючих елементів, векторів сил реакції губок та сил тертя, характеризується кутами α_{1i}, α_{2j} .

Згідно допущення №5, приймається, що в системі "фрактальні губки – оброблювана деталь" потенційно рухомою є лише деталь. Таким чином, математична модель складається із системи трьох диференціальних рівнянь другого порядку із зосередженими коефіцієнтами, складених за принципом кінестатики (принципом д'Аламбера) [4] та принципом статичної рівноваги.

Математична модель описує лінійні переміщення деталі вздовж координатних осей, а також крутильні переміщення відносно вертикальної осі:

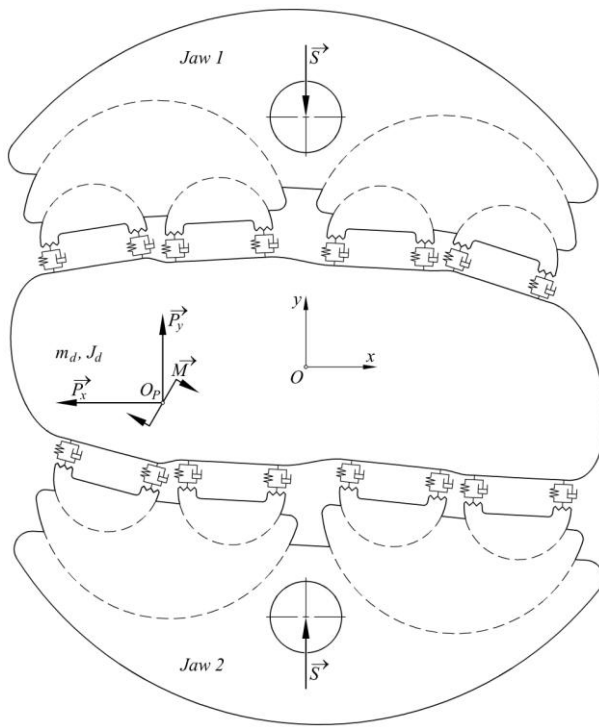


Рисунок 6 – Схема з представленням точок контакту у вигляді пружно-демпфуючих елементів

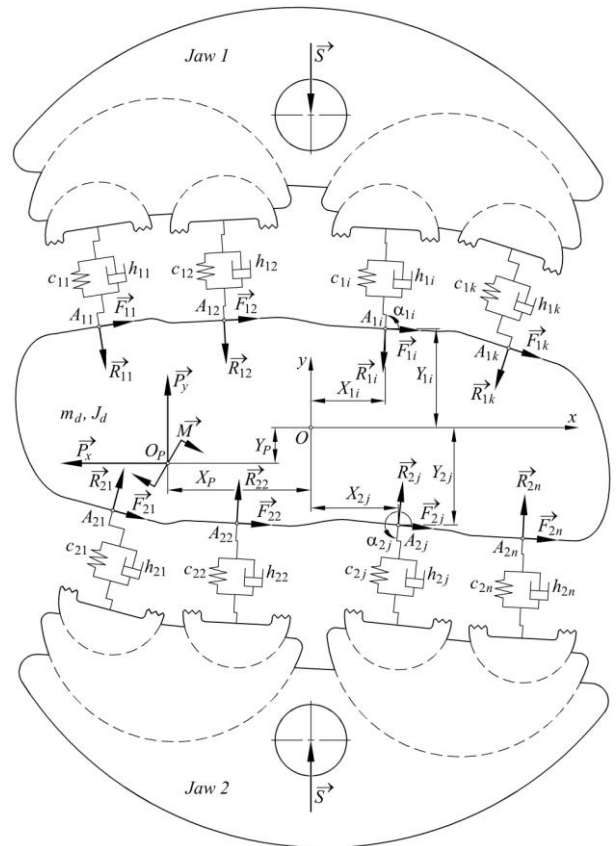


Рисунок 7 – Результуюча розрахункова схема обробки деталі у фрактальних лещатах

$$\left\{ \begin{aligned}
 m_d \cdot \ddot{x} + \sum_{i=1}^k R_{1i} \cos \alpha_{1i} + \sum_{j=1}^n R_{2j} \cos \alpha_{2j} + \sum_{i=1}^k F_{1i} \cdot \sin \alpha_{1i} + \sum_{j=1}^n F_{2j} \cdot \sin \alpha_{2j} &= P_x(t) \\
 m_d \cdot \ddot{y} + \sum_{i=1}^k R_{1i} \sin \alpha_{1i} + \sum_{j=1}^n R_{2j} \sin \alpha_{2j} + \sum_{i=1}^k F_{1i} \cdot \cos \alpha_{1i} + \sum_{j=1}^n F_{2j} \cdot \cos \alpha_{2j} &= P_y(t) \\
 J_d \cdot \ddot{\varphi} + \sum_{i=1}^k R_{1i} \cdot \sin \alpha_{1i} \cdot (X_{1i} + x) + \sum_{i=1}^k R_{1i} \cdot \cos \alpha_{1i} \cdot (Y_{1i} + y) + \sum_{i=1}^k F_{1i} \cdot \sin \alpha_{1i} \cdot (Y_{1i} + y) + \\
 + \sum_{i=1}^k F_{1i} \cdot \cos \alpha_{1i} \cdot (X_{1i} + x) + \sum_{j=1}^n R_{2j} \cdot \sin \alpha_{2j} \cdot (X_{2j} + x) + \sum_{j=1}^n R_{2j} \cdot \cos \alpha_{2j} \cdot (Y_{2j} + y) + \\
 + \sum_{j=1}^n F_{2j} \cdot \sin \alpha_{2j} \cdot (Y_{2j} + y) + \sum_{j=1}^n F_{2j} \cdot \cos \alpha_{2j} \cdot (X_{2j} + x) &= \\
 = M(t) + P_x(t) \cdot (Y_p + y) + P_y(t) \cdot (X_p + x) &
 \end{aligned} \right. \quad (1)$$

де m_d – приведена маса деталі, кг;

J_d – приведений момент інерції відносно початку координат, кг·м²;

x, y – лінійні переміщення оброблюваної деталі в процесі обробки вздовж координатних осей, м;

φ – кутове переміщення оброблюваної деталі в процесі обробки відносно початку координат, рад;

P_x, P_y – проекції результуючої сили різання на осі координат, Н;

M – момент різання, Н·м;

R_{1i}, R_{2j} – сили реакції кінцевих губок в точках контакту, H ;

F_{1i}, F_{2j} – сили тертя між кінцевими губками і поверхнею деталі в точках контакту, H ;

X_{1i}, Y_{1i} та X_{2j}, Y_{2j} – координати точок контакту кінцевих губок і деталі, m ;

α_{1i}, α_{2j} – кути орієнтації пружно-демпфуючих елементів, векторів реакцій кінцевих губок та векторів сил тертя в точках контакту, rad ;

t – час, c .

Сили реакції кінцевих губок в точках контакту обчислюються як суми сил пружності, сил демпфування та часток зусилля затиску:

$$\begin{cases} R_{1i} = h_{1i} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + c_{1i} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{S}{k} \\ R_{2j} = h_{2j} \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} + c_{2j} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{S}{n} \end{cases} \quad (2)$$

де S – зусилля затиску, H ;

c_{1i}, c_{2j} – коефіцієнти пружності кінцевих губок в точках контакту, H/m ;

h_{1i}, h_{2j} – коефіцієнти демпфування кінцевих губок в точках контакту, $H \cdot c/m$.

Сили тертя в точках контакту визначаються як добутки сил реакції та коефіцієнту тертя f , який є однаковим для всіх точок контакту згідно допущення №4:

$$\begin{cases} F_{1i} = R_{1i} \cdot f \\ F_{2j} = R_{2j} \cdot f \end{cases} \quad (3)$$

Вочевидь, силові фактори процесу різання не є постійними в часі. Вони залежать від багатьох детермінованих та стохастичних чинників, зокрема, геометричних параметрів інструменту, режимів різання, неоднорідності матеріалу деталі, температурних процесів, зовнішніх впливів тощо. Тому для подальшого моделювання слід прийняти, що:

$$\begin{cases} P_x(t) = \bar{P}_x + P_x^* \\ P_y(t) = \bar{P}_y + P_y^* \\ M(t) = \bar{M} + M^* \end{cases} \quad (4)$$

де верхньою рисою позначена детермінована складова, а зірочкою – стохастична.

Розроблена математична модель придатна для подальшої реалізації в сучасних засобах математичного моделювання динамічних систем, наприклад, в модулі *Simulink* математичного пакету *Matlab*.

Доцільним є моделювання в двох режимах:

– розімкнена динамічна система, при якій переміщення оброблюваної деталі не впливають на силові фактори процесу різання;

– замкнена динамічна система, яка передбачає вплив переміщення оброблюваної деталі на режими різання, а отже і на силові фактори процесу різання.

Слід порівняти результати моделювання між собою, а їх обох – із результатами натурального експерименту.

Висновки. Фрактальні лещата, що відомі з початку ХХ століття, однак, не набули скільки-небудь помітного поширення в машинобудуванні з ряду причин, але являють собою цікавий об'єкт для математичного моделювання з перспективою розширення їх застосування в машинобудуванні. Після затиску оброблюваної деталі фрактальні губки лещат слід розглядати як одне ціле, що має властивості моноліту.

Запропонована математична модель складена за принципами кінетостатики та статистичної рівноваги для плоскої розрахункової схеми складається із системи диференційних рівнянь другого порядку із зосередженими коефіцієнтами. Модель придатна для її реалізації на сучасному спеціалізованому програмному забезпеченні для моделювання, імітації та аналізу динамічних систем.

Моделювання слід виконувати як для розімкненої, так і для замкненої динамічних систем з подальшим порівнянням результатів моделювання між собою, а також із результатами натурального експерименту.

Запропонована модель фрактальних лещат є плоскою, що обмежує їх функціональні можливості і потребує пошуку альтернативних рішень для об'ємного затиску об'єктів довільної форми з використанням різних поглядів, підходів, фізичних та інших ефектів з подальшими теоретичними і експериментальними дослідженнями [9, 10].

Інформаційні джерела

1. Amazon.com : fractal vise. Amazon.com. Spend less. Smile more. URL: <https://www.amazon.com/s?k=fractal+vise> (дата звернення: 16.02.2023).
2. DE.AliExpress | aliexpress german – Kaufen Sie günstig qualitativ hochwertige Produkte aus China. – AliExpress. URL: <https://www.aliexpress.com/w/wholesale-fractal-vise.html> (дата звернення: 16.02.2023).
3. Device for obtaining intimate contact with, engaging, or clamping bodies of any shape : пат. US1059545A Сполучені Штати Америки (США) : В25В5/163. № US1912685288А ; заявл. 22.04.1912 ; опубл. 21.03.1913. 10 с.
4. Lanczos C. The variational principles of mechanics. 4-те вид. Dover Publications, 1986. 464 с.
5. Model 700 Ultimate | Remington. URL: <https://www.remarms.com/rifles/muzzleloading/model-700-ultimate/> (дата звернення: 17.02.2023).
6. Prom – найбільший маркетплейс України. prom.ua. URL: https://prom.ua/ua/search?search_term=фрактальні%20лещата (дата звернення: 16.02.2023).
7. Simulink – Simulation and Model-Based Design. MathWorks – Makers of MATLAB and Simulink – MATLAB & Simulink. URL: <https://www.mathworks.com/products/simulink.html> (дата звернення: 17.02.2023).
8. Кузнецов Ю. М., Беляєва А. Ю., Сінмін Г. Розробка динамічної моделі фрезерного верстата з врахуванням конструктивних особливостей лещат. Перспективні технології та прилади. 2022. № 20. С. 51–56. URL: <https://doi.org/10.36910/6775-2313-5352-2022-20-08>
9. Кузнецов Ю. М., Придальний Б. І., Сінмін Г. Нові погляди і підходи до створення автоматизованих універсальних лещат для затиску складнопрофільних об'єктів. Prospective direction of scientific and practical activity / Mechanical engineering. Sharman Oaks, California (USA), 2022. С. 239–332. URL: <https://doi.org/10.51587/9798-9866-95921-2023-011-239-332>.
10. Кузнецов Ю. М., Сінмін Г., Самойленко О. В. Передумови використання системно-морфологічного підходу та теорії фракталів при створенні лещат для об'єктів складної форми. Наукові вісті КПІ. 2021. № 4. С. 52–57. URL: <https://doi.org/10.20535/kpissn.2021.4.261849>
11. Лещата : пат. 21917 Україна : В25В1/00. № u200611012 ; заявл. 18.10.2006 ; опубл. 10.04.2007, Бюл. № 4

Kuznietsov Yu., Xingmin G., Samoilenko O.

National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

CREATION OF A MATHEMATICAL MODEL OF THE MECHANICAL PROCESSING OF A COMPLEX-PROFILE PART FIXED IN A FRACTAL VISE

The article is devoted to the issue of creating a mathematical model of the milling process of a part fixed in a fractal vise. The history of the creation of a universal vise is briefly given. The representation of fractal vices in the market of machine tool equipment is analyzed based on the analysis of several domestic and global e-commerce platforms. Several existing works in the direction are analyzed. The main principle of fractal vise operation is defined – self-adjustment on any surface of the part. Several assumptions are made for further modeling, for example, that the fractal jaws acquire the properties of a monolith after clamping the part. A mathematical model based on the principles of kinetostatics and static balance is proposed, which consists of a system of three differential equations of the second order with lumped coefficients. The mathematical model is suitable for its implementation on modern specialized software for modeling, simulation, and analysis of dynamic systems. Recommendations for approximation of the mathematical model to the natural experiment are provided.

Key words: fractal vise; fractal structure; milling, mathematical modeling, dynamic system; kinetostatics; static balance; differential equations.