© Стельмащук В.В., Стельмащук С.В. 2026

УДК 629.3.027.5
UDC 629.3.027.5

Стельмащук В.В., Стельмащук С.В.
*Луцький національний технічний університет*

# ВПЛИВ ЗУСИЛЛЯ У ТЯГОВО-ЗЧІПНОМУ ПРИСТРОЇ НА СТІЙКІСТЬ РУХУ МАЛОТОННАЖНОГО АВТОПОЇЗДА У ГАЛЬМІВНОМУ РЕЖИМІ

З кожним роком кількість транспортних засобів, зокрема автомобільних поїздів, на дорогах України зростає, як і їхні швидкості. Гальмування малотоннажного автопоїзда часто ускладнюється додатковими зусиллями у тягово-зчіпному пристрої, які можуть призводити до складання ланок і втрати бічної стійкості. У попередніх дослідженнях показано, що за номінального завантаження автомобіля і причепа та за рівності гальмівних сил на колесах силам зчеплення на швидкості 25 м/с автопоїзд залишається стійким у всьому діапазоні зміни маси причепа; на 30 м/с критична маса причепа знижується до 2500 кг. Проте у тих моделях не враховано двох чинників — асинхронності спрацьовування гальмівних приводів автомобіля і причепа та зусилля стиску у тягово-зчіпному пристрої.

У роботі доопрацьовано плоску модель гальмування малотоннажного автопоїзда з урахуванням обох чинників та проаналізовано перехідний процес за стрибкоподібного гальмування на швидкостях 15 м/с і 25 м/с.

За результатами моделювання встановлено, що протягом перших 0,3 с з початку гальмування нормальні реакції опорної поверхні на осях автомобіля і причепа майже не змінюються — зусилля стиску у тягово-зчіпному пристрої компенсує поздовжнє перерозподілення навантаження. У цьому інтервалі кут складання автопоїзда не перевищує 0,015 рад, а бічне відхилення причепа не виходить за допустиму смугу руху ($S_б = L_п \cdot \mathrm{tg}(0{,}015) = 0{,}029$ м). З плином часу кут складання зростає, причеп виходить за допустиму смугу: $S_б = 0{,}186$ м за $V = 15$ м/с і $S_б = 0{,}375$ м за $V = 25$ м/с. Коливання причепа поступово затухають, бічна швидкість стабілізується — стійкість автопоїзда відновлюється.

Отже, зусилля стиску у тягово-зчіпному пристрої — істотний чинник у перші 0,3 с гальмування, який слід враховувати при оцінюванні стійкості малотоннажних автопоїздів.

**Ключові слова:** малотоннажний автопоїзд, гальмування, тягово-зчіпний пристрій, складання ланок, кут складання, бічна стійкість, перерозподілення навантаження, асинхронність гальмівних приводів.

## ВСТУП

Кількість автопоїздів на дорогах України зростає щороку, а разом з ними — і швидкості руху, які за нинішніх умов експлуатації нерідко перевищують 25 м/с. Особливість автопоїзда полягає у тому, що у шарнірному з'єднанні його ланок постійно діють додаткові поздовжні зусилля — особливо при гальмуванні, коли причеп набігає на тягач. Саме у цьому режимі автопоїзд найчастіше складається і втрачає бічну стійкість [1].

За критерії стійкості автопоїзда у гальмівному режимі прийнято кутове і лінійне відхилення причіпної ланки від траєкторії тягача. Бічне відхилення причепа не повинне перевищувати ±3 % від габаритної ширини смуги руху — за межами цього коридору рух уже не вважається стійким.

Найризикованіший режим — екстрене гальмування на максимальному гальмівному зусиллі. Тоді ймовірність блокування коліс та осей зростає, а будь-яка несиметрія завантаження причепа чи нерівномірність гальмівних сил між бортами одразу позначається на стійкості. Зі зростанням початкової швидкості гальмівний шлях видовжується нелінійно, а разом з ним — і ризик складання ланок [2–14].

Попри значний обсяг досліджень за цим напрямом, стійкість автопоїзда за різних експлуатаційних умов гарантувати не вдається. Відкритим лишається питання впливу двох чинників, які у моделях гальмування зазвичай не враховуються — асинхронності спрацьовування гальмівних приводів автомобіля і причепа та зусилля стиску у тягово-зчіпному пристрої. Саме на них зосереджена ця робота.

## АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Стійкість руху та, зокрема, бічна стійкість АП викликає серйозне занепокоєння. У порівнянні з односекційним транспортним засобом, наприклад автомобілем, стійкість руху АП зазвичай погіршується через несприятливий вплив причепа на динаміку та кінематику [15]. Встановлено, що для односекційних транспортних засобів порушення стійкості пов'язано з надмірною поворотністю, у той час як автопоїздів характерна динамічна або коливальна нестійкість, в основному через знижене демпфування рискання системи на високих швидкостях руху [16]. Поведінку автопоїзда у різних режимах руху у роботі [17] запропоновано оцінювати як коефіцієнт посилення бічного

прискорення (RWA), який визначається як відношення максимального пікового бічного прискорення в центрі мас (ЦМ) причепа, поділеного на прискорення ведучого транспортного засобу при маневрі зміни смуги руху. За цим коефіцієнтом автопоїзд більш схильний до нестабільних режимів руху, наприклад, похитування/покачування і складання. Шарнірне з'єднання (наприклад, зчіпка) та підвіска ведучого транспортного засобу ізолюють водія від коливань причепа, тому йому важко відчувати поведінку причепа, оскільки його сприйняття засноване в основному на реакціях ведучого транспортного засобу, а не причепа [18].

За останні чотири десятиліття дослідження бічної стійкості та маневреності значною мірою проводилися для зчленованих великовантажних транспортних засобів (AHV), а не для автопоїздів у складі легкового автомобіля і причепа [19, 20]. Для таких автопоїздів водії звичайні люди без спеціальної підготовки для водіння зчленованих транспортних засобів. Коли автомобіль буксирує причіп, статична стійкість (тобто характеристики керованості у стійкому стані) можуть змінитися з початкової недостатньої повороткості на надмірну повороткість через додаткове навантаження на зчіпний пристрій, особливо у гальмівному режимі. У роботах [19, 21 та ін.] було проаналізовано вплив швидкості руху, навантаження на зчіпку, маси причепа, моменту інерції причепа, положення його осі, колії коліс та жорсткості шин бічну стійкості автопоїзда на поворотах. При цьому було встановлено, що навіть для автопоїздів з оптимальними параметрами тягового автомобіля і причепа стійкість у різних режимах руху не може бути гарантована, зважаючи на різні умови експлуатації автопоїздів [22]. Тому у подальшому було розширено дослідження інших параметрів, зокрема вплив демпфування у зчіпному пристрої на стабілізацію динамічної нестійкості коливань причепа. На жаль, досягти позитивного вирішення проблеми не вдалося [8]. Іншим досліджуваним параметром було обмеження зусилля на тягово-зчіпний пристрій [15]. Проте і це рішення не виявилося ефективним, оскільки будь-який причіп може бути приєднаний до будь-якого автомобіля під контролем власника, а не під контролем виробника.

Окрім згаданих факторів, не менш вагомим на стійкість автопоїзда у гальмівному режимі є вплив бортової нерівномірності гальмівних сил, зокрема на осях причепа, яка призводить до появи обертового моменту в горизонтальній площині. При дії цього моменту траєкторія руху причепа відхиляється від траєкторії тягового автомобіля, що може призвести до втрати стійкості руху автопоїзда. При цьому навіть антиблокувальна система автомобіля не в змозі запобігти його боковому зміщенню та зміні його курсового кута.

Ряд дослідників [9, 14, 23-25] у якості критерію стійкості автопоїзда при гальмуванні пропонують значення сили в зчіпному пристрої, яке обумовлене набіганням причіпної ланки на автомобіль-тягач. Ця сила призводить до складання ланок автопоїзда і порушення стійкості його руху. При цьому робиться висновок про те, що кут складання ланок автомобільного поїзда напряму залежить від початкової швидкості гальмування, бази причіпної ланки та координат точки зчеплення причіпної ланки та тягача [24]. Тому передбачається, що стійкість і керованість руху АТЗ повинні забезпечуватися конструктивними параметрами самої машини, з тим щоб забезпечити упевненість водія в реалізації режиму руху, що задається, виключити мимовільне виникнення небезпечного відхилення від нього і зберегти можливість швидкого коректування з подальшою стабілізацією того ж режиму [13].

**ЦІЛЬТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕНЬ**

Метою роботи є дослідження впливу зусиль стиску в тягово-зчіпному пристрої на показники стійкості автопоїзда у гальмівному режимі. Для досягнення мети досліджень сформульовані задачі дослідження:

– доопрацювати математичну модель малотоннажного автопоїзда у гальмівному режимі шляхом введення у вихідну систему рівнянь зусилля у тягово-зчіпному пристрої;

– визначити загальну гальмівну силу і уповільнення автопоїзда з урахуванням коефіцієнта асинхронності;

– визначити нормальні реакції опорної поверхні на осі автопоїзда у процесі гальмування з урахуванням коефіцієнта асинхронності;

– визначити показники стійкості автопоїзда у гальмівному режимі з урахуванням коефіцієнта асинхронності.

**РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕННЯ**

Розглядається автопоїзд у складі легкового автомобіля Mercedes-Benz T1N "Sprinter" і причепа ПВБФ 15, рис. 1 [26], оснащеного гальмівної системою – гальмо накату, рис. 2.

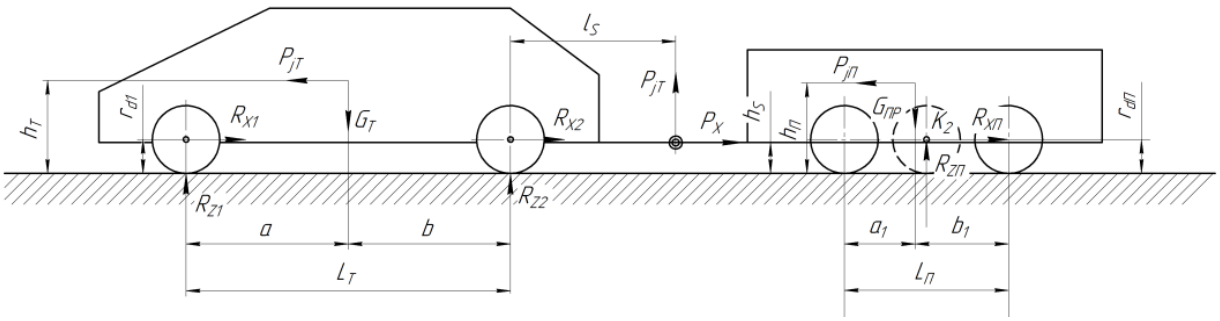



Рисунок 1 – Схема сил, що діють на автопоїзд при гальмуванні

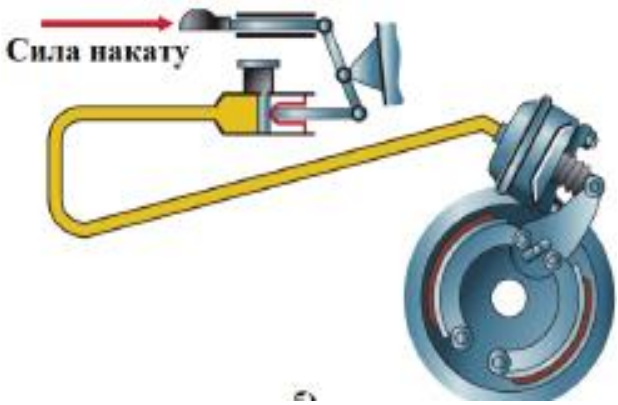



Рисунок 2 – Схема і принцип роботи гальмівних систем причепів з інерційно-гідравлічним приводом [27]

До гальмівних систем автопоїздів пред'являються вимоги сумісності їх ланок і припустимої асинхронності часу спрацьовування гальмівних приводів ланок. Сумісність ланок автопоїзда оцінюється коефіцієнтом сумісності [27]

$$K_c = \frac{\gamma_п}{\gamma_т}, \quad (1)$$

де $\gamma_т = \frac{M_{та}}{m_т}$; $\gamma_п = \frac{M_{тп}}{m_п}$ - питомі гальмівні сили на осях автомобіля і причепа;

$M_{та}$ , $M_{тп}$ - сумарні гальмівні моменти на колесах автомобіля і причепа;

$m_Т$, $m_п$ – маса автомобіля і причепа

Оскільки у подальшому розглядаються сумарні гальмівні сили на осях причепа, до двовісний причіп зведений до одновісного з параметрами двовісного. Асинхронність часу спрацьовування $\Delta t$ гальмівного приводу тягача $\Delta t_{спрта}$ й причепа $\Delta t_{спрп}$ визначається за формулою

$$\Delta t = \left| t_{спра} - t_{спрп} \right|. \quad (2)$$

Значення $K_c$ повинне бути не менше 0,9, а $\Delta t$ – не більше 0,3 с.

При цьому основне гальмівне зусилля створюється автомобілем, а причіп накочується на автомобіль, створюючи зусилля стиску у тягово-зчіпному пристрої, що призводить як до зміни нормальних реакцій опорної поверхні на колеса автопоїзда, так і зміни уповільнення автопоїзда.

За умови, що гальмівні сили на колесах автомобіля при екстреному гальмуванні досягли свого максимального значення, що дорівнює силі зчеплення, а на колесах причепа ще дорівнюють нулю (коефіцієнт асинхронності $K_c$ = 0,3 с) і зростають за лінійним законом за час зростання зусилля у приводі загальна гальмівна сила автопоїзда визначиться як

$$P_{га} = g(\varphi_з \times G_a + G_n \times k \times \varphi), \quad (5)$$

де k – коефіцієнт, що враховує збільшення гальмівної сили за час зростання гальмівного зусилля на колесах причепа.

При цьому уповільнення автопоїзда $j_{an}$ і зусилля стиску $P_c$ в тягово-зчіпному пристрої визначиться як

$$j_{an}(t) = \frac{G_a \times \varphi_з + G_n j_n(t)}{G_{an}}, \quad (6)$$

$$P_{cx} = G_n \times j_{an}, \quad (7)$$

де $G_a$, $G_п$, $G_{ап}$ – маса автомобіля, причепа, автопоїзда;
$P_{сх}$, $P_{cz}$ – зусилля стиску та навантаження на тягово-зчіпний пристрій.

На рис. 3 наведена зміна гальмівної сили, сили стиску в тягово-зчіпному пристрої і уповільнення автопоїзда, що розглядається, в залежності від часу гальмування причепа.

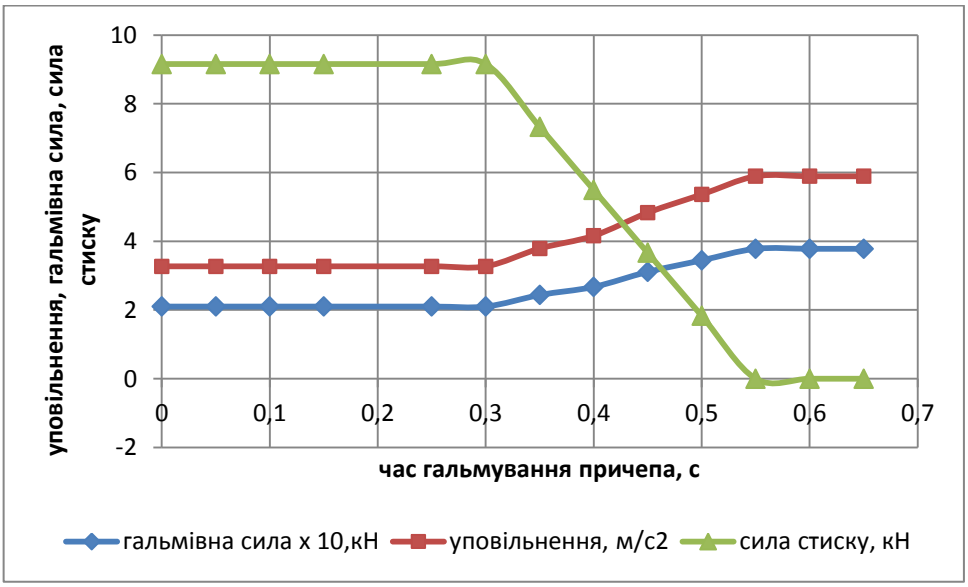



Рисунок 3 – Зміна уповільнення, гальмівної сили автопоїзда і зусилля стиску у тягово-зчіпному пристрої в залежності від часу гальмування причепа

Як слідує з наведеного графіка протягом 0,3 с у тягово-зчіпному пристрої діють максимальні зусилля стиску $P_c$, які з плином часу зменшуються. Ці зусилля призводять до зміни нормальних реакцій опорної поверхні на колесах автомобіля і причепа, які визначаться як [26]:

-для здвоєної осі причепа

$$Z_п = G_п\left(\frac{a_п}{L_п} - \frac{j_{ап}h_{gп}}{gL_п}\right) - P_{сх}\frac{h_c}{L_п}; \quad (8)$$

для передньої осі автомобіля

$$Z_{1a} = G_a\left(\frac{b}{L_a} + \frac{j_{ап}h_{ga}}{gL_a}\right) - P_{cz}\frac{a+c}{L_a}. \quad (9)$$

- для задньої осі автомобіля

$$Z_{2a} = G_a\left(\frac{a}{L_a} - \frac{j_{an}h_{ga}}{gL_a}\right) + P_{cz}\frac{a+c}{L_a}, \quad (10)$$

$L_a$, $L_п$ – база автомобіля і причепа;
$j_\tau$, $j_{\tau a}$, $j_{\tau п}$ - сповільнення автопоїзда, автомобіля і причепа;
$P_{cx}$ – зусилля в тягово-зчіпному пристрої, $P_{cx}=(j_{an}-j_п)\times G_п$;
$P_{cz}$ – навантаження на тягово-зчіпний пристрій, $P_{cz} = P_{cx}\times\frac{h_c}{L_n}$;
$h_c$ – висота розташування тягово-зчіпного пристрою, $h_c$=0,4 м;
$h_{gn}$ – висота центру мас причепа, $h_{gn}$=0,48 м;
$h_{ga}$ – висота центру мас автомобіля, $h_{ga}$=0,55 м;
$L_a$ – база автомобіля, $L_a$=3,55 м;
$L_n$ – база причепа, $L_n$=1,95 м;
*a* – відстань від центру мас автомобіля до передньої осі, *a*=1,90 м;
*c* – відстань від центру мас автомобіля до точки зчіпки з причепом, *c*=2,45 м.

На рис. 4 наведена зміна реакцій опорної поверхні на осях автомобіля і причепа автомобільного поїзда, що розглядається, у часі перехідного процесу, коли гальмівна сила на осі причепа збільшується від нуля до свого максимального значення, рис. 2.

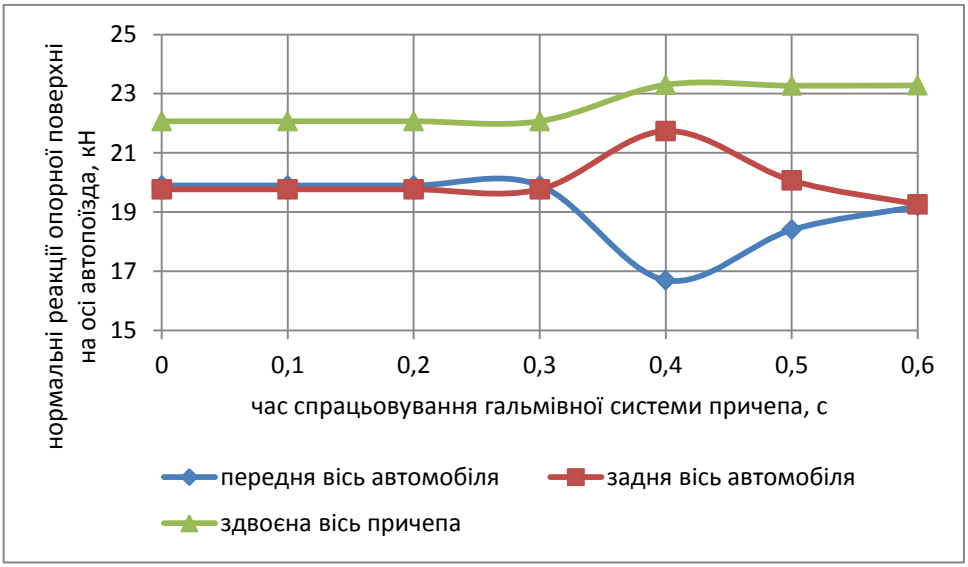



Рисунок 4 – Зміна реакцій опорної поверхні на осі автопоїзда при екстреному гальмуванні

Аналіз даних, рис. 4, показує, що протягом 0,3 с нормальні реакції опорної поверхні на осях автомобіля майже не змінюються. Пояснюється дією зусилля у тягово-зчіпному пристрої. Це зусилля довантажує задню вісь автомобіля і компенсує його зменшення за рахунок дії сили інерції в центрі мас автомобіля.

Для причепа протягом 0,3 с нормальна реакція опорної поверхні на його здвоєну вісь залишається майже незмінною, потім протягом 0,1 с зростає, досягає свого максимуму і далі залишається незмінною.

Такий характер зміни нормальних реакцій опорної поверхні на осі автомобіля і причепа, а відповідно і гальмівних сил призводить до того, що на шляху, що проходить автопоїзд за 0,3 с, стійкість автопоїзда може бути порушена дією зусилля стиску у тягово-зчіпному пристрої.

Аналіз досліджень стійкості руху автомобільних поїздів в гальмівному режимі показав, що узагальнюючим параметром, що характеризує стійкість автопоїзда, можна прийняти початкову швидкість руху $V_0$, за якої автомобіль і причіп не виходять за межі ширини смуги руху. На величину цього параметру впливають конструктивні і експлуатаційні параметри автопоїзда і умови його експлуатації. Визначення цього параметра у прямолінійному русі базується на диференціальних рівняннях руху автопоїзда у гальмівному режимі. Ці рівняння записані у вигляді [27]:

$$
\begin{aligned}
&m\dot{v}+m\omega u-X_2-m_1\dot{v}-Y_1\sin\theta-X_1\cos\theta-m_1\sin\theta\lambda\dot{\omega}-m_1\sin\theta\lambda\ddot{\theta}+m_1u\omega+m_1a\omega^2-\\
&-m_1\cos\theta\lambda\omega^2-m_1\cos\theta\lambda\dot{\theta}^2-2m_1\cos\theta\omega\lambda\dot{\theta}-m_2\dot{v}+X_3\cos\varphi+Y_3\sin\varphi-m_2d_1\omega^2\cos\varphi-\\
&-m_2d_1\dot{\varphi}^2+m_2d_1\dot{\omega}\sin\varphi-m_2d_1\ddot{\varphi}\sin\varphi+m_2u\omega-m_2c\omega^2+2m_2d_1\omega\dot{\varphi}\cos\varphi+P_c\times\cos\varphi=0\\
&-m(\dot{u}+\omega v)+Y_1\cos\theta-X_1\sin\theta+X_3\sin\varphi+Y_3\cos\varphi-2m_1\sin\theta\lambda\omega\dot{\theta}-2m_2d_1\omega\dot{\varphi}\sin\varphi+\\
&+m_2d_1\dot{\varphi}^2\sin\varphi+m_2d_1\dot{\omega}\cos\varphi-m_2d_1\ddot{\varphi}\cos\varphi-m_1\dot{u}+m_1\cos\theta\lambda\dot{\theta}+m_1\gamma\ddot{\varphi}\cos\theta-m_1\omega^2\lambda\sin\theta-\\
&-m_1\sin\theta\lambda\dot{\theta}^2+m_2d_1\omega^2\sin\varphi+Y_2-m_2\dot{u}+m_2c\dot{\omega}-m_1a\dot{\omega}-m_1\omega v-m_2\omega v+P_c\times\sin\varphi=0\\
&cm_2\omega v-bY2+h_1\dot{\theta}-J\dot{\omega}+Y_1a\cos\theta-X_1a\sin\theta+2cm_2d_1\omega\dot{\varphi}\sin\varphi-2m_1a\lambda\omega\dot{\theta}\sin\theta-M_{tr}+P_c\times\sin\varphi\times c+\\
&+m_2cd_1\ddot{\varphi}\cos\varphi-m_2cd_1\omega^2\sin\varphi-m_2cd_1\dot{\omega}\cos\varphi+m_1a\lambda\ddot{\theta}\cos\theta-m_1a\lambda\dot{\theta}^2\sin\theta+m_1a\lambda\dot{\omega}\cos\theta-m_1a\lambda\omega^2\sin\theta+\\
&+X_3d_1\sin\varphi-m_2c^2\dot{\omega}-m_1a^2\dot{\omega}-m_1a\omega v-Y_3d_1\cos\varphi+m_2c\dot{u}-m_1a\dot{u}-m_2cd_1\ddot{\varphi}\sin\varphi=0\\
&-J_1(\dot{\omega}+\ddot{\theta})-\lambda[m_1\dot{u}\cos\theta+m_1\dot{v}\sin\theta+m_1\lambda\ddot{\theta}+m_1\lambda\dot{\omega}+Y_1-m_1\omega u\sin\theta-m_1a\omega^2\sin\theta-\\
&-m_1a\dot{\varphi}\cos\theta-m_1\omega v\cos\theta]=0\\
&-J_2(\dot{\omega}+\ddot{\varphi})-Y_3L_1+P_c\times\sin\varphi\times d_1+m_2d_1\dot{u}\cos\varphi+m_2d_1\omega v\cos\varphi+m_2d_1\dot{v}\sin\varphi-\\
&-m_2d_1\omega u\sin\varphi-m_2d_1^2\dot{\omega}\cos\varphi+m_2cd_1\omega^2\sin\varphi=0
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

У системі рівнянь (3) прийняті такі позначення:

$m$, $m_1$, $m_2$, $I$, $I_1$, $I_2$ - відповідно маса і момент інерції автомобіля, керуючого колісного модуля автомобіля і причепа щодо вертикальної осі, що проходить через центр мас;

$u$, $v$, $\omega$ - бічна, поздовжня і кутова швидкість центра мас автомобіля;

$X_i$, $Y_i$, $(i=1,2,3)$ - поздовжня і бічна сила на колесах автомобіля і причепа;

$P_c$ - сила в тягово-зчіпному пристрої;

$\theta$ - кут повороту керованих коліс автомобіля;

$\varphi$ - кут складання ланок автопоїзда;

$a$, $b$ - відстань від центра мас автомобіля до передньої і задньої осі автомобіля;

$d_1$ - відстань від центра мас причепа до точки зчіпки автомобіля з причепом;

$c$ - відстань від центра мас автомобіля до точки зчіпки з причепом;

$\lambda$ - зміщення осі шворня керованих коліс автомобіля у поздовжній площині$

Отримана система п'яти диференціальних рівнянь може бути використана для знаходження невідомих – $v$, $u$, $\omega$, $\varphi$, $\dot{\varphi}$ у процесі гальмування.

У систему рівнянь (3) входять поздовжні і бокові реакції дороги на колеса окремих ланок автомобіля, які у значній мірі залежать від нормальних реакцій опорної поверхні. Бічні реакції $Y_i$ залежать від прийнятої моделі деформації колеса у бічному напрямку. Величина і напрямок поздовжніх реакцій $X_i$ залежать від режиму руху автопоїзда (розгін, усталений вільний рух, гальмування).

Поздовжні реакції, що діють на колеса осей автопоїзда у гальмівному режимі, визначені як [26]:

$$X_i=\varphi_з\times Z_i\ , \qquad (4)$$

де $\varphi_з$ - коефіцієнт зчеплення;

$Z_i$ - нормальна реакція опорної поверхні на осі автомобіля і причепа.

Отримані значення нормальних реакцій опорної поверхні на колесах осей автопоїзда будуть використані при визначенні поздовжніх і бічних сил, що діють на автомобіль і причіп.

При визначенні бічних реакцій у більшості випадків використовують залежності Д.А.Антонова і аксіоматика І.Рокара [28]. Залежності Д.А.Антонова описують весь спектр факторів, що впливають на бічну силу і бічне відведення колеса, проте вимагають значної кількості емпіричних коефіцієнтів, що утруднює їх використання. Тому скористаємося залежністю І.Рокара.

Якщо крива залежності бічної реакції від кута бічного відведення $Y=f(\delta)$ при будь-якому значенні кута відведення $\forall\delta>0$ опукла, то цьому випадку відповідають такі можливі аналітичні апроксимації [ман_моно]

$$Y = k_0 arctg\left(c_0\delta\right),\ Y = k_0 th\left(c_0\delta\right),\ Y = \frac{k\delta}{\sqrt{1+\chi^2\delta^2}}. \quad (11)$$

Загальна вимога до всіх функцій наведених у формулі (11) полягає в тому, що функція $f(\delta)$ є сумою знакоперемінного ряду

$$Y = k\delta - k'\delta^3 + k''\delta^5 - + \ldots \ . \quad (12)$$

У наведених формулах [ман_моно]:

$k$ – коефіцієнт опору відведення;

$\delta$ – кут відведення;

$c_0$ – коефіцієнт пропорційності,

$\chi = \frac{k}{Y^*}$, $Y^*$ - максимальна, можлива до реалізації бічна сила на осі автомобіля і причепа; $Y_i^* = Z_i \times \varphi_{ib}$;

$Z_i$ - нормальна реакція опорної поверхні на $i$-вісь автомобіля і причепа;

$\varphi_{ib}$ - коефіцієнт зчеплення коліс $i$-ої осі автопоїзда у бічному напрямку (прийнято рівним для усіх осей $\varphi_{ib}$ =0,6).

Приймемо останню з апроксимацій (8). Тоді для реакції на $i$-ій осі $Y_i$ отримаємо

$$Y_i = \frac{k_i\delta_i}{\sqrt{1+\chi_i^2\delta_i^2}} \quad (13)$$

Дана закономірність правомірна для визначення бічних сил і показників стійкості автопоїзда у вільному режимі. Відповідно кути відведення визначаться як

$$\delta_1 = \theta - arctg\frac{u + \omega(a - c\cdot\cos\theta) - c\cdot\dot{\theta}\cdot\cos\theta}{v + c(\omega + \dot{\theta})\sin\theta};$$

$$\delta_2 = arctg\frac{-u + b_{21}\cdot\omega}{v};$$

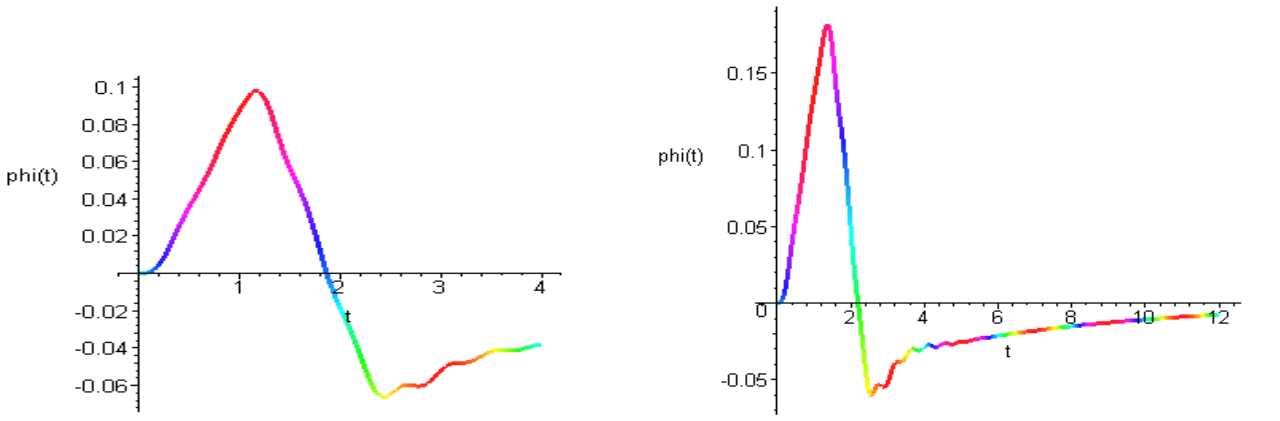
$$\delta_3 = -arctg\frac{v\sin\phi + (u - \omega d_1)\cos\phi - \omega_1 d_1}{v\cos\phi - (u - \omega d_1)\sin\phi} \quad (14)$$

Інтегрування системи рівнянь (3) виконано за вихідних даних, наведених у [27]:

$m$=3500; $m_1$=150; $m_2$=2800; $I_y$= 1987,5; $I_{y1}$= 87,1; $I_{y2}$= 978,2; a=1,90; b=1,65; c=2,45; $d_1$=1,95; h=0,58; $h_c$=0,40; λ=0,015.

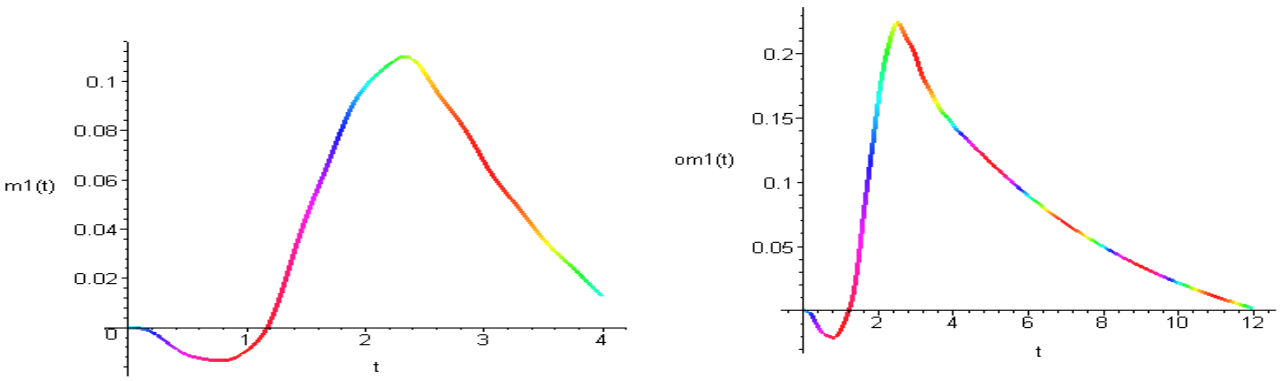
Початковими умовами інтегрування прийнято: $v_a$=15, 25 м/с; $\varphi_з$=0,6; $\theta$=0; $\dot{\theta} = 0$

На рис 5-7 наведено графіки зміни кута складання автопоїзда, рис.5, кутової швидкості автомобіля om(t) і кутової швидкості причепа om1(t), рис.6, за швидкості 15 м/с і 25 м/с, а також графік зміни швидкості кута складання автопоїзда і бічної швидкості причепа за швидкості 15 м/с, рис.7.

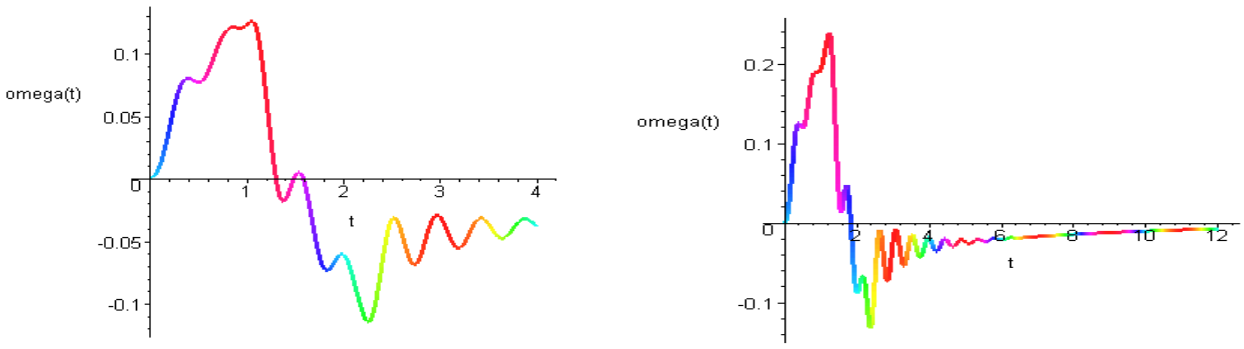



а) б)

Рисунок 5 – Зміна кута складання автопоїзда у функції часу перехідного процесу за швидкості 15 м/с (а) і 25 м/с (б)

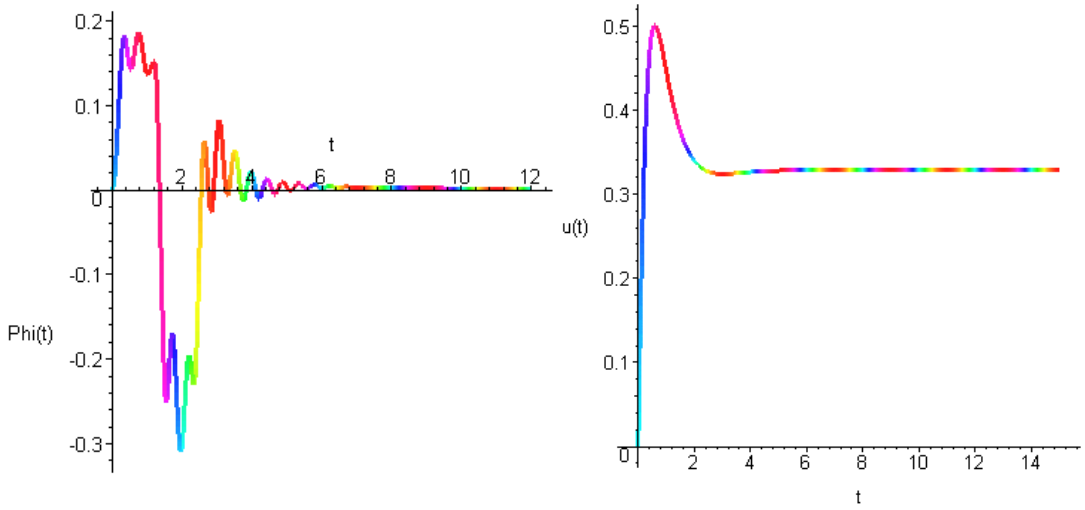



а) б)




в) г)

Рисунок 6 – Зміна кутової швидкості автомобіля om(t) і кутової швидкості причепа om1(t) у функції часу перехідного процесу за швидкості 15 м/с (а, в) і 25 м/с (б, г)




а) б)

Рисунок 7 – Зміна швидкості кута складання автопоїзда (а) і бічної швидкості причепа (б) у функції часу перехідного процесу за швидкості 15 м/с

Аналіз графіків зміни кута складання як за швидкості 15 м/с, так і швидкості 25 м/с показує, що протягом 0,3 с кут складання автопоїзда не перевищує 0,015 рад і причеп не виходить за допустиму смугу руху ($S_б=L_п\times tg0{,}015=0{,}02925$ м), проте з плином часу кут складання автопоїзда збільшується, причеп виходить за допустиму смугу руху ($S_{б15}=0{,}186$ м і $S_{б25}=0{,}375$ м). Разом з тим, коливальний процес причепа має затухаючий характер, рис. 6 *в,г* , рис. 7а, і бічна швидкість, рис. 7б, з плином часу стабілізуються, що свідчить про поліпшення стійкості руху автопоїзда.

**ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ**

Стійкість руху та, зокрема, бічна стійкість автопоїзда викликає серйозне занепокоєння. У порівнянні з односекційним транспортним засобом, наприклад автомобілем, стійкість руху автопоїзда зазвичай погіршується через несприятливий вплив причепа на динаміку та кінематику автопоїзда. Проведеними раніше дослідженнями встановлено, що за номінального навантаження автомобіля і причепа і рівності гальмівних сил на їх колесах силам зчеплення за швидкості 25 м/с автопоїзд залишається стійким у всьому діапазоні зміни загальної маси причепа, у той час як за швидкості 30 м/с критичною залишається маса причепа на рівні 2500 кг. При цьому не враховувалося асинхронність часу спрацьовування гальмівних систем автомобіля і причепа, а також вплив зусилля стискання у тягово-зчіпному пристрої на стійкість автопоїзда в процесі гальмування. У результаті проведеного дослідження показано, що протягом 0,3 с з початку гальмування нормальні реакції опорної поверхні на осях автомобіля майже не змінюються. Пояснюється дією зусилля у тягово-зчіпному пристрої. Це зусилля довантажує задню вісь автомобіля і компенсує його зменшення за рахунок дії сили інерції в центрі мас автомобіля. Поряд з автомобілем для причепа протягом 0,3 с нормальна реакція опорної поверхні на його здвоєну вісь залишається майже незмінною, потім протягом 0,1 с зростає, досягає свого максимуму і далі залишається незмінною. Такий характер зміни нормальних реакцій опорної поверхні на осі автомобіля і причепа, а відповідно і гальмівних сил призводить до того, що на шляху, що проходить автопоїзд за 0,3 с, стійкість автопоїзда може бути порушена дією зусилля стиску у тягово-зчіпному пристрої, що у подальшому було і доведено результатами моделювання гальмівного режиму автопоїзда. Аналіз графіків зміни кута складання як за швидкості 15 м/с, так і швидкості 25 м/с показує, що протягом 0,3 с кут складання автопоїзда не перевищує 0,015 рад і причеп не виходить за допустиму смугу руху ($S_б=L_п\times tg0{,}015=0{,}02925$ м), проте з плином часу кут складання автопоїзда збільшується, причеп виходить за допустиму смугу руху ($S_{б15}=0{,}186$ м і $S_{б25}=0{,}375$ м). Разом з тим, коливальний процес причепа має затухаючий характер і бічна швидкість, з плином часу стабілізуються, що свідчить про поліпшення стійкості руху автопоїзда.

**ВИСНОВКИ**

1. Доопрацьована математична модель малотоннажного автопоїзда у гальмівному режимі шляхом введення у вихідну систему рівнянь зусилля у тягово-зчіпному пристрої.

2. Визначені загальна гальмівна сила і уповільнення автопоїзда з урахуванням коефіцієнта

асинхронності. . При цьому встановлено, що протягом 0,3 с з початку гальмування нормальні реакції опорної поверхні на осях автомобіля майже не змінюються. Пояснюється дією зусилля у тягово-зчіпному пристрої. Це зусилля довантажує задню вісь автомобіля і компенсує його зменшення за рахунок дії сили інерції в центрі мас автомобіля.

3. Показано, що для причепа протягом 0,3 с нормальна реакція опорної поверхні на його здвоєну вісь залишається майже незмінною, потім протягом 0,1 с зростає, досягає свого максимуму і далі залишається незмінною. Такий характер зміни нормальних реакцій опорної поверхні на осі автомобіля і причепа, а відповідно і гальмівних сил призводить до того, що на шляху, що проходить автопоїзд за 0,3 с, стійкість автопоїзда може бути порушена дією зусилля стиску у тягово-зчіпному пристрої.

4. Встановлено, що за швидкості 25 м/с протягом 0,3 с кут складання автопоїзда не перевищує 0,015 рад і причеп не виходить за допустиму смугу руху ($S_б=L_п\times tg0{,}015=0{,}02925$ м), проте з плином часу кут складання автопоїзда збільшується, причеп виходить за допустиму смугу руху ($S_{б15}=0{,}186$ м і $S_{б25}=0{,}375$ м). Разом з тим, коливальний процес причепа має затухаючий характер і бічна швидкість з плином часу стабілізуються, що свідчить про поліпшення стійкості руху автопоїзда.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Сахно В. П., Поляков В. М., Ященко Д. М., Попелиш Д. М. До питання щодо гальмування шарнірно-зчленованих автобусів. Автошляховик України. 2021. № 2. С. 10–17.

2. Поляков В. М., Приходченко Д. Ю., Абрамов Д. А. Теоретичне дослідження впливу осьової нерівномірності гальмівних сил на стійкість автопоїзда. Вісник СНУ імені Володимира Даля. Луганськ : ВНТУ, 2007. № 6 (112). С. 59–62.

3. Shastry P., El-Gindy M., Nguyen N. Pickup Truck and Trailer Gross Vehicle Weight Study. SAE Technical Paper. 2019. № 2019-01-1109.

4. Kroll K. Auto/Trailer Combinations: Their Potential and Problems. SAE Technical Paper. 1971. № 710359.

5. Kang X., Deng W. Vehicle-trailer Handling Dynamics and Stability Control – an Engineering Review. SAE Technical Paper. 2007. № 2007-01-0822.

6. He Y., Islam M. M., Zhu S., Hu T. A design synthesis framework for directional performance optimization of multi-trailer articulated heavy vehicles with trailer lateral dynamic control systems. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering. 2017. Vol. 231, No. 8. P. 1096–1125.

7. Palkovics L., Fries A. Intelligent electronic systems in commercial vehicles for enhanced traffic safety. Vehicle System Dynamics. 2001. Vol. 35, Nos. 4–5. P. 227–289.

8. Winkler C. B. Rollover of heavy commercial vehicles. UMTRI Research Review. 2000. Vol. 31. P. 1–17.

9. Fancher P. S., Winkler C. B. Directional performance issues in evaluation and design of articulated heavy vehicles. Vehicle System Dynamics. 2007. Vol. 45, Nos. 7–8. P. 607–647.

10. Kharrazi S., Lidberg M., Fredriksson J. A generic controller for improving lateral performance of heavy vehicle combinations. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering. 2013. Vol. 227, No. 5. P. 619–642.

11. He Y., Islam M. M. An automated design method for active trailer steering systems of articulated heavy vehicles. ASME Journal of Mechanical Design. 2012. Vol. 134, № 041002. P. 1–15.

12. Гандзюк М. О., Гандзюк Д. М. Фактори, що впливають на стійкість руху автомобілів і автопоїздів у гальмівному режимі та критерії її оцінки. Сучасні технології в машинобудуванні і на транспорті. 2020. № 2 (15). С. 5–10.

13. Kudarauskas N. Analysis of emergency braking of a vehicle. Transport. 2007. Vol. 22, No. 3. P. 154–159. DOI: 10.1080/16484142.2007.9638118.

14. Гандзюк М. О., Гандзюк Д. М. Особливості моделювання динамічної взаємодії ланок малотоннажного автопоїзда при розгоні та русі по нерівній дорозі. Сучасні технології в машинобудуванні і на транспорті. 2022. № 2 (19). С. 54–62.

15. Li H., Jin H. Research on Personalized AEB Strategies Based on Self-Supervised Contrastive Learning. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2024. Vol. 25. P. 1303–1316.

16. Park M.-K., Lee S.-Y., Kwon C.-K., Kim S.-W. Design of Pedestrian target selection with Funnel Map for Pedestrian AEB System. IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2017. Vol. 66. P. 3597–3609.

17. Youshiha H., Awano S., Nagai M., Kamada T. Target Following Brake Control for Collision Avoidance Assist of Active Interface Vehicle. SICE-ICASE International Joint Conference : proceedings, Busan, Republic of Korea, 18–26 Oct. 2006. P. 4436–4439.

18. Liu Z., Cheng S., Wang S. Control Strategy of Automatic Emergency Braking System under Complex Road Conditions. Chinese Science and Technology Papers. 2022. Vol. 17. P. 221–227.

19. Guo L., Sun D. C., Ge P. S. Automatic Emergency Braking Model with Second-Order Collision Time under Complex Conditions. Machinery Design and Manufacture. 2022. Vol. 375. P. 127–131.

20. Gounis K., Bassiliades N. Intelligent momentary assisted control for autonomous emergency braking. Simulation Modelling Practice and Theory. 2022. Vol. 115. Article 102450.

21. Luo Q., Xu L. H. Research on Establishment and Simulation of Following Model Based on Minimum Safety Distance. Science Technology and Engineering. 2010. Vol. 10. P. 569–573.

22. Guan Y. Y. Research on Longitudinal Collision Warning and Automatic Emergency Braking Controller of Electric Vehicle : Ph.D. Thesis / Beijing Jiaotong University. Beijing, 2018.

23. Кузнєцов Р. М., Данилюк Р. Л. До питання стійкості сідельно-причіпного автопоїзда у гальмівному режимі. Наукові нотатки : міжвуз. зб. Луцьк : Вид-во ЛНТУ, 2011. Вип. 32. С. 197–199.

24. Кравчук П. М., Грищук О. К., Бабін Ю. В. Стійкість руху автопоїзда в режимі гальмування. Автошляховик України. 2008. С. 10–11.

25. Динаміка гальмування та теорія робочих процесів гальмівних систем колісних тракторів та тракторних поїздів : колект. монографія : у 3 т. / М. А. Подригало, О. С. Полянський, Д. В. Абрамов та ін. Харків : Естет Прінт, 2023. Т. 3. 164 с. ISBN 978-617-95214-5-4.

26. До аналізу процесу гальмування автомобіля з причепом категорії О2 / В. Сахно, В. Онищук, В. Босенко, С. Стельмащук. Сучасні технології в машинобудуванні та транспорті. № 2 (25). С. 254–265.

27. До визначення стійкості руху автомобіля з причепом категорії О2 у гальмівному режимі / В. Сахно, І. Мурований, В. Онищук, С. Стельмащук, М. Вінцюк. Сучасні проблеми в машинобудуванні і на транспорті. 2024. № 1 (22). С. 96–306.

28. Шарнірно-зчленовані автобуси. Маневреність та стійкість : монографія / В. П. Сахно та ін. Луцьк : ІВВ Луцького НТУ, 2021. 288 с.

## REFERENCES

1. Sakhno, V. P., Poliakov, V. M., Yashchenko, D. M., & Popelysh, D. M. (2021). Do pytannia shchodo halmuvannia sharnirno-zchlenovanykh avtobusiv [On the issue of braking of articulated buses]. Avtoshliakhovyk Ukrainy, 2, 10–17.

2. Poliakov, V. M., Prykhodchenko, D. Yu., & Abramov, D. A. (2007). Teoretychne doslidzhennia vplyvu osovoi nerivnomirnosti halmivnykh syl na stiikist avtopoizda [Theoretical study of the influence of axial unevenness of braking forces on the stability of a road train]. Visnyk SNU imeni Volodymyra Dalia, 6(112), 59–62.

3. Shastry, P., El-Gindy, M., & Nguyen, N. (2019). Pickup truck and trailer gross vehicle weight study (SAE Technical Paper No. 2019-01-1109). SAE International.

4. Kroll, K. (1971). Auto/trailer combinations: Their potential and problems (SAE Technical Paper No. 710359). SAE International.

5. Kang, X., & Deng, W. (2007). Vehicle-trailer handling dynamics and stability control – An engineering review (SAE Technical Paper No. 2007-01-0822). SAE International.

6. He, Y., Islam, M. M., Zhu, S., & Hu, T. (2017). A design synthesis framework for directional performance optimization of multi-trailer articulated heavy vehicles with trailer lateral dynamic control systems. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, 231(8), 1096–1125.

7. Palkovics, L., & Fries, A. (2001). Intelligent electronic systems in commercial vehicles for enhanced traffic safety. Vehicle System Dynamics, 35(4–5), 227–289.

8. Winkler, C. B. (2000). Rollover of heavy commercial vehicles. UMTRI Research Review, 31, 1–17.

9. Fancher, P. S., & Winkler, C. B. (2007). Directional performance issues in evaluation and design of articulated heavy vehicles. Vehicle System Dynamics, 45(7–8), 607–647.

10. Kharrazi, S., Lidberg, M., & Fredriksson, J. (2013). A generic controller for improving lateral performance of heavy vehicle combinations. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, 227(5), 619–642.

11. He, Y., & Islam, M. M. (2012). An automated design method for active trailer steering systems of articulated heavy vehicles. ASME Journal of Mechanical Design, 134(4), 041002.

12. Handziuk, M. O., & Handziuk, D. M. (2020). Faktory, shcho vplyvaiut na stiikist rukhu avtomobiliv i avtopoizdiv u halmivnomu rezhymi ta kryterii yii otsinky [Factors influencing the stability of motion of vehicles and road trains in braking mode and criteria for its evaluation]. Suchasni Tekhnolohii v Mashynobuduvanni i na Transporti, 2(15), 5–10.

13. Kudarauskas, N. (2007). Analysis of emergency braking of a vehicle. Transport, 22(3), 154–159. https://doi.org/10.1080/16484142.2007.9638118

14. Handziuk, M. O., & Handziuk, D. M. (2022). Osoblyvosti modeliuvannia dynamichnoi vzaiemodii lanok malotonnazhnoho avtopoizda pry rozghoni ta rusi po nerivnii dorozi [Features of modeling the dynamic interaction of links of a light-duty road train during acceleration and movement on uneven roads]. Suchasni Tekhnolohii v Mashynobuduvanni i na Transporti, 2(19), 54–62.

15. Li, H., & Jin, H. (2024). Research on personalized AEB strategies based on self-supervised contrastive learning. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 25, 1303–1316.

16. Park, M.-K., Lee, S.-Y., Kwon, C.-K., & Kim, S.-W. (2017). Design of pedestrian target selection with funnel map for pedestrian AEB system. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 66, 3597–3609.

17. Youshiha, H., Awano, S., Nagai, M., & Kamada, T. (2006). Target following brake control for collision avoidance assist of active interface vehicle. In Proceedings of the SICE-ICASE International Joint Conference (pp. 4436–4439). Busan, Republic of Korea.

18. Liu, Z., Cheng, S., & Wang, S. (2022). Control strategy of automatic emergency braking system under complex road conditions. Chinese Science and Technology Papers, 17, 221–227.

19. Guo, L., Sun, D. C., & Ge, P. S. (2022). Automatic emergency braking model with second-order collision time under complex conditions. Machinery Design and Manufacture, 375, 127–131.

20. Gounis, K., & Bassiliades, N. (2022). Intelligent momentary assisted control for autonomous emergency braking. Simulation Modelling Practice and Theory, 115, 102450.

21. Luo, Q., & Xu, L. H. (2010). Research on establishment and simulation of following model based on minimum safety distance. Science Technology and Engineering, 10, 569–573.

22. Guan, Y. Y. (2018). Research on longitudinal collision warning and automatic emergency braking controller of electric vehicle (Doctoral dissertation). Beijing Jiaotong University, Beijing, China.

23. Kuznietsov, R. M., & Danyliuk, R. L. (2011). Do pytannia stiikosti sidelno-prychipnoho avtopoizda u halmivnomu rezhymi [On the issue of stability of a semi-trailer road train in braking mode]. Naukovi Notatky, 32, 197–199.

24. Kravchuk, P. M., Hryshchuk, O. K., & Babin, Yu. V. (2008). Stiikist rukhu avtopoizda v rezhymi halmuvannia [Stability of road train motion in braking mode]. Avtoshliakhovyk Ukrainy, 10–11.

25. Podryhalo, M. A., Polianskyi, O. S., Abramov, D. V., et al. (2023). Dynamika halmuvannia ta teoriia robochykh protsesiv halmivnykh system kolisnykh traktoriv ta traktornykh poizdiv [Dynamics of braking and theory of working processes of braking systems of wheeled tractors and tractor trains] (Vol. 3). Kharkiv: Estet Print.

26. Sakhno, V., Onyshchuk, V., Bosenko, V., & Stelmashchuk, S. (n.d.). Do analizu protsesu halmuvannia avtomobilia z prychepom katehorii O2 [On the analysis of the braking process of a vehicle with a category O2 trailer]. Suchasni Tekhnolohii v Mashynobuduvanni ta Transporti, 2(25), 254–265.

27. Sakhno, V., Murovanyi, I., Onyshchuk, V., Stelmashchuk, S., & Vintsiuk, M. (2024). Do vyznachennia stiikosti rukhu avtomobilia z prychepom katehorii O2 u halmivnomu rezhymi [On determining the stability of motion of a vehicle with a category O2 trailer in braking mode]. Suchasni Problemy v Mashynobuduvanni i na Transporti, 1(22), 96–306.

28. Sakhno, V. P., et al. (2021). Sharnirno-zchlenovani avtobusy. Manevrenist ta stiikist [Articulated buses. Maneuverability and stability]: Monograph. Lutsk: IVV Lutskoho NTU.

***V. Stelmashchuk, S.Stelmashchuk*** **Influence of effort in the traction and coupling on the stability of a light-tongue road train in the braking mode**

The braking of a light-duty road train is often complicated by additional forces transmitted through the traction-coupling device, which can trigger jackknifing and loss of lateral stability. Earlier studies have shown that, under nominal loading and when braking forces on all wheels equal the coupling forces, the road train remains stable across the full range of trailer masses at 25 m/s; at 30 m/s the critical trailer mass drops to about 2500 kg. Those models, however, did not account for two factors: timing asynchrony between the car's and trailer's braking systems, and the compression force in the traction-coupling device.

This work refines the planar braking model of a light-duty road train to include both effects and analyses the transient response to step braking at initial speeds of 15 m/s and 25 m/s.

The results show that during the first 0.3 s after braking begins, the normal road reactions on the car and trailer axles remain almost unchanged, because the compression force in the coupling absorbs part of the longitudinal load transfer. Over this interval the articulation angle stays below 0.015 rad and the trailer's lateral deviation does not cross the lane boundary ($S_b = L_n \cdot \tan(0.015) = 0.029$ m). With time, however, the articulation angle grows and the trailer drifts beyond the lane: $S_b = 0.186$ m at $V = 15$ m/s and $S_b = 0.375$ m at $V = 25$ m/s. The trailer's lateral oscillations are damped and its lateral velocity stabilises over time, so the road train eventually recovers stability.

The compression force in the traction-coupling device therefore proves a non-negligible factor within the first 0.3 s of braking and should be included in stability assessments of light-duty road trains.

**Key words:** light-duty road train; braking; traction-coupling device; jackknifing; articulation angle; lateral stability; longitudinal load transfer; brake timing asynchrony.

*СТЕЛЬМАЩУК Валерій Віталійович*, кандидат технічних наук, доцент кафедри автомобілів і транспортних технологій Луцького національного технічного університету, e-mail: Val.stelmashchuk@gmail.com. https://orcid.org/0000-0003-3813-3143

*СТЕЛЬМАЩУК Станіслав Валерійович,* аспірант четвертого року навчання кафедри автомобілів і транспортних технологій, Луцький національний технічний університет, stanislav0077@ukr.net, https://orcid.org/0009-0009-6981-1040

*Valery STELMASHCHUK*, Ph.D in Engeneering, associate professor of automobiles and transport technologies department, Lutsk National Technical University, e-mail: Val.stelmashchuk@gmail.com. https://orcid.org/0000-0003-3813-3143.

*Stanislav STELMASHCHUK*, fourth-year postgraduate student at the Department of Automobiles and Transport Technologies, Lutsk National Technical University. *stanislav0077@ukr.net*, https://orcid.org/0009-0009-6981-1040

Дата надходження статті до видання: 27.03.2026
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 24.04.2026
https://doi.org/10.36910/wvqsev09