

**ВИБІР МЕТОДУ АПРОКСИМАЦІЇ ШВИДКІСНОЇ ЗОВНІШНЬОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ
ДИЗЕЛЯ**

Стаття присвячена вибору методу апроксимації швидкісних зовнішніх характеристик дизелів, що є важливим етапом математичного моделювання при визначенні показників експлуатаційних властивостей автомобілів.

Проведено аналіз швидкісних зовнішніх характеристик сучасних дизелів з турбонаддувом та електронними системами управління подачею палива та встановлено, що такі двигуни мають область постійного крутного моменту в широкому діапазоні кутових швидкостей колінчастого вала. Це створює додаткові труднощі при їх аналітичному описі та потребує вибору відповідного методу апроксимації.

Розглянуто можливості використання різних методів апроксимації, таких як поліноміальна апроксимація за методом Лагранжа та методом найменших квадратів, а також кусочно-лінійна апроксимація. Встановлено, що поліноміальні методи можуть забезпечити високу точність лише для характеристик з гладкою кривою крутного моменту, яка спочатку зростає, досягає максимуму, а потім спадає. Проте для дизелів із областю постійного крутного моменту вони демонструють значні похибки. Збільшення ступеня поліному покращує точність апроксимації, але, навіть, поліноми 6-го ступеня не дозволяють точно описати область постійного крутного моменту та утворюють на ній локальні екстремуми (вигини).

Показано, що кусочно-лінійна апроксимація дозволяє точно відтворити швидкісну зовнішню характеристику дизеля з областю постійного крутного моменту. Для дизеля Volkswagen CAYD встановлено, що розбивка діапазону кутових швидкостей на п'ять ділянок забезпечує найвищу точність апроксимації. Зменшення кількості ділянок до трьох призводить до деякого зниження точності апроксимації, проте залишається достатньо високою і переважає апроксимацію поліномом 6-го ступеня з використанням методу найменших квадратів.

Таким чином, кусочно-лінійна апроксимація є оптимальним методом для апроксимації швидкісних зовнішніх характеристик дизелів з областю постійного крутного моменту.

Ключові слова: дизель, швидкісна зовнішня характеристика, апроксимація, поліноміальна апроксимація, кусочно-лінійна апроксимація, математичне моделювання.

ВСТУП

При проведенні теоретичних досліджень експлуатаційних властивостей автомобілів, зокрема тягово-швидкісних властивостей та паливної економічності, необхідно мати математичну модель двигуна внутрішнього згоряння (ДВЗ). Одним із ключових параметрів такої моделі є залежність крутного моменту від кутової швидкості або частоти обертання колінчастого вала, яка визначається на основі швидкісних характеристик двигуна, наприклад, швидкісної зовнішньої характеристики. Точний опис цієї залежності дозволяє прогнозувати поведінку автомобіля в різних режимах роботи та здійснювати подальшу оцінку його експлуатаційних властивостей.

Фізичні процеси, які відбуваються в ДВЗ, є складними для аналітичного опису, а експериментальні дані, отримані в результаті стендових або дорожніх випробувань, часто подані у вигляді дискретних точок на швидкісних характеристиках, що ускладнює подальший аналіз і використання таких даних у математичних розрахунках. Тому, для їхньої обробки необхідно використовувати методи апроксимації, які дозволяють подати залежність крутного моменту від кутової швидкості колінчастого вала ДВЗ у вигляді аналітичної функції.

Апроксимація відіграє важливу роль у математичному моделюванні, адже вона дозволяє не лише узагальнити експериментальні результати, а й забезпечити їхнє зручне використання у розрахунках. Вибір відповідного підходу до апроксимації впливає на точність опису вихідних характеристик, а також на складність подальших обчислень. Саме тому порівняння різних методів апроксимації є важливим завданням, що дозволяє визначити оптимальний спосіб подання швидкісних характеристик дизеля для підвищення якості досліджень та забезпечення достовірності отриманих результатів.

АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Аналіз літературних даних щодо побудови швидкісних зовнішніх характеристик автомобільних двигунів виявляє різноманітні підходи до математичного моделювання та апроксимації цих характеристик.

Так, у підручнику [1] розрахунок швидкісних зовнішніх характеристик двигуна запропоновано здійснювати за методом С.Р. Лейдермана з використанням поліномів третього ступеня для

розрахунку кривої потужності двигуна та другого – для кривої крутного моменту. Така методика прийнятно апроксимує криві потужності та моменту лише у випадку, якщо графіки цих характеристик являють собою плавні криві, опуклі нагору та не мають перегинів. Для швидкісних характеристик, що мають складніший вигляд запропоновано використовувати регресійну модель з поліномами п'ятого ступеня.

У роботі [2] запропоновано удосконалений метод С.Р. Лейдермана в якому емпіричні коефіцієнти поліному розраховуються з використанням коефіцієнтів пристосованості двигуна за крутним моментом і кутовою швидкістю колінчастого вала. Цей підхід дозволив підвищити точність опису залежності крутного моменту від кутової швидкості.

У дослідженні [3] розроблено методику математичного моделювання швидкісних характеристик ДВЗ, яка враховує залежність крутного моменту від кутової швидкості колінчастого вала та коефіцієнта відкриття заслінки подачі палива. Перевірка працездатності методики в пакеті Matlab підтверджує її ефективність для моделювання характеристик двигунів.

Робота [4] присвячена аналізу швидкісних зовнішніх характеристик деяких двигунів автомобільної техніки Державної прикордонної служби України. Авторами встановлено, що традиційні методи розрахунку з використанням поліноміальних рівнянь не завжди точно описують експериментальні дані та запропоновано уточнити значення коефіцієнтів розрахункових залежностей шляхом апроксимації експериментальних даних поліномом третього ступеня, що дозволяє зменшити похибку розрахунків.

У роботі [5] запропоновано метод побудови моделі швидкісної зовнішньої характеристики двигуна на основі F-розподілу. Цей метод включає використання F-тесту з дисперсійним аналізом для оцінки різниці квадратів залишків між послідовними рівняннями регресії. Якщо тест не проходить, ступінь поліному автоматично підвищується до тих пір, поки різниця не стане незначною. Такий підхід надає теоретичний критерій для побудови моделі швидкісної зовнішньої характеристики двигуна та забезпечує високу точність апроксимації.

Автори дослідження [6] розробили математичну модель, яка описує характеристики дизеля з урахуванням швидкості (частоти) та навантаження в широкому діапазоні. Ця модель дозволяє об'єктивно оцінити тягову динаміку та витрату палива колісного трактора під час виконання основних сільськогосподарських операцій. Автори також підкреслюють важливість врахування змінного характеру тягового навантаження трактора та використання тестових циклів PowerMix для забезпечення повторюваності експериментів.

У роботі [7] розглянуто можливість застосування методу поліноміальної інтерполяції Лагранжа, для опису швидкісних зовнішніх характеристик дизеля ANDORIA. Запропонована методика дозволяє спростити експериментальні дослідження, зберігаючи мінімальну кількість вимірювальних точок з подальшою аналітичною оцінкою відсутніх даних, що сприяє оптимізації процесу випробувань та зменшенню експлуатаційних витрат.

У дослідженні [8] розроблено алгоритм для моделювання як атмосферних, так і двигунів з турбонаддувом з використанням експоненційної математичної моделі для опису кривих потужності та крутного моменту. Автори порівняли результати моделювання з даними, отриманими під час стендових випробувань двигунів, що дозволило оцінити точність запропонованої моделі.

Отже, аналіз літературних даних свідчить про наявність різних підходів до моделювання та апроксимації швидкісних характеристик автомобільних двигунів. Кожен із розглянутих методів має свої переваги та обмеження, що вказує на необхідність подальших досліджень для визначення оптимальних способів апроксимації кривої крутного моменту дизеля.

ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕНЬ

Метою роботи є вибір та обґрунтування методу апроксимації швидкісних зовнішніх характеристик дизелів з областю постійного крутного моменту. Для досягнення поставленої мети в роботі вирішуються такі задачі: аналіз особливостей швидкісних зовнішніх характеристик сучасних дизелів з турбонаддувом та електронними системами керування подачею палива; дослідження різних методів апроксимації швидкісних зовнішніх характеристик дизелів; оцінка точності апроксимації швидкісних зовнішніх характеристик дизелів з використанням різних методів апроксимації, визначення похибок та їх впливу на математичне моделювання процесу руху автомобіля; визначення оптимального методу апроксимації для дизелів з областю постійного крутного моменту.

РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Швидкісна характеристика ДВЗ є визначальною залежністю, яка показує зміну основних показників двигуна, таких як ефективна потужність, крутний момент, годинна та питома витрата

палива, тощо, від кутової швидкості або частоти обертання колінчастого вала.

Швидкісні характеристики поділяються на зовнішні та часткові. Швидкісна зовнішня характеристика отримується при повній подачі палива і показує максимальні можливості двигуна по потужності та крутному моменту в усьому діапазоні кутових швидкостей колінчастого вала. Ця характеристика є визначальною для оцінки тягово-швидкісних властивостей автомобіля, оскільки вона відображає поведінку двигуна при максимальному навантаженні. Часткові швидкісні характеристики, навпаки, отримуються при неповній, але постійній подачі палива і використовуються для аналізу роботи двигуна в умовах часткових навантажень, що є типовими для реальних умов експлуатації. [9]

Традиційно, швидкісна зовнішня характеристика ДВЗ має певну форму (рис. 1): крутний момент M_k поступово зростає з підвищенням кутової швидкості колінчастого вала до досягнення максимального значення, після чого починає знижуватися. Це зниження обумовлене конструктивними особливостями двигуна та обмеженнями процесів згоряння палива. Проте у сучасних двигунах, особливо у дизелів з наддувом, спостерігається інша тенденція: після досягнення певної кутової швидкості крутний момент виходить на плато і залишається практично постійним у широкому діапазоні кутових швидкостей колінчастого вала. Це явище відоме як «плато» або «полиця» крутного моменту.

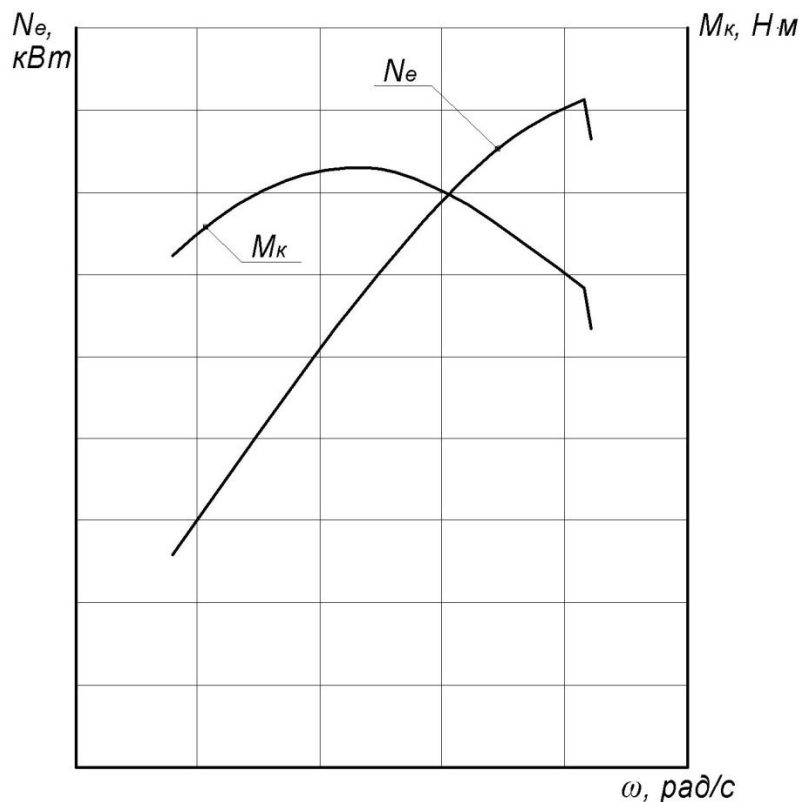


Рисунок 1 – Швидкісна зовнішня характеристика дизеля

На рис. 2 приведено швидкісні зовнішні характеристики дизелів Volkswagen CAYD (2.0 TDI) та Renault K9K (1.5 dCi), які мають характерну область постійного крутного моменту. Тут, сталі значення крутного моменту у 250 та 200 Н·м досягаються при частотах обертання 1500-2500 об/хв та 1500-3000 об/хв для двигунів Volkswagen CAYD та Renault K9K відповідно. [10, 11]

Наявність такого «плато» крутного моменту в сучасних дизелях забезпечує поліпшення динамічних характеристик автомобіля, оскільки забезпечується стабільна тяга в широкому діапазоні швидкостей та зниження витрати палива, оскільки двигун може пристосовуватися до зміни навантаження, що викликається зміною умов руху, без необхідності частих переключень передач.

Досягнення області постійного крутного моменту стало можливим завдяки впровадженню сучасних технологій, таких як турбонаддув зі змінною геометрією, послідовний турбонаддув, наддув з електричним приводом, системи багатоточкового та багаторазового впорскування, електронні системи управління двигуном, тощо. Ці технології дозволяють точно контролювати процес згоряння

та оптимізувати роботу двигуна в різних режимах, забезпечуючи постійний крутний момент на широкому діапазоні кутових швидкостей колінчастого вала двигуна.

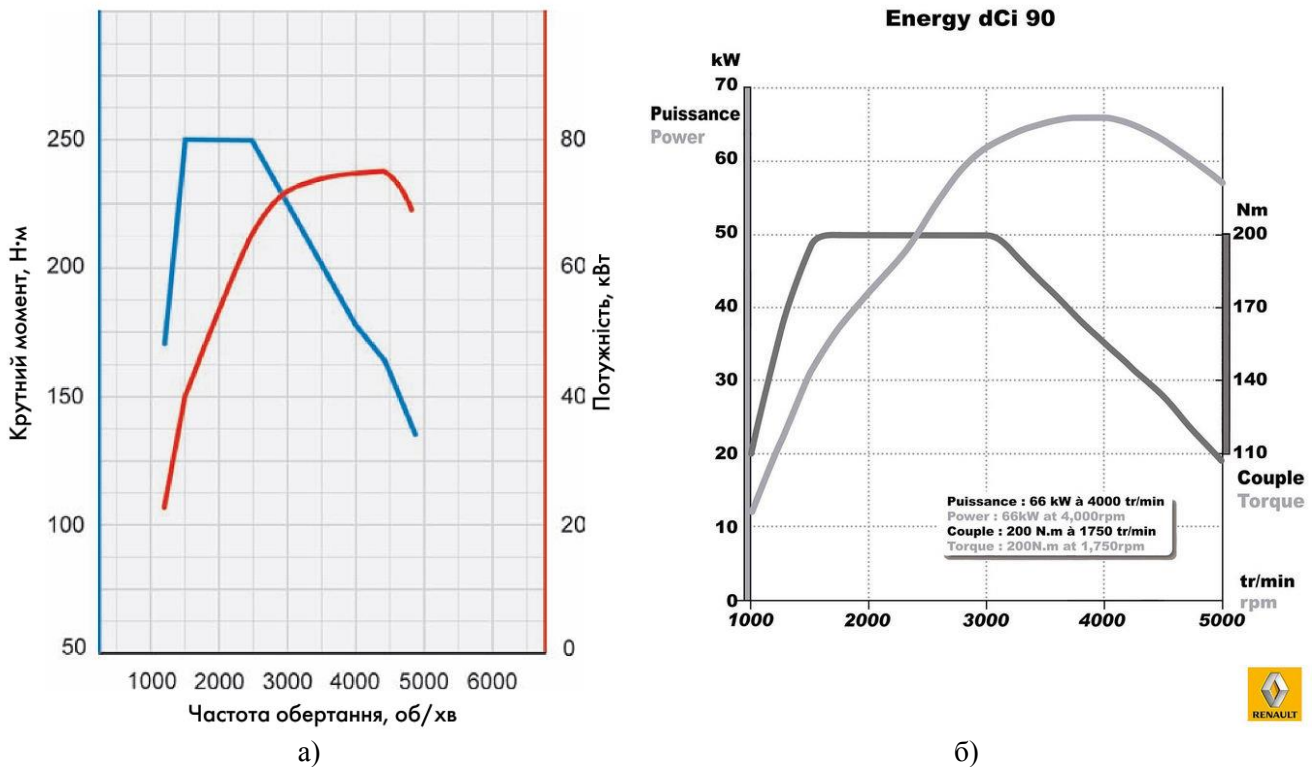


Рисунок 2 – Швидкісні зовнішні характеристики сучасних дизелів [10, 11]:
а) Volkswagen CAYD; б) Renault K9K

Проте швидкісні зовнішні характеристики, які мають область постійного крутного моменту, погано апроксимуються стандартними методами, зокрема поліноміальною апроксимацією другого ступеня. Традиційні підходи, такі як інтерполяція за методом Лагранжа, ефективно описують характеристики з плавним спадом або зростанням моменту, але виявляються малопридатними для відтворення горизонтальної ділянки («плато»).

При апроксимації швидкісної зовнішньої характеристики двигуна за допомогою інтерполяційної формули Лагранжа другого ступеня залежність апроксимаційної кривої крутного моменту від кутової швидкості задається у вигляді:

$$M_k(\omega) = M_1 \frac{(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_3)}{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 - \omega_3)} + M_2 \frac{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_3)}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 - \omega_3)} + M_3 \frac{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}{(\omega_3 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_2)}, \quad (1)$$

де M_1, M_2, M_3 – крутний момент в опорних точках, Н·м;

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – кутова швидкість колінчастого вала в опорних точках, рад/с.

В якості опорних точок обираються характерні точки швидкісної зовнішньої характеристики. Доцільним є вибір таких точок: [12]

$\omega_1 = \omega_{\min}, M_1 = M_{k,\min}$ – мінімальна кутова швидкість колінчастого вала двигуна, рад/с, та крутний момент, Н·м, при цій кутовій швидкості;

$\omega_2 = \omega_M, M_2 = M_{k,\max}$ – кутова швидкість колінчастого вала двигуна при максимальному крутному моменті двигуна, рад/с та максимальний крутний момент, Н·м;

$\omega_3 = \omega_N, M_3 = M_N$ – кутова швидкість колінчастого вала двигуна при максимальній потужності двигуна, рад/с та крутний момент при максимальній потужності, Н·м.

Після підстановки значень опорних точок у залежність (1) отримуємо залежність [12]

$$M_k(\omega) = a \cdot \omega^2 + b \cdot \omega + c \quad (2)$$

де a, b, c – сталі коефіцієнти, котрі визначаються:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{M_N - M_{\kappa.\min} - \frac{M_{\kappa.\max} - M_{\kappa.\min}}{\omega_M - \omega_{\min}} \cdot (\omega_N - \omega_{\min})}{\omega_N^2 - (\omega_M + \omega_{\min}) \cdot \omega_N - \omega_{\min}^2 + (\omega_M + \omega_{\min}) \cdot \omega_{\min}} \\
 b &= \frac{M_{\kappa.\max} - M_{\kappa.\min}}{\omega_M - \omega_{\min}} - a \cdot (\omega_M + \omega_{\min}) \cdot \omega_{\min} \\
 c &= M_{\kappa.\min} - a \cdot \omega_{\min}^2 - b \cdot \omega_{\min}
 \end{aligned} \quad (3)$$

Такий метод апроксимації добре працює з швидкісними характеристиками двигунів, у яких крутний момент змінюється плавно (рис. 1), проте у випадку характеристик із вираженою областю сталого моменту подібні підходи мають значні недоліки. Поліном другого ступеня намагається з'єднати опорні точки пливою кривою, що не дозволяє точно відтворити горизонтальну ділянку «плато». Це призводить до того, що у області постійного моменту апроксимаційна функція може мати похибки, спричиняючи або надмірне підвищення значень, або їх заниження у проміжних точках.

Також виникає проблема з вибором значення точки $\omega_2 = \omega_M$, адже кутова швидкість вала двигуна при максимальному крутному моменті двигуна змінюється у широких межах. У результаті застосування стандартних методів для апроксимації характеристик двигунів з областю постійного крутного моменту дає незадовільні результати, що вимагає використання більш точних методів відтворення таких залежностей.

Одним із таких методів є метод найменших квадратів, який широко використовується для апроксимації експериментальних даних. Цей метод дозволяє знайти таку аналітичну залежність між змінними, яка мінімізує суму квадратів відхилень між теоретично розрахованими та експериментально отриманими значеннями.

Суть методу найменших квадратів полягає у підборі коефіцієнтів полінома певного ступеня так, щоб наближена функція якнайкраще описувала вихідні дані [13]. Для апроксимації швидкісної зовнішньої характеристики двигуна, зокрема залежності крутного моменту від кутової швидкості колінчастого вала, можна використовувати поліноміальну залежність виду:

$$M_{\kappa}(\omega) = a_0 + a_1 \cdot \omega + a_2 \cdot \omega^2 + \dots + a_n \cdot \omega^n, \quad (4)$$

де $M_{\kappa}(\omega)$ – апроксимоване значення крутного моменту, Н·м;

ω – кутова швидкість колінчастого вала двигуна, рад/с;

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – коефіцієнти полінома, які визначаються з розв'язання системи нормальних рівнянь.

Коефіцієнти полінома визначаються таким чином, щоб мінімізувати функцію похибки, яка є сумою квадратів різниць між апроксимованими та експериментальними значеннями крутного моменту:

$$S = \sum_{i=1}^m (M_{\kappa i} - M_{\kappa}(\omega_i))^2 \rightarrow \min, \quad (5)$$

де $M_{\kappa i}$ – експериментальні значення крутного моменту, Н·м;

$M_{\kappa}(\omega_i)$ – значення крутного моменту апроксимованої функції у відповідних точках, Н·м;

m – кількість експериментальних точок.

Експериментальні значення крутного моменту отримуються під час проведення стендових випробувань двигуна або з швидкісної зовнішньої характеристики на основі даних заводу-виробника. Кількість експериментальних точок m залежить від бажаної точності апроксимації, а також очікуваної складності розрахунків і зазвичай складає $m = 7 \dots 10$.

В таблиці 1 приведено експериментальні значення крутного моменту для дизеля Volkswagen CAYD отримані з його швидкісної зовнішньої характеристики (рис. 2а).

Таблиця 1 – Параметри швидкісної зовнішньої характеристики дизеля Volkswagen CAYD

n_i , об/хв	1200	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4400	4800
ω_i , рад/с	125,66	157,08	209,44	261,80	314,16	366,52	418,88	460,77	502,65

M_{ki} , Н·м	170	250	250	250	226	202	178	164	135
N_{ei} , кВт	21,36	39,27	52,36	65,45	71,00	74,04	74,56	75,57	67,86

На основі даних таблиці 1 було проведено апроксимацію з використанням методу найменших квадратів та отримано поліноміальні залежності від 2-го до 6-го ступеня. Для оцінки точності апроксимації використовувались коефіцієнт детермінації R^2 та середньоквадратична похибка ε .

Коефіцієнт детермінації показує, наскільки добре отримана апроксимаційна залежність описує вихідні дані. Він визначається як: [14]

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^m (M_{ki} - M_k(\omega_i))^2}{\sum_{i=1}^m (M_{ki} - M_{кр})^2}, \quad (6)$$

де $M_{кр}$ – середнє значення крутного моменту за всіма експериментальними точками, Н·м;

Значення R^2 змінюється у межах 0...1. Чим ближче воно до 1, тим точніше апроксимаційна функція описує вихідні дані.

Середньоквадратична похибка характеризує середній рівень відхилення апроксимаційної залежності від експериментальних даних. Вона визначається як: [15]

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (M_{ki} - M_k(\omega_i))^2}. \quad (7)$$

Результати апроксимації з використанням методу найменших квадратів приведено в таблиці 2.

Таблиця 2 – Результати апроксимації кривої крутного моменту дизеля Volkswagen CAYD з використанням методу найменших квадратів.

Ступінь поліному	Коефіцієнти поліному							R^2	ε , Н·м
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
2	107,88	1,02	$-1,96 \cdot 10^{-3}$	-	-	-	-	0,796	18,442
3	-135,98	3,93	$-1,22 \cdot 10^{-3}$	$1,08 \cdot 10^{-5}$	-	-	-	0,912	12,145
4	-623,52	11,71	$-5,45 \cdot 10^{-3}$	$1,07 \cdot 10^{-4}$	$-7,58 \cdot 10^{-8}$	-	-	0,964	7,696
5	-1283,53	24,93	-0,154	$4,54 \cdot 10^{-4}$	$-6,55 \cdot 10^{-7}$	$3,68 \cdot 10^{-10}$	-	0,975	6,413
6	-3852,36	87,08	-0,747	$3,33 \cdot 10^{-3}$	$-8,13 \cdot 10^{-6}$	$1,03 \cdot 10^{-8}$	$-5,3 \cdot 10^{-12}$	0,993	3,360

Проаналізувавши дані таблиці 2 встановлено, що поліноми 2-го та 3-го ступеня не забезпечують достатньої точності апроксимації кривої крутного моменту дизеля Volkswagen CAYD, оскільки мають низькі значення коефіцієнта детермінації ($R^2 < 0,92$) та високу середньоквадратичну похибку, особливо у полінома 2-го ступеня.

Поліноми 4-го і вищих ступенів демонструють прийнятну точність ($R^2 > 0,96$), проте, навіть, вони недостатньо добре описують область постійного крутного моменту (рис. 3) та утворюють локальні екстремуми (вигини). Це спричинено тим, що глобальна поліноміальна функція намагається мінімізувати похибку на всьому діапазоні кутових швидкостей колінчастого вала, що може призводити до штучних коливань у зоні, де крутний момент повинен залишатися незмінним. Так, у полінома 4-го ступеня такий вигин кривої призводить до зростання значення максимального крутного моменту на 13,2 Н·м, а у 6-го на 9,1 Н·м.

Крім того, зі збільшенням ступеня полінома значно зростає складність математичної моделі та трудомісткість розрахунків. Тому, доцільним є використання інших методів, наприклад, кусочно-лінійної апроксимації, яка дозволяє більш точно відобразити особливості протікання швидкісної характеристики особливо у області постійного крутного моменту.

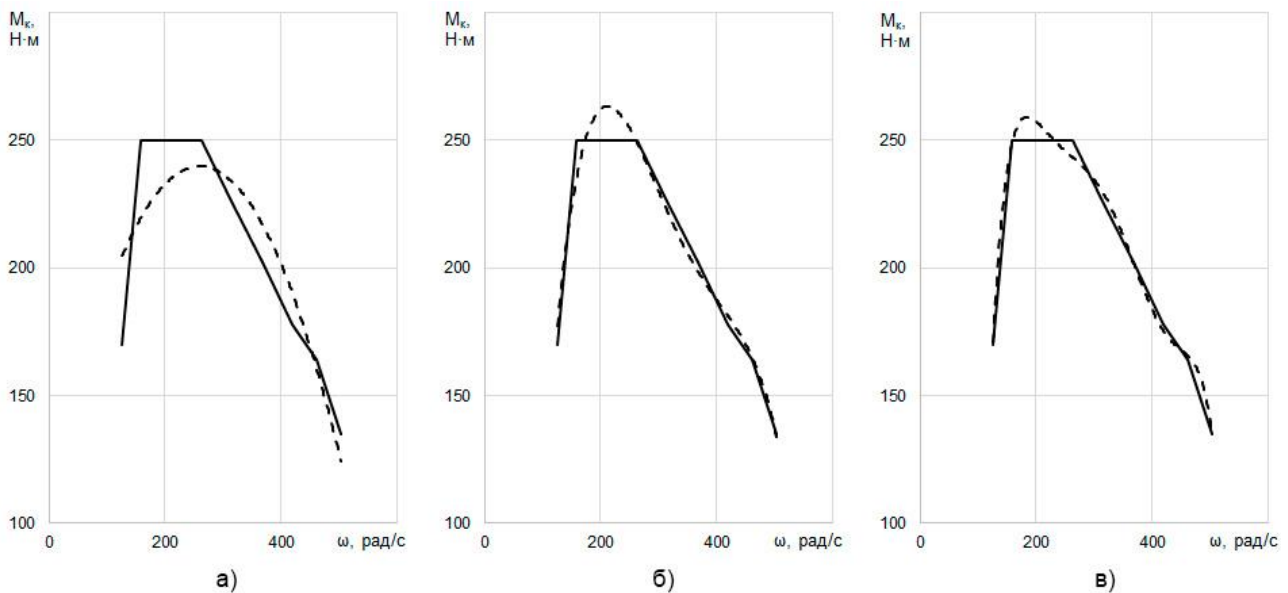


Рисунок 3 – Порівняння впливу ступеня поліному на характер апроксимованої кривої крутного моменту дизеля Volkswagen CAYD з використанням методу найменших квадратів:
а) 2-й ступінь; б) 4-й ступінь; в) 6-й ступінь.

Загальний вигляд кусочно-лінійної апроксимації для функції $M_k(\omega)$:

$$M_k(\omega) = \begin{cases} a_1 \cdot \omega + b_1, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \\ a_2 \cdot \omega + b_2, & \omega_2 \leq \omega \leq \omega_3 \\ \dots & \\ a_n \cdot \omega + b_n, & \omega_{n-1} \leq \omega \leq \omega_n \end{cases}, \quad (8)$$

де a_i та b_i – коефіцієнти лінійних залежностей для кожного відрізка апроксимації, які визначаються як: [16]

$$a_i = \frac{M_{k,i+1} - M_{k,i}}{\omega_{i+1} - \omega_i}, \quad (9)$$

$$b_i = M_{k,i} - a_i \cdot \omega_i.$$

Для дизеля Volkswagen CAYD діапазон зміни частоти обертання колінчастого вала доцільно розбити на п'ять ділянок (I – 1200-1500 об/хв, II – 1500-2500 об/хв, III – 2500-4000 об/хв, IV – 4000-4400 об/хв та V – 4400-4800 об/хв) і відповідні ним кутові швидкості колінчастого вала на яких крива крутного моменту двигуна носить лінійний характер (рис.4).

У таблиці 3 приведено результати кусочно-лінійної апроксимації кривої крутного моменту дизеля Volkswagen CAYD з використанням залежностей (8) та (9) для п'яти запропонованих ділянок.

Як видно з даних таблиці кусочно-лінійна апроксимація забезпечує точний опис кривої крутного моменту ($R^2 = 1$, $\varepsilon = 0$), проте при цьому дещо зростає трудомісткість розрахунків, адже необхідно описувати кожну окрему ділянку кривої крутного моменту, що може ускладнювати використання цього методу в математичних моделях.

Для спрощення можна об'єднати деякі ділянки, у яких поведінка функції змінюється незначно. Наприклад, для дизеля Volkswagen CAYD доцільно об'єднати ділянки III, IV та V, в результаті чого точність апроксимації дещо знижується (табл. 4), так коефіцієнт детермінації R^2 складе 0,994, а середньоквадратична похибка ε – 3,249 Н·м, проте залишається достатньо високою і, навіть, переважає апроксимацію поліномом 6-го ступеня з використанням методу найменших квадратів. Характер протікання кривої крутного моменту також змінюється незначно (рис. 5)

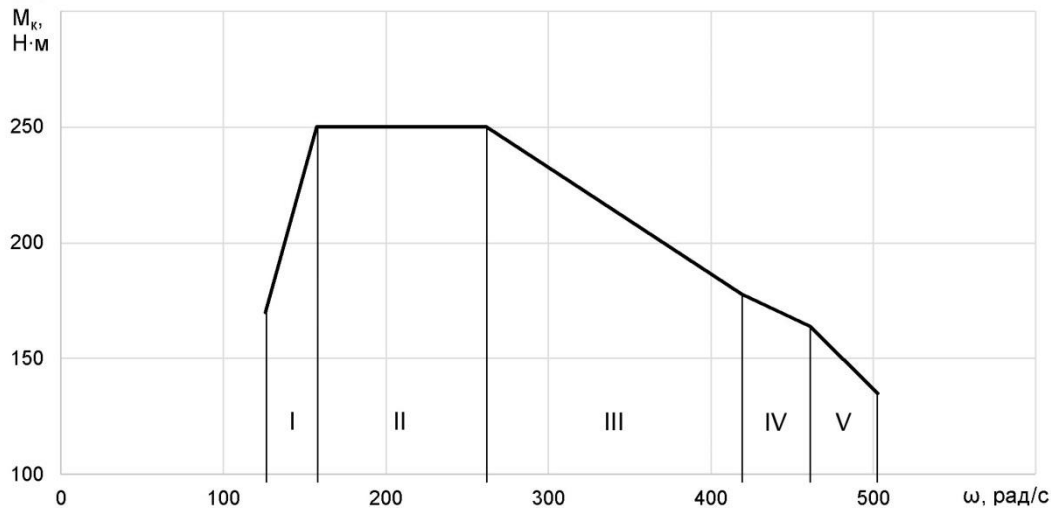


Рисунок 4 – Ділянки кривої крутного моменту

ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Результати дослідження підтверджують, що традиційні поліноміальні методи апроксимації, зокрема метод Лагранжа, забезпечують прийнятну точність для опису швидкісних зовнішніх характеристик дизелів тільки з плавною зміною крутного моменту, спочатку його зростанням, досягненням максимуму, а потім – зниженням. Проте сучасні дизелі, зазвичай, мають виражену область постійного крутного моменту (так зване «плато» або «полиця») і для них такі методи демонструють значні похибки, оскільки поліноміальна функція не здатна точно відобразити горизонтальну ділянку графіка, що призводить до завищення або заниження значень моменту в проміжних точках та унеможливорює коректне моделювання поведінки двигуна з урахуванням реальних умов експлуатації автомобіля.

Таблиця 3 – Результати кусочно-лінійної апроксимації кривої крутного моменту дизеля Volkswagen CAYD з розбивкою на п'ять ділянок.

Номер ділянки	Діапазон частоти обертання n на ділянці, об/хв	Діапазон зміни кутової швидкості ω на ділянці, рад/с	Лінійні коефіцієнти	
			a_i	b_i
I	1200-1500	125,66-157,08	2,546	-150
II	1500-2500	157,08-261,80	-	250
III	2500-4000	261,80-418,88	-0,458	370
IV	4000-4400	418,88-460,77	-0,334	318
V	4400-4800	460,77-502,65	-0,692	483
Коефіцієнт детермінації R^2				1
Середньоквадратична похибка ε , Н·м				0

Таблиця 4 – Результати кусочно-лінійної апроксимації кривої крутного моменту дизеля Volkswagen CAYD з розбивкою на три ділянки.

Номер ділянки	Діапазон частоти обертання n на ділянці, об/хв	Діапазон зміни кутової швидкості ω на ділянці, рад/с	Лінійні коефіцієнти	
			a_i	b_i
I	1200-1500	125,66-157,08	2,546	-150
II	1500-2500	157,08-261,80	-	250
III	2500-4800	261,80-502,65	-0,477	375
Коефіцієнт детермінації R^2				0,994
Середньоквадратична похибка ε , Н·м				3,249

Застосування методу найменших квадратів дозволяє досягти вищої точності апроксимації, оскільки він мінімізує суму квадратів відхилень апроксимаційної кривої від експериментальних точок швидкісної зовнішньої характеристики. Проте для дизелів із областю постійного крутного моменту цей метод також має обмеження, оскільки, залежно від вибору ступеня поліному, можуть виникати небажані викривлення функції. Крім того, при визначенні показників експлуатаційних властивостей автомобіля, зокрема тягово-швидкісних властивостей, шляхом інтегрування диференціального рівняння руху автомобіля бажано використовувати поліном 2-го ступеня, адже зі збільшенням ступеня полінома значно зростає складність і трудомісткість розрахунків. При цьому поліном 2-го ступеня не забезпечує необхідної точності апроксимації ($R^2 = 0,796$). У таких випадках більш ефективним є використання кусочно-лінійної апроксимації, яка дозволяє описувати характеристику двигуна окремими відрізками прямих, що дає змогу точніше відобразити зміну моменту у всьому діапазоні кутових швидкостей колінчастого вала.

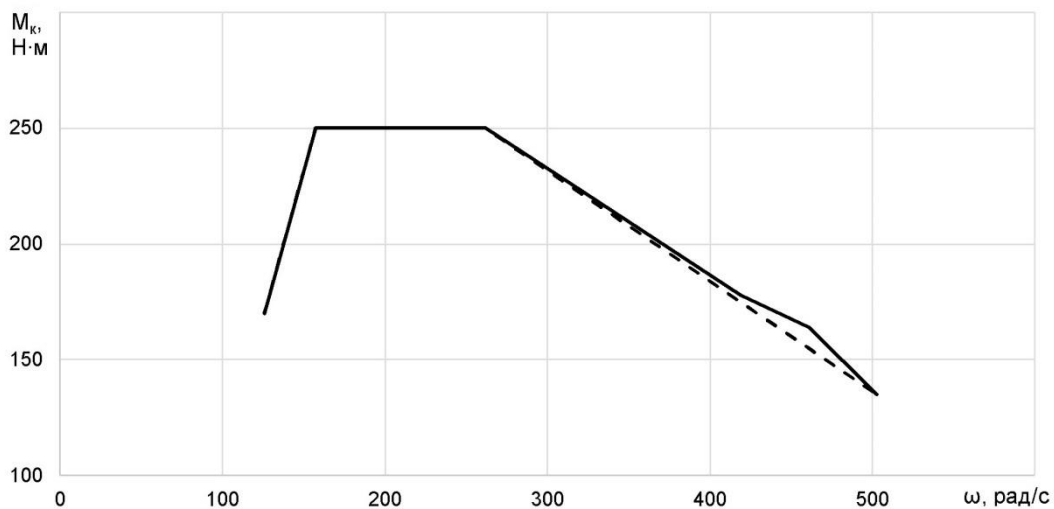


Рисунок 5 – Кусочно-лінійна апроксимація кривої крутного моменту дизеля Volkswagen CAYD з розбивкою на три ділянки

Основна перевага цього методу полягає у відсутності небажаних вигинів та коливань апроксимаційної кривої, які часто спостерігаються при використанні поліномів вищого ступеня, що дозволяє значно точніше описувати області сталого крутного моменту, які є характерними для сучасних дизелів із турбонаддувом та електронними системами управління подачею палива.

Таким чином, вибір методу апроксимації залежить від характеру швидкісної зовнішньої характеристики дизеля. Для традиційних двигунів із плавною зміною моменту достатньо поліноміальної апроксимації другого або третього ступеня, тоді як для двигунів із областю постійного крутного моменту ефективніше використовувати кусочно-лінійну апроксимацію.

ВИСНОВКИ

В результаті проведеного дослідження було встановлено, що сучасні дизелі, оснащені турбонаддувом та електронними системами управління подачею палива, мають швидкісні зовнішні характеристики з областями постійного крутного моменту в широкому діапазоні зміни кутових швидкостей колінчастого вала та потребують інших підходів до їх апроксимації.

Проаналізовано різні методи апроксимації швидкісних зовнішніх характеристик дизелів та встановлено, що поліноміальні методи, такі як метод Лагранжа та метод найменших квадратів можуть забезпечувати високу точність апроксимації тільки для характеристик з гладкою кривою крутного моменту, яка спочатку зростає, досягає максимуму, а потім спадає. Для дизелів із областю постійного крутного моменту такі методи демонструють значні похибки (для поліному 2-го ступеня коефіцієнт детермінації R^2 складає 0,796, а середньоквадратична похибка $\varepsilon = 18,442$ Н·м), що може призводити до некоректного математичного моделювання процесу руху автомобіля. Збільшення ступеня поліному призводить до зниження похибок, проте, навіть, поліноми 6-го ступеня не дозволяють точно описати область постійного крутного моменту та утворюють на ній локальні екстремуми (вигини).

Встановлено, що найбільш ефективним методом апроксимації швидкісних зовнішніх характеристик дизелів з областю постійного крутного моменту є кусочно-лінійна апроксимація, з розбивкою всього діапазону кутових швидкостей колінчастого вала на окремі ділянки та опису кривої крутного моменту за допомогою лінійних функцій. При розбивці діапазону кутових швидкостей швидкісної зовнішньої характеристики двигуна Volkswagen CAYD на п'ять ділянок, кусочно-лінійна апроксимація забезпечує точне описання кривої крутного моменту. Зменшення кількості ділянок до трьох призводить до деякого зниження точності апроксимації (коефіцієнт детермінації R^2 складає 0,994, а середньоквадратична похибка ε – 3,249 Н·м), проте залишається достатньо високою і переважає апроксимацію поліномом 6-го ступеня з використанням методу найменших квадратів

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Основи конструкції, теорія автомобілів : підручник / В.І. Сирота, В.П. Сахно, Д.М. Яценко, О.В. Сирота. – Київ : Міленіум, 2023. – 443 с.
2. Про побудову зовнішньої швидкісної характеристики автомобільного двигуна розрахунковим методом / І. М. Хоменко // Вісник Чернігівського державного технологічного університету. Серія : Технічні науки. – 2014. – № 2. – С. 93-99. – Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vcndtn_2014_2_16
3. Войтенко В. А. Швидкісні характеристики двигуна внутрішнього згорання та їх математичне моделювання // Автоматизація технологічних і бізнес-процесів. – 2012. – №. 9-10. – С. 16-20. – Режим доступу: <https://doi.org/10.15673/2312-3125.9-10/2012.35016>
4. Псьол С. Аналіз зовнішніх швидкісних характеристик деяких двигунів автомобільної техніки Державної прикордонної служби України / С. Псьол, В. Мазур // Збірник наукових праць Національної академії Державної прикордонної служби України. Серія: військові та технічні науки. – 2019. – №. 3(81). – С. 447-463. – Режим доступу: <https://doi.org/10.32453/3.v81i3.487>
5. Li J. Research on the Establishing Model Method of Engine Eternal Characteristic Curve Based on F Distribution / J. Li, G. Y. Lin, Q. F. Xia // Advanced Materials Research. – 2014. – Vol. 971. – P. 684-687. – Режим доступу: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.971-973.684>
6. Rebrov O. Mathematical model of diesel engine characteristics for determining the performance of traction dynamics of wheel-type tractor / O. Rebrov, A. Kozhushko, B. Kalchenko, A. Mamontov, A. Zakovorotniy // EUREKA: Physics and Engineering. – 2020. – №. 4. – P. 90-100. – Режим доступу: <https://doi.org/10.21303/2461-4262.2020.001352>
7. Stoeck T. Application of the polynomial interpolation method for determining performance characteristics of a diesel engine / T. Stoeck, K. F. Abramek // Metrology and Measurement Systems. – 2014. – Vol. 21. – №. 1. – P. 157-168. – Режим доступу: <https://doi.org/10.2478/mms-2014-0015>
8. Di Rado G. R. Implementation of an exponential mathematical model of power-torque curves in an algorithm for natural aspirated and turbocharged internal combustion engines / G. R. Di Rado, D. S. P. García // WSEAS transactions on applied and theoretical mechanics. Athens. – 2023. – Vol. 18. – P. 84-93. – Режим доступу: <https://doi.org/10.37394/232011.2023.18.9>
9. Абрамчук Ф.І. Автомобільні двигуни: Підручник / Ф.І. Абрамчук, Ю.Ф. Гутаревич, К.С. Долганов, І.І. Тимченко. – К.: Арістей, 2004. – 476 с.
10. Self Study Programs (SSP) 472 – The Caddy 2011 / Volkswagen AG. – Wolfsburg, 2010. – 47 p.
11. Kangoo establishes new fuel consumption record with new 'Energy' engines [Електронний Ресурс] – Режим доступу : <https://www.autosportfoto.sk/spravodajstvo/clanok/kangoo-establishes-new-fuel-consumption-record-with-new-energy-engines>
12. Сахно В.П. Математична модель для визначення тягово-швидкісних властивостей автомобіля при використанні двигунів різної потужності. / Сахно В.П., Корпач О.А. // Управління проектами, системний аналіз і логістика. – К. : НТУ – 2012. – Вип. 9. – С. 165-171. – Режим доступу: http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&P21DBN=UJRN&IMAGE_FILE_DOWNLOAD=1&Image_file_name=PDF/Upsal_2012_9_39.pdf
13. Порівняльний аналіз методів апроксимації / Н.В. Грищенко, С.О. Семеріков, Є.В. Чернов, О.А. Хараджян – Кривий Ріг: КДПІ, 1998. – 25 с.
14. Бідюк, П. І. Прикладна статистика / П.І. Бідюк, В.Я. Данилов, О.Л. Жиров. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 186 с.
15. Колисниченко І.Ю. Поліноміальна апроксимація динамічних сигналів одноплатформених

ЖД ваг / І.Ю. Колисниченко, В.В. Ткачов // Електротехніка та електроенергетика. – 2021. – №. 2. – С. 44-52. – Режим доступу : <https://doi.org/10.15588/1607-6761-2021-2-5>

16. Задачин В. М. Чисельні методи : навчальний посібник / В. М. Задачин, І. Г. Конюшенко. – Х. : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 180 с.

REFERENCES

1. Syrota, V.I., Sakhno, V.P., Yashchenko & D.M., Syrota, O.V. (2023) Osnovy konstruktsii, teorii avtomobiliv : pidruchnyk. Kyiv: Milenium.
2. Khomenko, I. M. (2014) Pro pobudovu zovnishnoi shvydkisnoi kharakterystyky avtomobilnoho dvyhuna rozrakhunkovym metodom. Visnyk Chernihivskoho derzhavnoho tekhnolohichnoho universytetu. Serii : Tekhnichni nauky, 2, 93-99. http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vcndtn_2014_2_16
3. Voitenko, V. A. (2014). Shvydkisni kharakterystyky dvyhuna vnutrishnoho zghorannia ta yikh matematychni modeliuvannia. Avtomatyzatsiia tekhnolohichnykh i biznes-protsesiv, 9(9-10), 16-20. <https://doi.org/10.15673/2312-3125.9-10/2012.35016>
4. Psol, S., & Mazur, V. (2020). Analiz zovnishnikh shvydkisnykh kharakterystyk deiakykh dvyhuniv avtomobilnoi tekhniky derzhavnoi prykordonnoi sluzhby ukrainy. Zbirnyk naukovykh prats Natsionalnoi akademii Derzhavnoi prykordonnoi sluzhby Ukrainy. Serii: viiskovi ta tekhnichni nauky, 81(3), 447–463. <https://doi.org/10.32453/3.v81i3.487>
5. Li, J., Lin, G. Y., & Xia, Q. F. (2014). Research on the Establishing Model Method of Engine External Characteristic Curve Based on F Distribution. Advanced Materials Research, 971, 684–687. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.971-973.684>
6. Rebrov, O., Kozhushko, A., Kalchenko, B., Mamontov, A., Zakovorotniy, A., Kalinin, E., & Holovina, E. (2020). Mathematical model of diesel engine characteristics for determining the performance of traction dynamics of wheel-type tractor. EUREKA: Physics and Engineering, 4, 90–100. <https://doi.org/10.21303/2461-4262.2020.001352>
7. Stoeck, T., & Abramek, K. F. (2014). Application of the polynomial interpolation method for determining performance characteristics of a diesel engine. Metrology and Measurement Systems, 21(1), 157–168. <https://doi.org/10.2478/mms-2014-0015>
8. Di Rado, G. R., & García, D. S. P. (2023). Implementation of an Exponential Mathematical Model of Power-Torque Curves in an Algorithm for Natural Aspirated and Turbocharged Internal Combustion Engines. WSEAS transactions on applied and theoretical mechanics, 18, 84–93. <https://doi.org/10.37394/232011.2023.18.9>
9. Abramchuk, F.I., Hutarevych, Yu.F., Dolhanov, K.Ie., & Tymchenko, I.I. (2004). Avtomobilni dvyhuny: Pidruchnyk. Kyiv: Aristei.
10. Self Study Programs (SSP) 472 – The Caddy 2011 (2010). Wolfsburg: Volkswagen AG.
11. Kangoo establishes new fuel consumption record with new ‘Energy’ engines (2012). <https://www.autosportfoto.sk/spravodajstvo/clanok/kangoo-establishes-new-fuel-consumption-record-with-new-energy-engines>
12. Sakhno V.P., & Korpach O.A. (2012). Matematychna model dlia vyznachennia tiahovo-shvydkisnykh vlastyvostei avtomobilia pry vykorystanni dvyhuniv riznoi potuzhnosti. Upravlinnia proektamy, systemnyi analiz i lohistyka. Tekhnichna serii, 9, 165-171. http://irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?C21COM=2&I21DBN=UJRN&P21DBN=UJRN&IMAGE_FILE_DOWNLOAD=1&Image_file_name=PDF/Upsal_2012_9_39.pdf
13. Hryshchenko, N.V., Semerikov, S.O., Chernov, Ye.V. & Kharadzhan O.A. (1998) Porivnialnyi analiz metodiv aproksymatsii. Kryvyi Rih: KDPI.
14. Bidiuk, P.I., Danylov, V.Ia., & Zhyrov, O.L. (2023) Prykladna statystyka. Kyiv: KPI im. Ihoria Sikorskoho.
15. Kolysnychenko, I., & Tkachov, V. (2021). Polynomial approximation of dynamic signals of single platform railway scales. Electrical Engineering and Power Engineering, 2, 44-52. <https://doi.org/10.15588/1607-6761-2021-2-5>
16. Zadachyn, V. M., & Koniushenko, I. H. (2014) Chyselni metody: navchalnyi posibnyk. Kharkiv: Vyd. KhNEU im. S. Kuznetsia.

O. Korpach, A. Trubenok Optimal Approximation Method for Diesel Engine External Speed Characteristics

This article focuses on selecting an optimal approximation method for the external speed

characteristics of diesel engines, a critical step in mathematical modeling for evaluating vehicle performance parameters.

An analysis of modern turbocharged diesel engines with electronic fuel injection systems has shown that they exhibit a constant torque region over a wide range of crankshaft angular velocities. This feature complicates their analytical representation and necessitates the selection of an appropriate approximation method.

Various approximation techniques were examined, including polynomial approximation using Lagrange interpolation and the least squares method, as well as piecewise linear approximation. It was found that polynomial methods provide high accuracy only for torque curves with a smooth increase, peak, and subsequent decline. However, for diesel engines with a constant torque region, these methods introduce significant errors. Increasing the polynomial degree improves accuracy to some extent, but even sixth-degree polynomials fail to accurately capture the constant torque region, introducing artificial oscillations and local extrema.

Results indicate that piecewise linear approximation effectively reconstructs the external speed characteristics of diesel engines with a constant torque region. For the Volkswagen CAYD diesel engine, segmenting the angular velocity range into five sections provided the highest accuracy. Reducing the number of segments to three slightly decreased accuracy but still outperformed sixth-degree polynomial approximation using the least squares method.

Consequently, piecewise linear approximation is identified as the most suitable method for approximating the external speed characteristics of diesel engines with a constant torque region.

Keywords: diesel engine, external speed characteristics, approximation, polynomial approximation, piecewise linear approximation, mathematical modeling.

КОРПАЧ Олексій Анатолійович, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри автомобілів, Національний транспортний університет, e-mail: korpach1988@gmail.com. <https://orcid.org/0000-0002-2496-4395>

ТРУБЕНЮК Андрій Анатолійович, аспірант, Національний транспортний університет, e-mail: andrey-akpp@ukr.net. <https://orcid.org/0009-0003-5875-7647>

Oleksii KORPACH, PhD in Engineering, Associate professor, Associate professor Department of Automobiles, National Transport University, e-mail: korpach1988@gmail.com. <http://orcid.org/0000-0002-2496-4395>

Andrii TRUBENOK, Postgraduate student, National Transport University, e-mail: andrey-akpp@ukr.net. <https://orcid.org/0009-0003-5875-7647>

DOI 10.36910/automash.v1i24.1728