

Хаврук В.О.  
Національний транспортний університет, Київ, Україна

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ І КРИТЕРІЇ ОПТИМАЛЬНОЇ ПОТУЖНОСТІ СТАНЦІЇ ТЕХНІЧНОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ АВТОМОБІЛІВ

У роботі розглядаються моделі розімкнених систем масового обслуговування (СМО) з обмеженою довжиною черги для трьох форм організації роботи станції технічного обслуговування (СТО) автомобілів: А – без взаємодопомоги виконавців; В – з частковою взаємодопомогою виконавців; С – з повною взаємодопомогою виконавців.

З'ясовані і наведені формули для визначення таких характеристик моделей СМО для СТО як: ймовірність того, що усі пости СТО вільні; ймовірність того, що всі пости СТО зайняті обслуговуванням; ймовірність втрати заявки; ймовірність того, що усі пости зайняті обслуговуванням і в черзі знаходиться певне число заявок; середнє число постів СТО, зайнятих обслуговуванням; середнє число заявок в черзі; число автомобілів, що покинули чергу; середній час перебування автомобілів в черзі.

Представлена схема взаємозв'язку між формами організації праці в СТО і рівнями конкуренції на ринку автосервісних послуг дає можливість вибору однієї із трьох моделей СМО для розрахунку оптимальної потужності СТО.

На стадії проектування СТО обґрунтовано необхідність враховувати загальноприйнятний критерій оптимальної потужності СТО – строк окупності капітальних вкладень. Коректування поточних витрат виробничої діяльності СТО рекомендовано виконувати такими змінними параметрами, як: кількість постів однакового призначення; чисельність робітників на одному посту з певним розрядом; кваліфікація робітників певного розряду; кількість однойменного обладнання; тривалість зміни, включаючи роботу у понад нормований час.

Охарактеризовано метод динамічного програмування, який передбачає розрахунки коефіцієнта ефективності кожного кроку із збільшення (зменшення) числа певного ресурсу. Дохідну складову цільової функції прибутку СТО поставлено в залежність від кількості обслуговувань, яка безпосередньо впливає на величину коефіцієнта завантаження потужності СТО.

Математичний апарат, розглянутий в даному дослідженні може бути використаний як на початковому етапі – при створенні СТО, так і для оптимізації потужності автосервісу при різних формах конкуренції.

**Ключові слова:** автомобіль, виконавець, заявка, ймовірність, обслуговування, пост, потужність, система масового обслуговування, станція технічного обслуговування.

### ВСТУП

У сфері автосервісу спостерігається значна конкуренція, особливо це характерно в містах, де для автовласників свої послуги пропонує велика кількість станцій технічного обслуговування (СТО), причому виникає ситуація, коли одне СТО має велику кількість замовлень і навіть існує черга автомобілів, а в інших СТО – навпаки недозавантаженість – декілька автомобілів на день. Існує ряд факторів, які впливають на вибір автовласниками того чи іншого СТО: 1) співвідношення ціна/якість запасних частин і ремонтів; 2) зручність розташування СТО; 3) швидкість виконання робіт і репутація СТО. Зважаючи на вже існуючі СТО, при створенні нового СТО необхідно вирішувати два питання: 1) визначити найбільш оптимальну потужність СТО, при цьому щоб були максимально використовані виробничі приміщення; 2) надавати якісно і швидко авторемонтні послуги, які найбільш затребувані автовласниками, для забезпечення максимальної завантаженості СТО – використання потужності СТО.

Таким чином актуальними є дослідження, спрямовані на з'ясування та визначення оптимальної потужності СТО, яке створюється при існуючій конкуренції з уже діючими СТО.

### АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРНИХ ДАНИХ ТА ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Питання оптимізаційного моделювання СТО розглядають зокрема такі науковці, як: Бідняк М.Н., Біліченко В.В., Костьян Н.Л., Кужель В.П., Огневий В.О., Солтус А.П., Тарандушка Л.А., Фірсов І.В.

Наведені раніше дослідження показали, що для розрахунку техніко-економічних показників СТО необхідно мати їх характеристики, в якості системи масового обслуговування (СМО). Застосування теорії масового обслуговування і її ефективність показана в роботах [1; 2]. У дослідженні болгарських авторів Грозєва Д., Мілчева М., Гергієва І. [2] використаний цілий арсенал математичних моделей, який дозволяє розрахувати показники СТО як СМО при різних значеннях

рівня конкуренції і форм організації праці. Але їх велике число ускладнює використання навіть в наукових дослідженнях.

У цих дослідженнях розглядалася можливість існування 4-х видів конкуренції: гострої, помірної, слабкої і нульової. Але експериментальні спостереження показують, що нульова конкуренція, що відповідає монопольній, по мірі розвитку ринку у сфері автосервісу стає чисто теоретичною.

У зв'язку з цим був виконаний аналіз усіх розглянутих аналітичних моделей СМО для СТО, на основі якого можливо зробити висновок про надмірність їх кількості для практичного застосування при визначенні оптимальної потужності автосервісу.

Отже, виникає необхідність у виконанні додаткових досліджень та обґрунтуванні можливості зменшення кількості математичних моделей визначення оптимальної потужності новостворюваного або діючого СТО за найбільш поширених трьох основних видів конкуренції: жорсткої, помірної і слабкої, при трьох основних форм організації роботи виконавців: за відсутності взаємодопомоги, при частковій взаємодопомозі і при повній взаємодопомозі робітників.

### ЦІЛЬ ТА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянути моделі СМО для визначення потужності СТО, охарактеризувати складові критеріїв оптимальної потужності станцій технічного обслуговування автомобілів.

### РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ

Аналіз математично використаних раніше моделей СМО показав, що число їх можна значно зменшити за рахунок застосування базових моделей, які дозволяють апроксимувати різноманіття виробничих ситуацій без значного заниження точності і адекватності реальним процесам. В якості таких були вибрані математичні моделі розімкнених систем масового обслуговування з обмеженою довжиною черги для трьох форм організації роботи:

А – без взаємодопомоги виконавців;

В – з частковою взаємодопомогою виконавців;

С – з повною взаємодопомогою виконавців.

Виходячи з вказаних міркувань, були виділені три базові моделі СМО [1–11], які при різних значеннях параметрів дозволяють розрахувати показники СТО для усіх можливих рівнів конкуренції і форм організації роботи.

Розглянемо на першому етапі моделі функціонування СТО при відсутності взаємодопомоги між виконавцями. У такій СМО за наявності в системі заявок більше числа постів  $n$  і деякої заданої кількості автомобілів  $m$  в черзі, наступна чергова заявка покидає систему. Після розв'язку диференціальних рівнянь стану системи були отримані характеристики [1; 2; 5; 6]:

1) ймовірність того, що усі пости СТО вільні:

$$P_o = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{\psi^k}{k!} + \frac{\psi^n}{n!} \sum_{s=1}^m \left(\frac{\psi}{n}\right)^s} \quad (1)$$

2) ймовірність того, що всі  $n$  постів СТО зайняті обслуговуванням:

$$P_n = \frac{\psi^n}{n!} \cdot P_o = \frac{\frac{\alpha^n}{n!}}{\sum_{k=1}^n \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!} \psi \cdot \frac{1 - \psi^m}{1 - \psi}} \quad (2)$$

3) ймовірність того, що усі пости зайняті обслуговуванням і в черзі знаходиться рівно  $m$  заявок:

$$P_{n+m} = P_{відм} = \frac{\psi^n}{n!} \left(\frac{\psi}{n}\right)^m \cdot P_o = \psi^m \cdot P_n \quad (3)$$

За початкових умов при наявності в черзі допустимого числа заявок  $m$ , автомобіль покидає СТО, тому  $P_{n+m} = P_{відм}$ .

4) середнє число постів СТО, зайнятих обслуговуванням:

$$M_p = \sum_{k=1}^n kP_k + n \sum_{k=1}^m P_{n+k} = n\psi(1 - \psi^m P_n) \quad (4)$$

5) середнє число заявок в черзі:

$$M_{оч} = \sum_{k=1}^m K \cdot P_{n+k} = P_n \psi \frac{1 - \psi^m \cdot [n(1 - \psi) + 1]}{(1 - \psi)^2} \quad (5)$$

6) число автомобілів, що покинули чергу:

$$\lambda_0 = \lambda \cdot \psi^m \cdot P_n \quad (6)$$

7) середній час перебування автомобілів в черзі:

$$t_{оч} = \frac{M_a}{\lambda} \quad (7)$$

Прийнявши в цих формулах  $m = \infty$ , тобто число заявок в черзі необмеженим, отримуємо формули, за якими можливо розрахувати показники СТО, яке діє в умовах відсутності конкуренції. І навпаки. При  $m = 0$ , отримуємо характеристики СТО, яке діє в умовах жорсткої конкуренції, коли автомобіль за відсутності вільних постів негайно покидає СТО. Очевидно, що на практиці мережі підприємств автосервісу такі ситуації можуть мати місце чисто теоретично і ймовірністю їх появи можна нехтувати. В той же час, широкий діапазон  $m$  від 1 до 10 цілком охоплює найбільш типові режими роботи СТО при різних рівнях конкуренції по усіх видах спеціалізації. Виняток можуть становити роботи з фарбування і кузовні, для яких як виняток можна застосувати достатньо прості математичні моделі з відмовами [5–11], які передбачають відсутність черги. Проте і для цього випадку така дисципліна черги рідкісна, зважаючи на неявний характер очікування чергової заявки моменту початку обслуговування за домовленістю з виконавцями.

Для форми організації роботи (модель  $B$ ), що передбачає часткову взаємодопомогу виконавців приймається також математична модель з обмеженою довжиною черги, у якій робітники можуть групуватися по  $l$  осіб на одному посту [2]:

1) ймовірність того, що усі пости зайняті:

$$P_h = \frac{\frac{\alpha_e^h}{h!}}{\left( \sum_{k=0}^h \frac{\alpha_e^k}{k!} + \frac{\alpha_e^h}{h!} \right) \cdot \psi \cdot \frac{(1 - \psi)^{n-h+m}}{(1 - \psi)}} \quad (8)$$

2) ймовірність втрати заявки:

$$P_{n+m} = \psi^{n-h+m} \cdot P_h \quad (9)$$

3) середнє число автомобілів, що знаходяться в черзі:

$$M_a = \frac{P_h \cdot \psi^{n+1} \cdot (1 - \psi^m \cdot (m \cdot (1 - \psi) + 1))}{(1 - \psi)^2} \quad (10)$$

4) число автомобілів, що покинули чергу:

$$\lambda_0 = \lambda \cdot P_{n+m} \quad (11)$$

7) середній час перебування автомобілів в черзі:

$$t_{оч} = \frac{M_a}{\lambda}, \quad (12)$$

де  $\alpha_e = \frac{\alpha}{vl}$  – зведена щільність потоку заявок.

У цих формулах параметр  $h = \frac{n}{l}$  – величина заокруглена до цілочисленого значення і при невеликій кількості постів  $n$  наведені формули дають певні похибки. Крім того, ефективність використання роботи другого і подальшого виконавця на одному посту нижче, ніж одного (першого). У зв'язку з цим округлення величини  $h$  доцільно у більшу сторону.

У цій моделі приймалося, що обсяг робіт на одному посту обмежений  $l$  числом робітників, які підключаються до обслуговування чергового автомобіля у разі, якщо ці робітники вільні.

Очевидно, що число одночасно працюючих робітників на одному посту обмежене технологією виконання робіт і кількістю несправностей обслуговуваного автомобіля. Якщо виконується профілактичне технічне обслуговування ТО-1 або ТО-2, чисельність робітників буде більшою, а ефективність їх практично однакова, зважаючи на регламентований перелік операцій.

У цих же умовах працюють виконавці і на малих СТО. Але, зважаючи на нечисленність постів і робітників в певних ситуаціях, коли на постах знаходиться усього лише один автомобіль, всі вільні виконавці можуть братися за технічне обслуговування або ремонт цього автомобіля. Якщо на СТО поступає другий автомобіль, бригада розподіляється між автомобілями порівну і т.д. При повному завантаженні усіх постів, кожний робітник (група робітників) працює на своєму посту, тобто взаємодопомога не надається.

Для такої дисципліни обслуговування справедлива математична модель [5–11] розімкнених СМО з обмеженою довжиною черги  $m$  і повною взаємодопомогою між виконавцями (модель С), розрахункові формули, які дозволяють визначити основні показники подібних СТО [1; 2; 6]:

1) ймовірність того, що усі пости зайняті:

$$P_n = \psi^n \frac{1 - \psi^{m+1}}{1 - \psi^{n+m+1}} \quad (13)$$

2) ймовірність втрати заявки:

$$P_n = 1 - P_{n+m} = \frac{1 - \psi^{n+m}}{1 - \psi^{n+m+1}} \quad (14)$$

3) середнє число зайнятих постів:

$$M_p = n \cdot \psi \frac{1 - \psi^{n+m}}{1 - \psi^{n+m+1}} \quad (15)$$

4) середнє число заявок в черзі:

$$M_a = \psi \cdot \frac{1 - \psi^m [m(1 - \psi) + 1]}{1 - \psi^{n+m+1} (1 - \psi)} \quad (16)$$

5) середнє число заявок, що покинули чергу:

$$\lambda_0 = \lambda \cdot (1 - P_{\text{обс}}) = \lambda P_{n+m} \quad (17)$$

6) середній час перебування автомобілів в черзі:

$$t_{\text{оч}} = \frac{M_a}{\lambda} \quad (18)$$

Наведені моделі функціонування  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , відображають в основному властивості внутрішнього середовища СТО, в якому може бути набута та або інша форми організації праці робітників на постах технічного обслуговування (ТО) і ремонту автомобілів, автозаправних станцій і автостоянках. Між тим, є кореляційний зв'язок між формами організації праці і рівнем конкуренції (рис. 1).

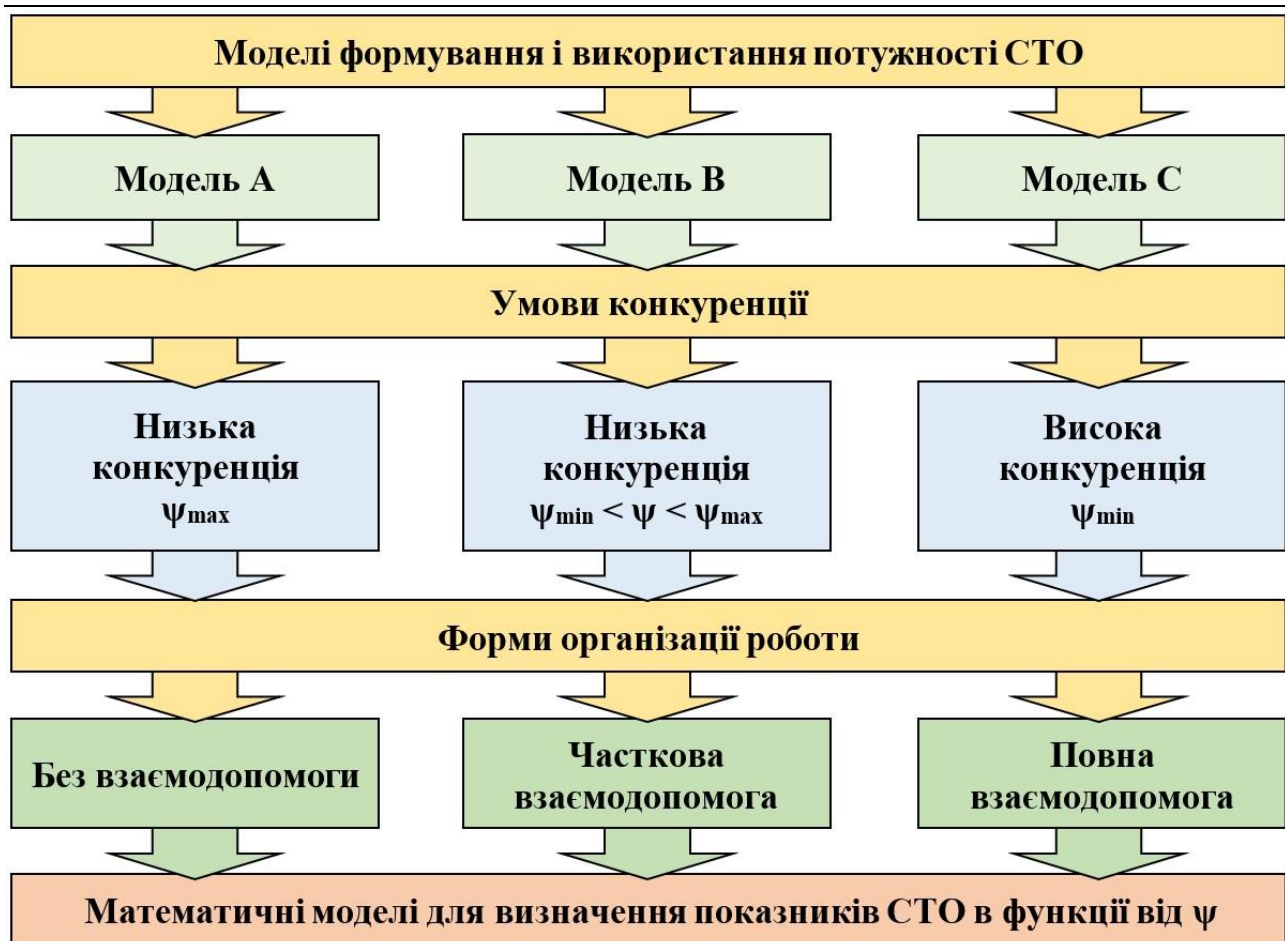


Рисунок 1 – Взаємозв'язок між рівнями конкуренції і формами організації роботи

Так, можна припустити, що при високому коефіцієнті завантаження постів робітникам недоцільно надавати один одному допомогу, оскільки кожний із них зайнятий роботою на своєму посту. При помірному завантаженні постів можливо припустити, що в окремі періоди часу вільні від роботи виконавці можуть періодично підключатися до обслуговування автомобіля, що стоїть на сусідньому посту. Але така взаємодопомога обмежена, як вказувалось вище, технологічними можливостями одночасної роботи декількох виконавців по відновленню працездатності автомобіля. Тому включення в роботу більше двох виконавців навряд чи економічно виправдані, зважаючи на зменшення ефективності використання кожного наступного робітника.

В той же час, при дуже малому числі автомобілів на постах (низькому коефіцієнті завантаження) довготривалі прості великого числа виконавців навряд чи доцільні, тому повна взаємодопомога без жорсткого обмеження чисельності виконавців на посту виправдана. Очевидно, що при постійному режимі низького завантаження потужності необхідно вжити інші заходи, але в автосервісі, якому властиве коливання потоків заявок впродовж дня, така дисципліна обслуговування може мати місце.

Таким чином при слабкій конкуренції, коли рівень завантаження потужності високий, доцільно застосовувати модель *A*, що відповідає формі організації роботи без взаємодопомоги між виконавцями.

При помірній конкуренції, коли рівень завантаження досить низький, виникає можливість епізодичної взаємодопомоги між виконавцями. Ця закономірність взаємодії виконавців при стохастичних потоках заявок і постанов доцільно апроксимувати моделлю *B* математичними виразами СМО з частковою взаємодопомогою між виконавцями. Третя модель функціонування СТО (модель *C*), при якій можлива повна взаємодопомога між виконавцями, характерна для виробництв малих масштабів (малих СТО, автозаправок, автостоянок, автомиття і т.д.), а також високої вартості обслуговування автомобілів (іномарок, великовантажних автомобілів міжнародних перевезень і т.д.).

В той же час, всі види конкуренції мають місце для одних і тих же СТО, зважаючи на коливання інтенсивності потоків заявок і відновлень протягом коротких проміжків часу: дня тижня, а

отже можуть застосовуватися усі три основні форми організації роботи. При цьому можуть накладатися обмеження соціального і економічного характеру, обумовлені відповідальністю за якість виконаної роботи і персоніфікацією висококваліфікованих виконавців.

Оптимізація потужності підприємств автомобільного транспорту, в першу чергу зон ТО і ремонту автотранспортних підприємств приділялася величезна увага в різних дослідженнях. Але оптимізація зводилася до визначення кількості постів, тобто в якості змінного параметра був прийнятий лише один, тоді як на практиці їх декілька. Так в класичну детерміновану формулу розрахунку числа постів ТО і ремонту входять:  $T_{зм}$  – тривалість змін;  $C_{зм}$  – кількість змін;  $P_n$  – чисельність робітників на посту;  $T_{mp}$  – добова трудомісткість робіт, що відображає розрахунковий рівень механізації робіт:

$$n = X = \frac{T_{mp} \cdot \varphi}{T_{зм} \cdot C_{зм} \cdot P_n \cdot \eta}, \quad (19)$$

де:  $\varphi$  – коефіцієнт нерівномірності завантаження потужності;

$\eta$  – коефіцієнт використання робочого часу.

Величина  $T_{mp}$  в непрямому виді оцінює вплив продуктивності технологічного обладнання за рахунок відомого коефіцієнта коректування  $K_5$  в залежності від масштабів виробництва. В той же час формула (19) дозволяє визначити необхідне число постів при нормованому значенні коефіцієнта завантаження, що враховує стохастичний характер виробничих процесів, але що не відбиває вартісні складові ефективності виробництва. Таким чином, формула (19) включає основні змінні параметри, але не дозволяє перейти до оцінки економічної ефективності прийнятого рішення, а тим більше досягнення оптимального рішення. У формулі (19) без коефіцієнта нерівномірності завантаження  $\varphi$ , який дорівнює зворотній величині коефіцієнта завантаження  $\psi$ , є узагальнений параметр:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\nu} = \lambda \cdot t_{сер} \quad (20)$$

З огляду на те, що параметр  $\alpha$  входить у формули теорії масового обслуговування, як один з основних початкових параметрів, є можливість переходу до оптимізації потужності на стадії проектування автотранспортного підприємства. Але при проектуванні СТО значення  $T_{mp}$  визначити значно складніше у зв'язку з наявністю великого числа підприємств в одній мережі автосервісу. Методика розрахунку  $\lambda_{обс}$  для конкретного СТО, дозволяє визначити її наближене значення, а отже перейти до розрахунку  $\alpha$ .

Дохід СТО за добу залежить від кількості обслуговувань  $\lambda_{обс}$  і середньої ціни обслуговування одного автомобіля:

$$D = \lambda_{обс} \cdot C_{\delta} = \lambda_{ек} \cdot (1 - P_{відм}) \cdot C_{\delta} \quad (21)$$

Цей дохід досягається шляхом використання трудових і матеріальних ресурсів, які утворюють витратну частину:

$$P = T_{зм} \psi n P_n C_{pR} + T_{зм} (1 - \psi) n P_n C_{np} + \Delta K_{обс} T_{зм} \psi n P_n (C_{pR} + \Delta C_{pR}) + \Delta T_{зм} (1 - \psi) P_n C_{np} + \sum_{i=1}^{K_{обс}} K_{обсi} C_{обсi} [1 + \psi (T_{зм} + \Delta T_{зм}) C_{ел}] + C_{ам} + DH \cdot C_s, \quad (22)$$

де:  $C_{pR}$ ,  $\Delta C_{pR}$  – тарифна ставка робітника  $R^{20}$  розряду в основний час і понаднормовий час відповідно, грн/годину;

$\Delta T_{зм}$  – наднормовий час роботи, годин;

$C_{np}$  – годинна оплата простою робітника, грн/годину;

$DH$  – частка відрахувань у вигляді податків, грн;

$C_{ам}$  – питомі амортизаційні відрахування за основні фонди, грн/день;

$C_s$  – добова плата за електроенергію, тепло і воду, грн;

$C_{ел}$  – плата за електроенергію при експлуатації обладнання, грн;

$C_{обсi}$  – вартість обладнання віднесена до одного дня при нормованому строку служби, грн/день;

$K_{обсi}$  – кількість однойменного обладнання, шт.;

$C_{обс}$  – загальна кількість обладнання, шт.

При цьому необхідно враховувати, що робітник високої кваліфікації сприяє приросту потоку заявок  $\lambda_{обс}$ . Такий же ефект має і технологічне обладнання, яке може не завжди збільшувати продуктивність праці, але підвищує престижність СТО, а отже конкурентоздатність.

В обох випадках збільшується середня довжина черги автомобілів, очікуючих обслуговування, завдяки чому менше число автомобілів, з числа тих, що поступили на СТО, переходить до конкурента. Крім того, збільшується вхідний потік заявок,  $\lambda_{вх}$ . Для прийняття оптимальних рішень в обох випадках необхідно виявити зв'язки між цими параметрами і інтенсивністю вхідного потоку заявок  $\lambda_{вх}$ . Таке завдання може бути вирішене при проведенні експерименту на діючих СТО.

Досягнення максимального прибутку для будь-якого СТО є головною метою виробничої діяльності. В даному випадку розрахунок прибутку можна здійснити шляхом знаходження різниці між двома відомими складовими із формулами (21) і (22):

$$\Pi = D - P \rightarrow \max \quad (23)$$

І подальшим збільшенням її до максимального значення. Очевидно, що досягнення максимуму прибутку може бути досягнуте, як за рахунок збільшення доходу, так і зменшення витратної частини. Разом з тим може виявитися, що  $\Pi_{\max}$  буде отримана при одночасному збільшенні обох складових, але з випереджаючими темпами для прибуткової частини.

На стадії проектування СТО все ж вирішальним є загальноприйнятний критерій оптимальності – строк окупності капітальних вкладень  $S$ , як відношення річного прибутку  $\Pi_p$  до обсягу капітальних вкладень  $K$ , чим менший строк окупності, тим ефективніше прийняте рішення про створення СТО певної спеціалізації і потужності. Необхідно також зауважити, що при реконструкції СТО прийоми і заходи по оптимізації потужності аналогічні, що і при проектуванні. Але в цьому випадку діюче СТО має в розпорядженні достовірні і конкретні дані про ефективність тих або інших наявних або ресурсах, що придбавалися.

Таким чином при пошуку  $\max$  функції (23) змінними параметрами можуть виступати наступні величини:

$n$  – кількість постів однакового призначення;

$P_{nR}$  – чисельність робітників на одному посту з  $R$ -м розрядом;

$R$  – кваліфікація робітників  $P_{nR}$ -го розряду;

$N_{обі}$  – кількість однойменного обладнання;

$T_{зм} + \Delta T_{зм}$  – тривалість зміни, включаючи роботу у понад нормований час, годин.

Природно, ефект від зміни значень цих параметрів суттєвим чином впливає на перевагу того або іншого кроку. Вартісна складова цих ресурсів включена у функцію мети і може бути встановлена шляхом калькуляції витрат. Велику складність представляє розрахунок ефекту від зміни кількості і якості вказаних вище ресурсів.

Наявність декількох змінних параметрів допускає для визначення оптимального поєднання їх значень застосування спеціального математичного апарату, що дозволяє вирішувати цю задачу на комп'ютері. В той же час при використанні методу простого перебору процедура визначення глобального оптимуму громіздка і важка. У зв'язку з цим для вирішення подібних завдань розроблені декілька методів прискореного пошуку [3; 4], що мають певні переваги і недоліки. Для вибору і обґрунтування одного з них необхідно провести аналіз існуючих методів на предмет переваги для вирішення поставлених завдань в даній роботі.

Згідно теорії оптимального управління [3; 4] необхідно знайти такі управління (програму, план дій), які максимізують (мінімізують) критерій оптимальності.

Залежно від наявності і виду обмежень, кількості етапів в операції пошуку і форми моделі знаходять застосування ті або інші методи математичного програмування. Ці методи математичного програмування поділяються на дві групи: аналітичні і чисельні. До перших відноситься диференціальне і варіаційне числення, принцип максимуму Л.С. Понтрягіна і методи, що ґрунтуються на достатніх умовах В.Ф. Кротова. До другої групи відносяться: динамічне, лінійне, нелінійне програмування; методи регулярного і випадкового пошуку.

Для використання класичних методів (диференціального і варіаційного числення) обов'язкова відсутність обмежень, а для застосування чисельних методів необхідно знати можливу область зміни керування. Чим ця область вужча (чим більше обмежень), тим ефективніше використання числових методів.

Таким чином, для пошуку оптимального складу ресурсів проектного СТО, що має обмеження за вартістю і іншими величинами, можливе використання одного із чисельних методів. У свою чергу ці методи також мають специфічні особливості. Так регулярний метод пошуку екстремуму припускає процедури, пов'язані з розрахунком значень функції  $U(R)$  в різних точках. При цьому використовується частіше пасивний пошук, який застосовується в тих випадках, коли функція  $U(R)$  може мати декілька значень екстремуму. Але пошук ускладнюється в тих випадках, коли доводиться відшукувати екстремум функції багатьох змінних. У цих випадках рекомендується один з декількох методів.

Метод сканування (сліпий пошук), полягає в послідовному переборі усіх можливих значень управліннь і запам'ятовуванні найбільшого значення оптимізуемого критерію. Застосування його можливо при малому числі змінних параметрів, але перевагою його є можливість відшукування глобального оптимуму, незалежно від виду функції.

Градентний метод полягає в обчисленні часткових похідних критерія по усіх змінних.

Метод надшвидкого підйому (спуску) є розвитком градентного методу і відрізняється від нього тим, що градент,  $\Delta K$  обчислюється не в кожній точці, але зберігає основний недолік – необхідність і можливість обчислення часткових похідних.

Метод виключення дотичними лініями до лінії рівня може використовуватися тільки до функції двох змінних.

З перерахованих методів регулярного пошуку застосовуємо для вирішення поставленого завдання метод сканування і метод покоординатного підйому, які відрізняються простотою і доступністю. Але їх застосування передбачає невелике число змінних параметрів. При проектуванні СТО в окремих випадках ці методи досить ефективні. При збільшенні числа змінних необхідний пошук здійснювати при одночасному виборі найбільш оптимального кожного наступного кроку пошуку. Тоді кількість кроків істотним чином зменшується.

Таку перевагу має метод випадкового пошуку, який застосовуємо для відшукування  $U(R)$  багатьох змінних при будь-яких обмеженнях. Використання спеціальних алгоритмів дозволяє відшукувати з деякою ймовірністю глобальний оптимум.

До переваг його відноситься незалежність від виду функції, що оптимізується, а також можливість застосування навіть тоді, коли цю функцію не вдається записати. Така ситуація може мати місце при апроксимації виробничих процесів методом стохастичного моделювання (Монте Карло). Цей метод дає наближені рішення, які цілком прийнятні при економічному критерії оптимальності.

При послідовному пошуку має місце більш висока швидкість збіжності внаслідок того, що на кожному випадковому кроці визначається його «вдалість». Вдалим кроком вважається той, при якому значення функції  $U(R)$  виявляється меншим, ніж та ж величина на попередньому вдалому кроці. Визначальною є та обставина, що усі випадкові кроки здійснюються з останнього вдалого стану.

Таким чином усі перераховані методи застосовні для вирішення задач, поставлених в роботі по дослідженню закономірностей формування потужності СТО. Але при подальшій розробці методики розрахунку оптимальної структури значення параметрів потужності СТО широким колом користувачів (крім регулярного, сліпого пошуку) на практиці.

У зв'язку з цим необхідно звернутися до універсального і ефективного методу пошуку екстремуму – методу динамічного програмування. Цей метод має ряд переваг:

- 1) оптимізація процесів з обмеженнями на змінні стани тільки спрощує вирішення задачі;
- 2) може застосовуватися для управління процесами, перетворення яких на кожному кроці не вдається описати рівняннями;
- 3) проводить глобальний пошук незалежно від початкового стану системи.

Суть методу динамічного програмування, сформованого американським вченим Річардом Беллманом, полягає в тому, що оптимальне рішення має ту властивість, що яким би не був первинний стан і рішення в початковий момент, подальші рішення повинні складати оптимальне рішення відносно стану, отриманого в результаті першого рішення. При цьому процес планування перетворюється на багатокроковий процес з послідовним рухом до глобального оптимуму на кожному кроці.

В той же час опис кожного кроку і громіздкість обчислювальних процедур ускладнює застосування динамічного програмування в чистому вигляді. Для спрощення обчислювального процесу без значної втрати точності розроблений метод наближеного програмування, який припускає набуття початкових значень змінних параметрів аналітичним методом.



Подальший пошук здійснюється таким чином. На першому етапі робиться збільшення (зменшення) числа ресурсів по кожному найменуванню і розраховується ефект від кожного кроку в даному випадку за формулою (23)  $\Delta\Pi$ . Потім розраховується коефіцієнт ефективності кожного кроку по  $i$ -му виду ресурсів: по першому і подальшим  $j$ -м крокам:

$$\begin{aligned}\Delta K_{1,1} &= \frac{C_{R1}}{\Delta\Pi(n_1 + 1)} \\ \Delta K_{2,1} &= \frac{C_{R2}}{\Delta\Pi(n_2 + 1)} \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta K_{i,1} &= \frac{C_{Ri}}{\Delta\Pi(n_i + 1)}\end{aligned}\quad (24)$$

Виконується вибір максимального значення  $\Delta K_{i1}$  і розглядається нове значення коефіцієнта ефективності по  $i$ -му виду ресурсів:

$$\Delta K_{i,2} = \frac{C_{Ri}}{\Delta\Pi(n_i + 2)} \quad (25)$$

Який знову бере участь в «конкурсі» з іншими видами ресурсів. Якщо виявиться, що збільшення кількості  $i$ -го виду ресурсів знову дає максимальний ефект, тобто  $\Delta K_{i,2} = \max$ , тоді триває додавання  $i$ -го виду ресурсів. Інакше збільшується той вид ресурсів, який мав максимальне значення з усього ряду коефіцієнтів ефективності.

Доцільність такого підходу при пошуку екстремуму очевидна, оскільки коефіцієнт ефективності  $\Delta K_{ij}$  є відношення витрат, що вкладаються на набуття того або іншого вигляду ресурсів, до прибутку, що отримується від його використання.

При розрахунку складових цільової функції (23) необхідно врахувати, що кожного разу змінюється величина коефіцієнта завантаження  $\psi$ , пов'язаного з іншими параметрами:

$$\psi = \frac{\lambda_{\text{вх}} \cdot T_{\text{мр}} \cdot C_{Ri}}{T_{\text{зм}} \cdot P_n \cdot \delta_{\text{обс}} \cdot n} \quad (26)$$

Отже, при зміні одного з параметрів  $T_{\text{зм}}$ ,  $P_n$ ,  $\delta_{\text{обс}}$ ,  $n$  необхідно розраховувати нове (прогнозоване)  $\psi$ , а потім і ймовірність відходу автомобіля  $P_{\text{відм}}$  за формулами масового обслуговування при відповідних формах організації роботи (1), (7) і (11). Зрештою нові значення  $\psi$  і  $P_{\text{відм}}$  підставляються у функцію (23) і визначається нова величина прибутку  $\Pi_2$ , а приріст прибутку обчислюється як різниця:

$$\Delta\Pi = \Pi_1 - \Pi_2 \quad (27)$$

І підставляється у формулу для розрахунку поточного значення коефіцієнта ефективності  $\Delta K_{i,2}$  за формулою (25).

Процедура пошуку оптимального вкладення ресурсів триває до досягнення  $\Pi_{\text{макс}}$ , або до вичерпання засобів, що вкладаються,  $Q$  при реконструкції або будівництві СТО.

### ОБГОВОРЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕННЯ

Таким чином для визначення потужності СТО на стадії проектування початкові значення змінних параметрів визначаються аналітичним методом, далі збільшуються (зменшуються) числа ресурсів по кожному найменуванню і розраховується ефект від кожного кроку, процедура пошуку оптимального вкладення ресурсів триває до досягнення максимального прибутку або до вичерпання засобів, що вкладаються, при реконструкції або будівництві підприємства автосервісу.

При оптимізації потужності СТО на стадії проектування ефективним є використання методу динамічного програмування, який дозволяє розраховувати коефіцієнт ефективності при зміні наступних керованих параметрів: кількості постів однакового призначення; чисельності робітників на одному посту з певним розрядом; кваліфікації робітників певного розряду; кількості однойменного обладнання; тривалості зміни, включаючи роботу у понад нормований час.

## ВИСНОВКИ

В результаті дослідження розглянуті математичні моделі, які відображають основні фактори зовнішнього і внутрішнього середовища СТО і дозволяють визначити показники СТО як систем масового обслуговування на стадії проектування.

Форми організації праці і рівень конкуренції СТО залежить від значень коефіцієнтів завантаження: при високих значеннях  $\psi$  має місце слабка конкуренція і відсутність взаємодопомоги, при малому завантаженні – висока конкуренція і повна взаємодопомога виконавців.

Критеріями оптимальності при створенні нових СТО є прибуток і термін окупності капітальних витрат.

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Біліченко В.В., Кужель В.П. Моделювання технологічних процесів підприємств автомобільного транспорту : навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2017. 163 с.
2. Grozev D., Milchev M., Georgiev I. Study the work of specialized car service as queue theory. *International Scientific Journal «Mathematical Modeling»*. 2020. Vol. 4, Issue 1. P. 31–34.
3. Барабаш О.В., Свинчук О.В., Мусієнко А.П. Математичне моделювання та оптимізація процесів і систем. Частина 1 : навчальний посібник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. 160 с.
4. Математичне моделювання систем і процесів : навчальний посібник / П.М. Павленко та ін. Київ : НАУ, 2017. 392 с.
5. Литвинов А.Л. Теорія систем масового обслуговування : навчальний посібник. Харків : ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2018. 141 с.
6. Томашевський В.М. Моделювання систем. Київ : Видавнича група BHV, 2005. 352 с.
7. Attahiru S. Alfa. *Applied Discrete-Time Queues*. Springer New York, NY. 2016. 383 p.
8. Chan W.C. *An elementary introduction to queueing systems*. University of Calgary, Canada. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2014. 103 p.
9. Gautam N. *Analysis of queues: methods and applications*. Boca Raton. CRC Press, 2012. 802 p.
10. Gross D., Shortle J., Thompson J., Harris J. *Fundamentals of Queueing Theory*. Hoboken, New Jersey. A John Wiley & Sons, Inc., Publication, 2008. 528 p.
11. Sztrik J. *Basic Queueing Theory*. GlobeEdit, OmniScriptum GmbH, KG, Saarbrucken, Germany. 2016. 246 p.

## REFERENCES

1. Bilichenko V.V., Kuzhel V.P. (2017). *Modeling of technological processes of road transport enterprises*. [Modeliuvannia tekhnolohichnykh protsesiv pidpriemstv avtomobilnoho transportu]. Vinnytsia, VNTU Publ. 163 p. (in Ukraine)
2. Grozev D., Milchev M., Georgiev I. (2020). Study the work of specialized car service as queue theory. *International Scientific Journal «Mathematical Modeling»*. Vol. 4, Issue 1. P. 31–34. (in English)
3. Barabash O.V., Svynchuk O.V., Musiienko A.P. (2023). *Mathematical modeling and optimization of processes and systems*. [Matematychnе modeliuvannia ta optymizatsiia protsesiv i system]. Kyiv, KPI Ihoria Sikorskoho Publ. 160 p. (in Ukraine)
4. Pavlenko P.M., Filonenko S.V., Cherednikov O.M., Treitjak V.V. (2017). *Mathematical modeling of systems and processes*. [Matematychnе modeliuvannia system i protsesiv]. Kyiv, NAU Publ. 392 p. (in Ukraine)
5. Lytvynov A.L. (2018). *Theory of mass service systems*. [Teoriia system masovoho obsluhovuvannia]. Kharkiv, KhNUMH O.M. Beketova Publ. 141 p. (in Ukraine)
6. Tomashevskiy V.M. (2005). *Modeling of systems*. [Modeliuvannia system]. Kyiv, BHV Publ. 352 p. (in Ukraine)
7. Attahiru S. Alfa. (2016). *Applied Discrete-Time Queues*. Springer New York, NY. 383 p. (in English)
8. Chan W.C. (2014). *An elementary introduction to queueing systems*. University of Calgary, Canada. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 103 p. (in English)
9. Gautam N. (2012). *Analysis of queues: methods and applications*. Boca Raton. CRC Press. 802 p. (in English)
10. Gross D., Shortle J., Thompson J., Harris J. (2008). *Fundamentals of Queueing Theory*. Hoboken, New Jersey. A John Wiley & Sons, Inc., Publication. 528 p. (in English)
11. Sztrik J. (2016). *Basic Queueing Theory*. GlobeEdit, OmniScriptum GmbH, KG, Saarbrucken, Germany. 246 p. (in English)

### **V. Khavruk. Mathematical models and criteria of optimum power car service stations.**

The work examines models of open mass service systems with limited queue length for three forms of organization of the car maintenance station: A – without mutual assistance of performers; B – with partial mutual assistance of performers; C – with full mutual assistance of performers.

The formulas for determining such characteristics of mass service system models for a car service station as: the probability that all posts of a car service station are free are clarified and given; the probability that all posts of the car maintenance station are occupied by maintenance; probability of losing the application; the probability that all posts are occupied by service and there is a certain number of applications in the queue; the average number of car service station posts occupied by service; the average number of applications in the queue; the number of cars that left the queue; the average time cars are in the queue.

The presented diagram of the relationship between the forms of work organization in a car service station and the levels of competition in the car service market provides an opportunity to choose one of the three models of the mass service system for calculating the optimal capacity of the service station.

At the stage of designing car maintenance stations, the need to take into account the generally accepted criterion of the optimal capacity of a car maintenance station - the payback period of capital investments is substantiated. It is recommended to adjust the current costs of the production activity of the car maintenance station with such variable parameters as: the number of posts of the same purpose; the number of workers at one post with a certain rank; qualification of workers of a certain grade; number of equipment of the same name; shift duration, including overtime work.

The method of dynamic programming is characterized, which involves calculating the efficiency factor of each step from increasing (decrease) the number of a certain resource. The revenue component of the objective function of the profit of the car maintenance station is set as a function of the number of services, which directly affects the value of the load factor of the capacity of the car maintenance station.

The mathematical apparatus considered in this study can be used both at the initial stage when creating car maintenance stations, and for optimizing the capacity of the car service under various forms of competition.

**Keywords:** car, performer, application, probability, service, post, capacity, mass service system, service station.

*ХАВРУК Володимир Олександрович*, асистент кафедри технічної експлуатації автомобілів та автосервісу, Національний транспортний університет, e-mail: khavruk@gmail.com. <http://orcid.org/0000-0002-4686-4109>.

*Volodymyr KHAVRUK*, Assistant of Motor Vehicle Maintenance and Service Department, Kyiv National Transport University, e-mail: khavruk@gmail.com. <http://orcid.org/0000-0002-4686-4109>.

DOI 10.36910/automash.v2i21.1227