DOI: https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2026-15(25)-05
УДК 624.04; 624.073; 624.15

О. Ю. Єрьоменко*
к.т.н., доцент, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4030-9438
Кафедра промислового, цивільного і міського будівництва
Криворізький національний університет, вул. Віталія Матусевича,11, м. Кривий Ріг, Україна, 50027
С. В. Стоянович
к.т.н., доцент, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1363-7356
Кафедра архітектурних конструкцій
Національна академія образотворчого мистецтва і архітектури, Вознесенський узвіз, 20, м. Київ, Україна, 04053

*автор-кореспондент, e-mail: eremenko.oy@knu.edu.ua

Порівняльний аналіз чисельних методів розрахунку гнучких фундаментних плит на пружній основі з урахуванням геометричної нелінійності

Цитувати як:
Єрьоменко, О. Ю., Стоянович, С. В. (2026). Порівняльний аналіз чисельних методів розрахунку гнучких фундаментних плит на пружній основі з урахуванням геометричної нелінійності. *Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві*, 25, 66-75. https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2026-15(25)-05

Анотація. У статті наведено результати порівняльного аналізу ефективності та точності чисельних методів при розв'язанні задач будівельної механіки, зокрема при розрахунку гнучких фундаментних плит, що взаємодіють із пружною основою. Актуальність дослідження зумовлена сучасними тенденціями у будівництві великопрольотних та висотних споруд, де використання тонких фундаментних плит призводить до виникнення значних прогинів, сумірних із товщиною самої конструкції. У таких випадках класична лінійна теорія розрахунку дає суттєву похибку, що вимагає застосування геометрично нелінійного апарату, заснованого на системі диференціальних рівнянь Теодора фон Кармана. В якості математичної моделі взаємодії плити з ґрунтом використано класичну однопараметричну модель Вінклера. Основна увага у роботі приділяється порівнянню двох сіткових методів: узагальненого методу скінченних різниць (МСР) та методу послідовних апроксимацій (МПА), специфіка якого полягає у застосуванні кусково-поліноміальних функцій (сплайнів) для побудови матриць диференціювання. Для реалізації алгоритмів авторами використано обчислювальні програми для середовища MATLAB, що дозволяють здійснювати ітераційний процес пошуку нелінійного розв'язку. У ході дослідження виконано розрахунок квадратної фундаментної плити, жорстко защемленої по контуру, під дією рівномірно розподіленого навантаження. Проведено серію обчислень на сітках різної густоти (від кроку h=1/4 до h=1/64). На першому етапі отримані *результати зіставлені з класичними аналітичними розв'язками нелінійної теорії пластин без урахування основи. Доведено, що метод послідовних апроксимацій (МПА) демонструє вищу швидкість збіжності та кращу точність на рідких розрахункових сітках порівняно з класичним МСР. Зокрема, розбіжність максимальних прогинів за МПА становить менше 3% вже при кроці сітки h=1/16, тоді як для досягнення аналогічної точності в МСР потрібне подальше згущення сітки. На другому етапі чисельно досліджено поведінку цієї ж плити за умови її спирання на суцільну пружну основу. Встановлено, що врахування відсічі ґрунту за моделлю Вінклера призводить до зменшення максимальних прогинів конструкції в середньому на 15 % порівняно з плитою без основи. При цьому алгоритм МПА зберігає свою обчислювальну стійкість, забезпечуючи стабілізацію значень переміщень та згинальних моментів вже на сітці h=1/16 без накопичення похибок, характерних для МСР у зонах крайових ефектів. Результати дослідження підтверджують доцільність використання алгоритмів МПА у програмних комплексах автоматизованого проєктування будівельних конструкцій для підвищення надійності оцінки напружено-деформованого стану фундаментів за наявності геометричної нелінійності.*

Ключові слова: будівельна механіка, фундаментна плита, геометрична нелінійність, рівняння Кармана, пружна основа Вінклера, метод послідовних апроксимацій, метод скінченних різниць.

Вступ

Аналіз літературних джерел та постановка проблеми. Сучасне будівництво характеризується ускладненням архітектурно-конструктивних форм споруд та прагненням до зниження їх матеріаломісткості. Це призводить до широкого використання тонких і гнучких елементів, зокрема фундаментних плит. Під дією експлуатаційних навантажень такі конструкції отримують переміщення (прогини), які є сумірними з їхньою товщиною. У такому стані в серединній площині плити виникають мембранні зусилля, і розрахунок за лінійною теорією Кірхгофа-Лява призводить до неадекватної оцінки напружено-деформованого стану (НДС) [1, 2]. Достовірний прогноз поведінки конструкції можливий лише з урахуванням геометричної нелінійності, що в будівельній механіці описується системою диференціальних рівнянь фон Кармана.

Математичне моделювання взаємодії таких плит із ґрунтовим масивом найчастіше виконується з використанням пружної основи типу Вінклера [5]. Розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних четвертого порядку для таких задач аналітичними методами є складним завданням, особливо при комбінованих граничних умовах [4, 6].

Одним із найпоширеніших підходів до вирішення практичних задач будівельної механіки є використання чисельних методів: методу скінченних елементів (МСЕ), безсіткових методів (Meshless methods) та методу скінченних різниць (МСР) [2, 7]. Сучасні міжнародні дослідження доводять, що МСР залишається потужним інструментом завдяки простоті алгоритмізації. Однак класичний МСР має суттєвий недолік — швидке накопичення числової похибки при збільшенні прогинів («проблема мембранного блокування») та високу чутливість до розривних функцій (наприклад, при стрибкоподібній зміні жорсткості основи) [7].

Дієвою математичною альтернативою виступає метод послідовних апроксимацій (МПА), розвинений у рамках вдосконалення сіткових сплайн-методів [3]. Завдяки використанню кусково-поліноміальних функцій, матриці диференціювання МПА дозволяють отримувати високу точність розрахунків на розріджених сітках. Проте у відкритій науковій літературі відсутній детальний порівняльний аналіз ефективності узагальненого МСР та МПА при розв'язанні сумісної задачі нелінійного згину плит на пружній основі, що обґрунтовує актуальність даної теми досліджень.

Мета і завдання дослідження. Метою роботи є підвищення надійності розрахунків просторових будівельних конструкцій шляхом виконання комплексного порівняльного аналізу ефективності та точності узагальненого методу скінченних різниць (МСР) та методу послідовних апроксимацій (МПА) на прикладі задачі геометрично нелінійного згину гнучкої фундаментної плити на пружній основі.

Для досягнення поставленої мети було сформульовано наступні завдання:

1. Адаптувати математичну модель взаємодії гнучкої прямокутної плити з пружною основою Вінклера у безрозмірних координатах для чисельної реалізації обома сітковими методами.

2. Провести серію тестових чисельних розрахунків (із застосуванням алгоритмів у середовищі MATLAB) нелінійного згину защемленої плити з використанням МСР та МПА на розрахункових сітках різної густоти.

3. Виконати порівняльний аналіз отриманих результатів, оцінити швидкість збіжності ітераційних процесів та визначити похибки методів порівняно з еталонними аналітичними розв'язками.

Матеріали та методи

Теоретичною основою дослідження є система нелінійних диференціальних рівнянь згину гнучких пластин (рівняння фон Кармана), адаптована для випадку взаємодії з пружною основою моделі Вінклера [1, 5]. Математична модель у декартовій системі координат має вигляд:

$$D\nabla^2\nabla^2\omega = \frac{\delta^2\Phi}{\delta y^2}\frac{\delta^2\omega}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}\frac{\delta^2\omega}{\delta y^2} - 2\frac{\delta^2\Phi}{\delta x\delta y}\frac{\delta^2\omega}{\delta x\delta y} + q - K\omega; \quad (1)$$

$$\frac{1}{E}\nabla^2\nabla^2\Phi = \left(\frac{\delta^2\Phi}{\delta x\delta y}\right)^2 - \frac{\delta^2\omega}{\delta x^2}\frac{\delta^2\omega}{\delta y^2}, \tag{2}$$

де ω – прогин плити; Ф – функція напружень у серединній площині; D – циліндрична жорсткість; E – модуль пружності; q – інтенсивність поперечного навантаження; K – коефіцієнт постелі пружної основи; ∇^2 – оператор Лапласа.

Для зручності чисельного розв'язання вихідну систему зведено до безрозмірного вигляду (шляхом введення безрозмірних координат $\xi = x/a$, $\eta = y/a$ та функцій $\overline{\omega} = \omega/H$, $\psi = \Phi H/D$) і штучно розщеплено на систему чотирьох диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta^2 m}{\delta\xi^2} + \dfrac{\delta^2 m}{\delta\eta^2} = -\left(g - \overline{K}\overline{\omega}\right); \\ \dfrac{\delta^2\overline{\omega}}{\delta\xi^2} + \dfrac{\delta^2\overline{\omega}}{\delta\eta^2} = -m; \\ \dfrac{\delta^2 f}{\delta\xi^2} + \dfrac{\delta^2 f}{\delta\eta^2} = -\alpha; \\ \dfrac{\delta^2\psi}{\delta\xi^2} + \dfrac{\delta^2\psi}{\delta\eta^2} = -f; \end{cases} \tag{3}$$

де m та f - допоміжні функції; g та α – параметри, що містять нелінійні складові.

Для розв'язання цієї системи застосовано два чисельні підходи: узагальнений МСР та метод послідовних апроксимацій (МПА). На відміну від класичного різницевого методу, у методі МПА при побудові матриць диференціювання використовуються кусково-поліноміальні функції (сплайни). Алгоритми реалізовано за ітераційною схемою у пакеті MATLAB. На першому кроці розв'язується лінійна задача, після чого обчислюються нелінійні складові. Ітераційний процес триває до досягнення збіжності з точністю $\Delta < 0{,}001$.

Схема розрахункової моделі на рис. 1 показує квадратну фундаментну плиту, жорстко защемлену по всьому контуру, із краями, що вільно зближуються у горизонтальній площині. Плита всією площею спирається на пружну основу.

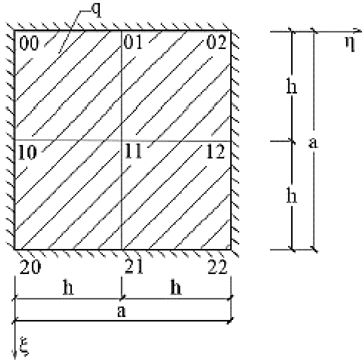

Рис. 1. Схема розрахункової моделі гнучкої квадратної плити на пружній основі

Для виконання порівняльного аналізу було обрано тестову задачу з такими фізико-механічними характеристиками: товщина плити H = 0,1 см, довжина сторони a = 10 см, Е = 0,75 · 10^6 кг/см^2, коефіцієнт Пуассона μ = 0,316. Плита навантажена рівномірно розподіленим навантаженням q = 0,5 кг/см^2. Коефіцієнт постелі прийнято К = 2,15 кг/см^3. Серії чисельних експериментів виконано на вкладених сітках з різним кроком розбиття: h = 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64.

Результати та обговорення

Для об'єктивної оцінки ефективності методів виконано серію чисельних експериментів. На першому етапі проводилося порівняння швидкості збіжності МПА та МСР на класичній задачі нелінійного згину защемленої гнучкої плити без урахування пружної основи.

Отримані у табл. 1 дані показують, що обидва методи при згущенні сітки прямують до єдиного розв'язку, однак характер їхньої збіжності суттєво відрізняється.

Аналіз даних Таблиці 1 свідчить, що на грубих розрахункових сітках (h = 1/4 та h = 1/8) класичний МСР дає значну похибку (завищення прогинів), що пов'язано з недостатньою точністю апроксимації змішаних похідних. Натомість МПА, завдяки використанню сплайн-функцій, демонструє високу стабільність: вже при кроці h = 1/16 результат відрізняється від еталонного (наведеного у фундаментальних працях з нелінійної теорії пластин [1]) менш ніж на 3%. При кроці h = 1/32 результати обох методів практично збігаються.

Таблиця 1. Порівняння максимальних прогинів W_{max} (см) защемленої плити

Крок сітки *h*	Результат за МПА	Результат за МСР	Відхилення МПА від МСР, %	Похибка МПА відносно аналітичного розв'язку*, %
1/4	0,0750	0,0990	24,2	7,12
1/8	0,0764	0,0850	10,1	5,39
1/16	0,0778	0,0802	3,0	3,65
1/32	0,0782	0,0788	0,7	3,28
1/64	0,0782	0,0783	0,1	3,28

*Примітка: Еталонний аналітичний розв'язок для заданих параметрів становить W_{max}=0,08075 см [1].

На другому етапі дослідження алгоритм МПА було застосовано до розрахунку тієї ж плити, але з урахуванням суцільного контакту з пружною основою Вінклера (табл. 2).

Таблиця 2. Вплив пружної основи на максимальні прогини плити W_{max} (см) за МПА

Крок сітки *h*	Без пружної основи	На суцільній пружній основі	Зниження прогину, %
1/4	0,0750	0,0650	13,3
1/8	0,0764	0,0654	14,4
1/16	0,0778	0,0661	15,0
1/32	0,0782	0,0663	15,2
1/64	0,0782	0,0664	15,1

Математична обробка отриманих даних дозволила виявити закономірність: наявність пружної основи із заданим коефіцієнтом постелі знижує максимальний нелінійний прогин фундаментної плити в середньому на 15% порівняно з плитою без основи. При цьому алгоритм МПА зберігає свою ключову перевагу – швидку збіжність. Значення прогину стабілізується вже при кроці сітки h = 1/16, і подальше згущення сітки до h = 1/64 змінює результат лише на 0,4%.

Окрім переміщень, порівняльний аналіз показав високу чутливість МСР до обчислення згинальних моментів поблизу жорсткого защемлення, де виникають крайові ефекти. Використання МПА дозволило отримати фізично достовірні епюри згинальних моментів без необхідності локального згущення сітки в кутових точках плити.

Детальніший аналіз напружено-деформованого стану дозволив виявити ще одну суттєву перевагу методу послідовних апроксимацій (МПА). Окрім оцінки вертикальних переміщень, критично важливим етапом проєктування фундаментних плит є точне визначення внутрішніх зусиль – згинальних моментів M_x та M_y. Класичний метод скінченних різниць (МСР) обчислює моменти через другі похідні, виражені через скінченні різниці від прогинів. У зонах жорсткого защемлення плити (де прогин і кут повороту дорівнюють нулю) виникають значні градієнти зусиль, так звані крайові ефекти. Для їх адекватного опису МСР вимагає введення «законтурних» (фіктивних) вузлів та різкого локального згущення сітки, що суттєво ускладнює алгоритм та збільшує загальний час комп'ютерного розрахунку.

Натомість, застосування МПА зі сплайн-апроксимацією дозволяє успішно обійти цю проблему. Оскільки допоміжні функції m та f (які є аналогами згинальних моментів та параметрів кривизни у перетвореній системі диференціальних рівнянь) обчислюються в МПА безпосередньо у вузлах сітки через інтегральні та диференціальні співвідношення, алгоритм формує неперервні та гладкі епюри моментів навіть на розрідженій розрахунковій сітці $h = 1/16$. Врахування пружної основи Вінклера, як було показано вище, хоч і призводить до зменшення максимальних прогинів, проте одночасно викликає перерозподіл згинальних моментів від центру плити до її опорних контурів. Метод послідовних апроксимацій дозволяє коректно та без осциляцій зафіксувати цей перерозподіл напружень без втрати обчислювальної стійкості, що вчергове підтверджує його високу ефективність для інженерної практики.

Висновки

Були розглянуті два чисельні підходи до розв'язання задачі будівельної механіки щодо нелінійного згину гнучких фундаментних плит на пружній основі. Були отримані наступні результати:

1. Показано, що при розв'язанні системи нелінійних рівнянь фон Кармана метод послідовних апроксимацій (МПА) має суттєву перевагу над узагальненим методом скінченних різниць (МСР) у швидкості збіжності ітераційного процесу.

2. Встановлено, що МПА забезпечує високу точність розрахунків на грубих сітках ($h = 1/8$ та $h = 1/16$), де класичний МСР дає похибку від 10% до 24%. Це дозволяє значно економити машинні ресурси при проєктуванні складних фундаментних конструкцій у САПР.

3. Чисельно підтверджено, що врахування відсічі пружної основи Вінклера знижує максимальні прогини гнучкої защемленої плити на 15%. Алгоритми МПА коректно враховують цей фактор без втрати стійкості обчислювального процесу.

Конфлікти інтересів

Автори заявляють, що у них немає конфлікту інтересів щодо поточного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський чи будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, наведені в цьому документі.

Фінансування

Дослідження проводилося без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті статті.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні поточної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

References

1. Chia, C. Y. (1980). *Nonlinear analysis of plates*. McGraw-Hill International Book Co.

2. Civalek, Ö. (2007). Discrete singular convolution method for the analysis of Mindlin plates on elastic foundations. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, *84*(9), 527-535. https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2007.07.001

3. Dao, N. K., Gabbasov, R., Quyen, H. T. L., & Nguyen, L. T. (2020). Comparison of calculation results of flexible plates on the basis of difference equations of successive approximation method and generalized equations of finite difference method. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, *913*(2), 022002. https://doi.org/10.1088/1757-899X/913/2/022002

4. Katsikadelis, J. T. (1991). Large deflection analysis of plates on elastic foundation by the boundary element method. *International Journal of Solids and Structures*, *27*(15), 1867-1878. https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90182-F

5. Selvadurai, A. P. S. (1979). *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*. Elsevier Scientific Publishing Company.

6. Shen, H. S. (2000). Nonlinear bending of simply supported rectangular Reissner–Mindlin plates under transverse and in-plane loads and resting on elastic foundations. *Engineering Structures*, *22*(7), 847-856. https://doi.org/10.1016/s0141-0296(99)00044-9

7. Yu, Q., Xu, H., & Liao, S. (2018). Nonlinear analysis for extreme large bending deflection of a rectangular plate on non-uniform elastic foundations. *Applied Mathematical Modelling*, 61, 316-340. https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.04.022

Література

1. Chia, C. Y. (1980). *Nonlinear analysis of plates*. McGraw-Hill International Book Co.

2. Civalek, Ö. (2007). Discrete singular convolution method for the analysis of Mindlin plates on elastic foundations. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, *84*(9), 527-535. https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2007.07.001

3. Dao, N. K., Gabbasov, R., Quyen, H. T. L., & Nguyen, L. T. (2020). Comparison of calculation results of flexible plates on the basis of difference equations of successive approximation method and generalized equations of finite difference method. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, *913*(2), 022002. https://doi.org/10.1088/1757-899X/913/2/022002

4. Katsikadelis, J. T. (1991). Large deflection analysis of plates on elastic foundation by the boundary element method. *International Journal of Solids and Structures*, *27*(15), 1867-1878. https://doi.org/10.1016/0020-7683(91)90182-F

5. Selvadurai, A. P. S. (1979). *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*. Elsevier Scientific Publishing Company.

6. Shen, H. S. (2000). Nonlinear bending of simply supported rectangular Reissner–Mindlin plates under transverse and in-plane loads and resting on elastic foundations. *Engineering Structures*, *22*(7), 847-856. https://doi.org/10.1016/s0141-0296(99)00044-9

7. Yu, Q., Xu, H., & Liao, S. (2018). Nonlinear analysis for extreme large bending deflection of a rectangular plate on non-uniform elastic foundations. *Applied Mathematical Modelling*, 61, 316-340. https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.04.022

Відомості про статтю:	Article information:
Отримано 20.04.2026 Отримано у доопрацьованому вигляді 09.05.2026 Прийнято 27.05.2025 Опубліковано 29.05.2026	Received 20.04.2026 Received in revised form 09.05.2026 Accepted 27.05.2025 Published 29.05.2026

A. Yu. Eremenko*
Ph.D. in Engineering, Associate Professor, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4030-9438
Department of Industrial, Civil and Urban Construction
Kryvyi Rih National University, Vitalii Matusevych St., 11, Kryvyi Rih, Ukraine, 50027

S. V. Stoianovych
Ph.D. in Engineering, Associate Professor, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1363-7356
Department of Architectural Structures
National Academy of Fine Arts and Architecture, Voznesenskyi Descent, 20, Kyiv, Ukraine, 04053

*corresponding author, e-mail: eremenko.oy@knu.edu.ua

Comparative analysis of numerical methods for calculating flexible foundation plates on an elastic foundation taking into account geometric nonlinearity

How to Cite:
Eremenko, A. Yu., Stoianovych, S. V. (2026). Comparative analysis of numerical methods for calculating flexible foundation plates on an elastic foundation taking into account geometric nonlinearity. *Modern technologies and methods of calculations in construction,* 25, 66-75. https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2026-15(25)-05

Abstract. The article presents the results of a comparative analysis of the efficiency and accuracy of numerical methods in solving problems of structural mechanics, in particular, in calculating flexible foundation plates interacting with an elastic foundation. The relevance of the study is justified by modern trends in the construction of large-span and high-rise buildings, where the use of thin foundation plates leads to significant deflections commensurate with the thickness of the structure itself. In such cases, the classical linear calculation theory yields a significant error, which requires the use of a geometrically nonlinear apparatus based on the system of Theodore von Karman differential equations. The classical one-parameter Winkler model is used as a mathematical model of the interaction of the plate with the soil. The main focus of the work is on comparing two grid methods: the generalized finite difference method (FDM) and the successive approximation method (SAM), the specificity of which lies in the use of piecewise polynomial functions (splines) to construct differentiation matrices. To implement the algorithms, the authors developed computational programs in the MATLAB environment, which allow performing the iterative process of finding a nonlinear solution. During the study, a square foundation plate, rigidly clamped along the contour, under the action of a uniformly distributed load was calculated. A series of calculations were carried out on grids of varying density (from a step of h=1/4 to h=1/64). At the first stage, the obtained results were compared with classical analytical solutions of the nonlinear plate theory without considering the foundation. It has been proven that the successive approximation method (SAM) demonstrates a higher convergence rate and better accuracy on coarse computational grids compared to the classical FDM. In particular, the discrepancy of the maximum deflections for the SAM is less than 3% even at a grid step of h=1/16, while to achieve similar accuracy in the FDM, further grid refinement is required. At the second stage, the behavior of the same plate resting on a continuous elastic foundation was numerically investigated. It was found that taking into account the soil subgrade reaction using the Winkler model leads to a decrease in the maximum deflections of the structure by an average of 15% compared to the plate without a foundation. At the same time, the SAM algorithm maintains its computational stability, ensuring the stabilization of displacements and bending moments already on the h=1/16 grid without the accumulation of errors typical for the FDM in the zones of edge effects. The research results confirm the feasibility of using SAM algorithms in computer-aided design (CAD) software for building structures to increase the reliability of assessing the stress-strain state of foundations in the presence of geometric nonlinearity.

Keywords: *structural mechanics, foundation plate, geometric nonlinearity, von Karman equations, Winkler elastic foundation, successive approximation method, finite difference method.*