

УДК 621.873

### **Ю. В. Човнюк**

к.т.н., доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0608-0203>

кафедра фізичного виховання і спорту

Київський Національний університет будівництва і архітектури, проспект Повітряних Сил, 31,  
м. Київ, Україна

### **П. П. Чередніченко\***

доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7161-661X>

кафедра міського будівництва

Київський Національний університет будівництва і архітектури, проспект Повітряних Сил, 31,  
м. Київ, Україна

### **О. П. Остапушенко**

к.т.н., доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8114-349X>

кафедра електротехніки та електроприводу

Київський Національний університет будівництва і архітектури, проспект Повітряних Сил, 31,  
м. Київ, Україна

### **І. М. Кравченко**

асистент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7077-1546>

кафедра електротехніки та електроприводу

Київський Національний університет будівництва і архітектури, проспект Повітряних Сил, 31,  
м. Київ, Україна

### **А. О. Задорожний**

к.т.н., доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1031-0585>

кафедра кафедри бронетанкового озброєння та військової техніки

Військовий інститут танкових військ НТУ «Харківський політехнічний інститут», вул.  
Кирпичова, 2, м. Харків., Україна

\*автор-кореспондент, e-mail: [petro\\_che@ukr.net](mailto:petro_che@ukr.net)

## **Аналіз коливань (вібрації) конструктивних елементів вантажопідйомних механізмів і машин**

Цитувати як:

Човнюк, Ю.В., Чередніченко, П. П., Остапушенко, О. П., Кравченко, І. М., Задорожний, А.О.  
(2025). Аналіз коливань (вібрації) конструктивних елементів вантажопідйомних механізмів і  
машин. *Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві*, 24, 621-650.  
[https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14\(24\)-53](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14(24)-53)

© 2025, Човнюк, Ю.В., Чередніченко, П. П., Остапушенко, О. П., Кравченко, І. М., Задорожний,  
А.О.

*Переміщення вантажу вантажопідйомними механізмами і машинами, які використовуються у містобудуванні, наприклад, мостовими кранами (МК) з нежорсткими канатними підвісами вантажу викликає маятникові коливання вантажу, у котрих присутня некерована компонента. Коливання суттєво збільшують тривалість циклу таких МК, знижують продуктивність та безпеку робіт. Зростає небезпека зитовхування вантажу з об'єктами, присутніми у зоні переміщень, при цьому імовірними є псування/руйнування вантажу, інших об'єктів і самого МК. У зв'язку з цим доцільно повністю придушити некеровані компоненти маятникових коливань вантажу як при його переміщенні, так і при досягненні вантажем цільової точки. Особливо це актуально при переміщенні небезпечних*

вантажів: емоностей з рідкими матеріалами (типу смоли), горючими рідинами та ін.

При роботі МК та інших типів будівельних/вантажопідйомних кранів внаслідок розгойдування вантажу на канаті виникають значні динамічні навантаження. У даній роботі здійснений аналіз закономірностей процесу коливань вантажу на основі двомасової моделі з урахуванням впливу початкових умов на можливі значення динамічних навантажень, а також з'ясована можливість оптимізації (мінімізації) цих навантажень. Наведений огляд наявних довідкових та нормативних матеріалів, котрі визначають нормативні значення коефіцієнтів динамічності. Отримані у роботі результати можуть бути у подальшому використані для виконання динамічних розрахунків, їх вдосконалення та уточнення, при проектуванні та інженерних розробках скінченно-елементних моделей консольних стріл з вантажем на канаті й без канату при розгоні/гальмуванні у процесі повороту стрілі задля обґрунтування коефіцієнтів динамічності конкретних конструкцій МК та містобудівельних кранів інших типів.

Ключові слова: аналіз, коливання, вібрації, навантаження, канатні системи, маятникові коливання вантажів, містобудівельні та мостові крани,

### **Постановка проблеми**

Переміщення вантажів містобудівельними, зокрема, мостовими кранами (МК) (як, до речі, й іншими типами будівельних кранів) з нежорстким канатним підвісом вантажу, у яких присутня некерована компонента, спряжені з неминучим виникненням небажаних коливань вантажу на канаті. Коливання суттєво збільшують тривалість циклу кранів, знижують їх продуктивність та безпеку робіт [1-3]. При цьому також зростає небезпека зіштовхувань вантажу з об'єктами, які присутні у зоні переміщень, причому імовірні також пошкодження вантажу, інших об'єктів і самого крану. У зв'язку з цим доцільним є повне усунення некерованої компоненти маятникових коливань вантажу як при його переміщенні, так і при досягненні вантажем цільової точки [4]. Особливо це є актуальним при переміщенні небезпечних вантажів: емоностей з рідкими матеріалами (смола), горючими рідинами та ін.

Зрозуміло, що слід перш за все проаналізувати закономірності процесу коливань вантажу на канаті на основі спрощених моделей (наприклад, у межах двомасової моделі) із урахуванням початкових умов й встановити можливі значення виникаючих динамічних навантажень (у канаті). По-друге, необхідно встановити умови й визначити закономірності руху вантажу й приводної системи, за яких вказані динамічні навантаження канатної системи мінімізуються, зокрема, й коефіцієнти динамічності при пуску/гальмуванні механізмів підйому вантажу МК.

### **Аналіз публікацій по темі дослідження**

Динамічні навантаження при коливаннях вантажу на канаті (МК, зокрема) вивчались у багатьох роботах [1-3]. Проте оптимізація вказаних

навантажень відомими у літературі методами [4-20] не була проведена. У даній роботі ця проблема, на думку авторів дослідження, вирішена.

### Мета дослідження

Мета роботи полягає у обґрунтуванні фізико-механічної та математичної моделей аналізу, синтезу та оптимізації режимів руху містобудівельних кранів (конструктивних елементів вантажопідійомних машин і механізмів) у період їх пуску, при яких нівелюються маятникові коливання вантажу на канаті й практично мінімізуються динамічні навантаження у пружних елементах (канатах) вказаних машин і механізмів кранів.

### Виклад основного змісту дослідження

При оцінці динамічного навантаження на вантажозахоплюючі пристрої слід прийняти до уваги наступне: в умовах нормальної експлуатації важливого значення набуває, головним чином, тільки вертикальне динамічне навантаження при роботі механізму підйому вантажу, оскільки при роботі механізмів пересування крану й обертання його поворотної частини воно не перевищує (5 ... 6)% статичного [1,2].

Розрізняють два варіанти підйому вантажу: «з ваги» й «з підхватом». У першому варіанті припускають, що вантаж вже знаходиться на деякій (невеликій) висоті над основою і статичне навантаження, яке діє на вантажозахоплюючі пристрої, дорівнює вазі вантажу  $Q_g$ . Динамічне навантаження  $P_{дин}$  виникає у початковий момент гальмування вантажу, який спускається, при вмиканні.

У другому варіанті навантаження припускають, що вантаж лежить на будь-якій основі, канати провисають і, відповідно, у цей момент навантаження на вантажозахоплюючі пристрої дорівнює нулю.

У обох випадках динамічний коефіцієнт визначається залежністю:

$$K_{дин} = 1 + P_{дин} / Q_g, \quad (1)$$

де:  $P_{дин}$  – у першому випадку є функцією надлишкової рушійної сили та жорсткості опорної конструкції й у другому – функцією швидкості канату та жорсткості опорної конструкції.

При розрахунку у випадку навантаження за першого варіанту кран моделюється двомасовою коливною системою. У даній системі жорсткості канатів та конструкції крану  $C_K$  замінюються приведеною жорсткістю  $C_{II}$ , а сама система складається з двох мас –  $m_p$  (маса ротору двигуна й приведених до нього мас елементів механізму підйому) та  $m_g$  (маса вантажу), пов'язаних між собою жорсткістю  $C$  :

$$C_{\Pi} = \frac{C \cdot C_K}{(C + C_K)}. \quad (2)$$

При переміщеннях  $x_p$  маси  $m_p$  та  $x_e$  маси  $m_e$  кінетична й потенціальна енергія відповідно складають:

$$\begin{cases} K = \left(\frac{m_p}{2}\right) \cdot \dot{x}_p^2 + \left(\frac{m_e}{2}\right) \cdot \dot{x}_e^2; \\ \Pi = C \cdot \left[(x_p - x_e)^2 / 2\right]. \end{cases} \quad (3)$$

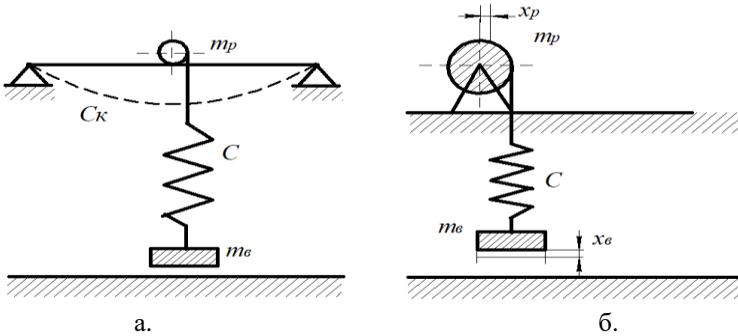


Рис.1.Схема динамічного навантаження вантажного пристрою при підйомі вантажу “з ваги»: а) на мостовому крані; б) розрахункова схема.

Для маси  $m_p$  рушійною силою є вага вантажу  $Q_e$  ( $Q_e = m_e \cdot g$ ,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $g = 9,81$  м/с<sup>2</sup>), а також надлишкова сила двигуна  $T_{надл.}$ ; для маси  $m_e$  – вага вантажу  $Q_e$ , діюча у тому ж напрямку, що й сила інерції вантажу при підйомі.

У кранах з приводом механізму підйому вантажу від двигуна трифазного струму надлишкову силу  $T_{надл.}$  можна вважати постійною (при інших законах зміни рушійної сили, а відповідно й надлишкової, динамічність процесу підйому буде меншою) [1].

Рівняння руху мають вигляд:

$$\begin{cases} m_p \cdot \ddot{x}_p + C(x_p - x_e) = Q_e + T_{надл.}; \\ m_e \cdot \ddot{x}_e + C(x_p - x_e) = -Q_e, \end{cases} \quad (4)$$

де  $(x_p - x_e)$  – у подальшому позначаємо через  $\xi$ . Тоді:

$$\dot{\xi} = (\dot{x}_p - \dot{x}_e); \quad \ddot{\xi} = (\ddot{x}_p - \ddot{x}_e). \quad (5)$$

У нових позначеннях ( $\xi$ ) та (5) замість (4) маємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_p \cdot \ddot{x}_p + C\xi = Q_e + T_{надл.}; \\ m_e \cdot \ddot{x}_e - C\xi = -Q_e. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}_p + \frac{C}{m_p} \cdot \xi = \frac{Q_e + T_{надл.}}{m_p}; \\ \ddot{x}_e - \frac{C}{m_e} \cdot \xi = -\frac{Q_e}{m_e}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Після віднімання від першого рівняння системи (6) другого рівняння цієї ж системи отримаємо звичайне диференціальне рівняння (неоднорідне) для  $\xi$ :

$$\ddot{\xi} + \Omega^2 \xi = \frac{Q_e + T_{надл.}}{m_p} + \frac{Q_e}{m_e}, \quad \Omega^2 = C \cdot \left( \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e} \right). \quad (7)$$

Будемо для випадку підйому вантажу «з ваги» використовувати для розв'язку (7) наступні початкові умови:

$$\xi|_{t=0} = \frac{Q_e}{C}; \quad \dot{\xi}|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

Загальний розв'язок (7) шукаємо у вигляді:

$$\xi(t) = A_1 \cos \Omega t + A_2 \sin \Omega t + \frac{1}{\Omega^2} \cdot \left[ \frac{Q_e + T_{надл.}}{m_p} + \frac{Q_e}{m_e} \right]. \quad (9)$$

Враховуючи умови (8), з (9) маємо:

$$A_1 = \frac{Q_e}{C} - \frac{1}{\Omega^2} \cdot \left[ \frac{Q_e + T_{надл.}}{m_p} + \frac{Q_e}{m_e} \right]; \quad A_2 = 0. \quad (10)$$

Тоді розв'язок  $\xi(t)$  (9) подаємо наступним чином:

$$\xi(t) = \left\{ \frac{Q_e}{C} \right\} \cos \Omega t + \frac{1}{\Omega^2} \cdot \left[ \frac{Q_e + T_{надл.}}{m_p} + \frac{Q_e}{m_e} \right] \cdot (1 - \cos \Omega t). \quad (11)$$

Подамо (11) у більш зручному вигляді для аналізу:

$$\xi(t) = \left\{ \frac{Q_e}{C} \right\} \cos \Omega t + \frac{2}{\Omega^2} \cdot \left[ \frac{Q_e + T_{надл.}}{m_p} + \frac{Q_e}{m_e} \right] \cdot \sin^2 \left( \frac{\Omega t}{2} \right). \quad (12)$$

Зусилля у пружному елементі (у пружній ланці), яке можна вважати впливом вантажу на вантажозахоплюючі пристрої:

$$P_{B.3.} = C\xi = Q_e \cos \Omega t + \frac{2C}{\Omega^2} \cdot \left[ \frac{Q_e + T_{надл.}}{m_p} + \frac{Q_e}{m_e} \right] \cdot \sin^2 \left( \frac{\Omega t}{2} \right). \quad (13)$$

Його величина змінна і є функцією жорсткості системи  $C$  та часу  $t$ .  
 Максимальне значення зусилля у пружній ланці  $P_{B.3,max}$  має місце при:

$$\cos \Omega t = -1 \Rightarrow \Omega t = (2n-1)\pi, \quad n \in N, \quad (14)$$

тобто у моменти часу:

$$t^* = \frac{(2n-1)\pi}{\Omega}, \quad n \in N, \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{aligned} P_{B.3,max} &= \left\{ \frac{2}{\Omega^2} \cdot \left[ \frac{Q_\sigma + T_{надл.}}{m_p} + \frac{Q_\sigma}{m_\sigma} \right] - \frac{Q_\sigma}{C} \right\} \cdot C = \frac{2C}{\Omega^2} \cdot \left[ \frac{Q_\sigma + T_{надл.}}{m_p} + \frac{Q_\sigma}{m_\sigma} \right] - Q_\sigma = \\ &= \frac{2C \cdot m_p \cdot m_\sigma}{C(m_p + m_\sigma)} \cdot \left[ \frac{Q_\sigma + T_{надл.}}{m_p} + \frac{Q_\sigma}{m_\sigma} \right] - Q_\sigma = \frac{2m_\sigma}{(m_p + m_\sigma)} \cdot (Q_\sigma + T_{надл.}) + \frac{2m_p}{(m_p + m_\sigma)} \cdot Q_\sigma - Q_\sigma = \\ &= 2Q_\sigma + \frac{2m_\sigma}{(m_p + m_\sigma)} \cdot T_{надл.} - Q_\sigma = Q_\sigma + \frac{2m_\sigma}{(m_p + m_\sigma)} \cdot T_{надл.} \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Оскільки надлишкове зусилля  $T_{надл.} = \varphi \cdot Q_\sigma$  (де  $\varphi$  – коефіцієнт пропорційності [1]), тоді:

$$P_{B.3.} = Q_\sigma + 2\varphi \cdot Q_\sigma \cdot \frac{m_\sigma}{(m_\sigma + m_p)} = Q_\sigma \cdot \left\{ 1 + 2\varphi \cdot \frac{m_\sigma}{(m_\sigma + m_p)} \right\}, \quad (17)$$

а коефіцієнт динамічності має вигляд:

$$K_\sigma = \frac{P_{B.3.}}{Q_\sigma} = 1 + 2\varphi \cdot \frac{m_\sigma}{(m_\sigma + m_p)} = 1 + \frac{2m_\sigma}{(m_p + m_\sigma)} \cdot \frac{T_{надл.}}{Q_\sigma}, \quad (18)$$

при  $t = t^*$ .

Останній коефіцієнт ( $K_\sigma$ ) характеризує динамічність навантаження вантажозахоплюючого пристрою за умови, що підйом починається у момент, коли на канати діє вага вантажу  $Q_\sigma$ .

При визначенні динамічного навантаження маси  $m_p$  та  $m_\sigma$  відносять до периферії барабану, причому масу  $m_\sigma$  визначають пропорційно квадрату відношення числа гілок вантажного поліспасти, які навиті (чи навиваються) на барабан, до загального числа гілок, на котрих висить вантаж [1].

Для встановлення залежності  $K_\sigma(t)$  маємо наступне співвідношення:

$$\begin{aligned}
 K_{\delta}(t) &= \frac{1 \cdot C}{Q_{\delta}} \cdot \left\{ \frac{Q_{\delta}}{C} \cos \Omega t + \frac{1}{\Omega^2} \cdot \left[ \frac{Q_{\delta} + T_{\text{надл.}}}{m_p} + \frac{Q_{\delta}}{m_{\delta}} \right] \cdot (1 - \cos \Omega t) \right\} = \\
 &= K_{\delta}(t) = \left\{ \cos \Omega t + \frac{C}{\Omega^2} \cdot \left[ \frac{1 + T_{\text{надл.}}/Q_{\delta}}{m_p} + \frac{1}{m_{\delta}} \right] \cdot (1 - \cos \Omega t) \right\} = \\
 &= K_{\delta}(t) = 1 + \frac{m_{\delta}}{(m_p + m_{\delta})} \cdot \frac{T_{\text{надл.}}}{Q_{\delta}} \cdot (1 - \cos \Omega t).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Подамо останній вираз у більш зручній формі:

$$K_{\delta}(t) = 1 + \frac{m_{\delta}}{(m_p + m_{\delta})} \cdot \frac{T_{\text{надл.}}}{Q_{\delta}} \cdot 2 \cdot \sin^2 \left( \frac{\Omega t}{2} \right). \tag{20}$$

При  $\frac{\Omega t}{2} = (2n_1 - 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ ,  $n_1 \in N$ , тобто, при:

$$t^{**} = \frac{(2n_1 - 1) \cdot \pi}{\Omega}, \quad n_1 \in N, \tag{21}$$

$$K_{\delta \max} = 1 + \frac{2 \cdot T_{\text{надл.}} \cdot m_{\delta}}{Q_{\delta} \cdot (m_p + m_{\delta})}. \tag{22}$$

Графік залежності (20) поданий на рис.2.

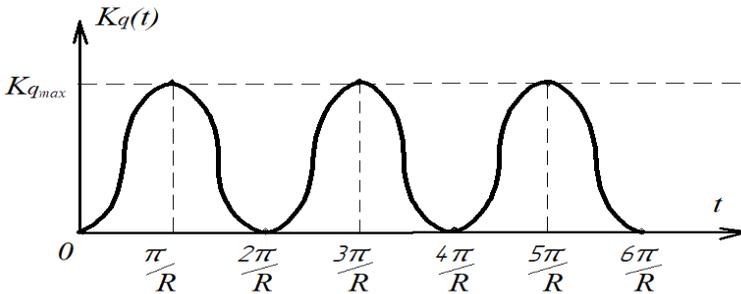


Рис.2. Залежність  $K_{\delta}(t)$  при підйомі вантажу мостовим краном «з ваги»

На рис.2 введені позначення:

$$K_{\delta \max} = 1 + \frac{2T_{\text{надл.}} \cdot m_{\delta}}{(m_p + m_{\delta})}. \tag{21^*}$$

При гальмуванні вантажу, який спускається,  $P_{\text{дин}}$  та коефіцієнт динамічності  $K_{\delta}$  визначають за формулами (13)-(18), а  $K_{\delta}(t)$  – за

формулами (19)-(22), (21<sup>\*</sup>). При цьому під  $T_{надл.}$  розуміємо наступну різницю:

$$T_{надл.} = T_{гальм.} - Q_{\epsilon}, \quad (23)$$

де:  $T_{гальм.}$  – гальмівне зусилля, приведене до вантажу.

Оскільки момент, який створюється гальмами, зазвичай менше максимального моменту [1,2], що створюється двигуном, тоді динамічне зусилля при гальмуванні вантажу, який спускається, не перевищує динамічного зусилля, яке виникає при підйомі вантажу «з ваги».

Визначимо далі закони руху мас  $m_p$  та  $m_{\epsilon}$ , виходячи з рівнянь системи (4), (6), (7) та закону  $\xi(t)$  (11), (12) за наступних (ненульових) початкових умов (при підйомі «з ваги»):

$$x_{\epsilon}|_{t=0} = 0; \quad \dot{x}_{\epsilon}|_{t=0} = 0; \quad x_p|_{t=0} = x_{\epsilon}|_{t=0} + \frac{Q_{\epsilon}}{C} = \frac{Q_{\epsilon}}{C}; \quad \dot{x}_p|_{t=0} = 0. \quad (24)$$

З системи (6) для  $x_p$  маємо:

$$\ddot{x}_p + \frac{C}{m_p} \cdot \xi(t) = \frac{Q_{\epsilon} + T_{надл.}}{m_p}. \quad (25)$$

З системи (6) для  $x_{\epsilon}$  маємо:

$$\ddot{x}_{\epsilon} + g = \frac{C}{m_{\epsilon}} \cdot \xi(t). \quad (26)$$

Рівняння (25) та (26) треба розв'язати за початкових умов (24). Знаючи  $\xi(t)$  (11) і двічі інтегруючи по  $t$  кожне з рівнянь (25) та (26), матимемо:

$$x_p(t) = \frac{2m_{\epsilon}^2 \cdot T_{надл.}}{C \cdot (m_p + m_{\epsilon})^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \frac{(Q_{\epsilon} + T_{надл.})}{2m_p} \cdot t^2 + \frac{Q_{\epsilon}}{C}. \quad (27)$$

$$x_{\epsilon}(t) = -\frac{2m_p \cdot m_{\epsilon} \cdot T_{надл.}}{C \cdot (m_p + m_{\epsilon})^2} \cdot \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \frac{T_{надл.}}{(m_p + m_{\epsilon})} \cdot \frac{t^2}{2}. \quad (28)$$

З (27) й (28) чітко видно, що у маси  $m_{\epsilon}$  та у маси  $m_p$  наявні коливання, частота котрих  $\Omega$ .

Визначимо умови та режими руху  $\xi(t)$ ,  $x_g(t)$ ,  $x_p(t)$ , за яких у період розгону системи (до набуття вантажопідйомним механізмом усталеної швидкості підйому/спускання вантажу ( $V$ )) відсутні коливні процеси як у маси  $m_p$ , так і у маси  $m_g$ . Нехай тривалість пуску системи, протягом якої встановлюється усталений режим підйому вантажу, тобто швидкість підйому стає сталою величиною й дорівнює  $V$ , складає  $\tau_n$ . Тоді рух, за якого координата  $\xi(t)$  задовольняє критерію якості руху:

$$\left\{ \frac{1}{\tau_n} \cdot \int_0^{\tau_n} (\xi(t))^2 dt \right\}^{1/2} \Rightarrow \min, \quad (29)$$

і буде шуканим рухом мас  $m_p$  та  $m_g$  системи. Необхідною умовою реалізації критерію (29) є рівняння Ейлера-Пуассона, яке можна отримати, замінюючи у підінтегральному виразі (29)  $\xi(t)$  на вираз (згідно (7)):

$$\xi(t) = \frac{1}{\Omega^2} \cdot \left\{ \frac{Q_g + T_{надл.}}{m_p} + \frac{Q_g}{m_g} - \ddot{\xi} \right\}, \quad (30)$$

тоді вказане рівняння (Ейлера-Пуассона) для (29), (30) набуває вигляду:

$$\dot{\xi}^{(IV)} = 0. \quad (31)$$

Будемо розшукувати розв'язок (31) у вигляді сплайну третього порядку по  $t$ :

$$\xi = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3. \quad (32)$$

Щоб знайти невизначені константи  $a_i$ ,  $i = \overline{(1, 4)}$ , використаємо наступні умови (термінальні):

$$\xi|_{t=0} = \frac{Q_g}{C}; \quad \dot{\xi}|_{t=0} = 0; \quad \ddot{\xi}|_{t=0} = \left\{ \frac{(Q_g + T_{надл.})}{m_p} + \frac{Q_g}{m_g} \right\} - \Omega^2 \cdot \xi|_{t=0} = \frac{Q_g + T_{надл.}}{m_p} + g^*, \quad (33)$$

$$\text{де: } g^* = g - \Omega^2 \cdot \frac{Q_g}{C}.$$

Остання (термінальна) умова має вигляд:

$$\dot{\xi}|_{t=\tau_n} = 0. \quad (34)$$

Диференціюючи по  $t$  відповідну кількість разів вираз (32) та використовуючи умови (33), (34), матимемо:

$$a_1 = \frac{Q_e}{C}; \quad a_2 = 0; \quad 2a_3 = \frac{(Q_e + T_{\text{надл.}})}{m_p} + g^*; \quad a_4 = -\frac{2a_3}{3\tau_{\text{п}}}. \quad (35)$$

Отже, для того, щоб виконувався критерій якості руху (29) або (30), необхідно, щоб  $\xi(t)$  змінювалась з полином часу за наступним законом:

$$\xi(t) = \frac{Q_e}{C} + \left\{ \frac{Q_e + T_{\text{надл.}}}{m_p} + g^* \right\} \cdot \frac{t^2}{2} - \left\{ \frac{Q_e + T_{\text{надл.}}}{m_p} + g^* \right\} \cdot \frac{t^3}{3\tau_{\text{п}}}. \quad (36)$$

Або:

$$\xi(t) = \frac{Q_e}{C} + \left\{ \frac{Q_e + T_{\text{надл.}}}{m_p} + g^* \right\} \cdot \left\{ \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3\tau_{\text{п}}} \right\}. \quad (37)$$

Тоді  $P_{B.3.}$  приймає вигляд:

$$P_{B.3.} = C \cdot \xi(t) = Q_e + C \cdot \left\{ \frac{Q_e + T_{\text{надл.}}}{m_p} + g^* \right\} \cdot \left\{ \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3\tau_{\text{п}}} \right\}. \quad (38)$$

Для  $K_{\delta}(t)$  маємо:

$$K_{\delta}(t) = \frac{P_{B.3.}(t)}{Q_e} = 1 + C \cdot \left\{ \frac{1 + T_{\text{надл.}}/Q_e}{m_p} + \frac{1 \cdot g^*}{m_e \cdot g} \right\} \cdot \left\{ \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3\tau_{\text{п}}} \right\}. \quad (39)$$

Максимального значення  $P_{B.3.}(t)$  (38) та  $K_{\delta}(t)$  (39) набувають у кінці перехідного процесу (пуску) при  $t = \tau_{\text{п}}$ :

$$(P_{B.3.})_{\text{max}} = Q_e + C \cdot \left\{ \frac{Q_e + T_{\text{надл.}}}{m_p} + g^* \right\} \cdot \frac{\tau_{\text{п}}^2}{6}. \quad (40)$$

$$(K_{\delta})_{\text{max}} = 1 + C \cdot \left\{ \frac{1 + T_{\text{надл.}}/Q_e}{m_p} + \frac{1 \cdot g^*}{m_e \cdot g} \right\} \cdot \frac{\tau_{\text{п}}^2}{6}. \quad (41)$$

Знайдемо закони руху  $x_e(t)$  та  $x_p(t)$ , які мають маси  $m_e$  та  $m_p$  при  $\xi(t)$  (36), а також задовольняють умовам (термінальним) (24):

$$x_p(t) = \left( -\frac{C}{m_p} \right) \cdot \left\{ \frac{Q_e}{C} \cdot \frac{t^2}{2} + \left( \frac{Q_e + T_{\text{надл.}}}{m_p} + g^* \right) \cdot \left( \frac{t^4}{24} - \frac{t^5}{60\tau_{\text{п}}} \right) \right\} + \left( \frac{Q_e + T_{\text{надл.}}}{m_p} \right) \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{Q_e}{C}, \quad (42)$$

$$x_g(t) = \left( \frac{C}{m_g} \right) \cdot \left\{ \frac{Q_g}{C} \cdot \frac{t^2}{2} + \left( \frac{Q_g + T_{\text{надл.}}}{m_p} + g^* \right) \cdot \left( \frac{t^4}{24} - \frac{t^5}{60\tau_{\Pi}} \right) \right\} - \frac{gt^2}{2}. \quad (43)$$

Використовуючи залежності  $\dot{x}_p(t)$  й  $\dot{x}_g(t)$  та їх значення у момент  $t = \tau_{\Pi}$ , а саме:  $\dot{x}_p|_{t=\tau_{\Pi}} = \dot{x}_g|_{t=\tau_{\Pi}} = V$ , можна знайти значення  $\tau_{\Pi}$  й  $V$ :

$$\frac{\left( -\frac{C}{m_p} \right) \cdot \left\{ \frac{Q_g}{C} \cdot \tau_{\Pi} + \left( \frac{Q_g + T_{\text{надл.}}}{m_p} + g^* \right) \cdot \left( \frac{\tau_{\Pi}^3}{12} \right) \right\} + \left( \frac{Q_g + T_{\text{надл.}}}{m_p} \right) \cdot \tau_{\Pi}}{\left( \frac{C}{m_b} \right) \cdot \left\{ \frac{Q_g}{C} \cdot \tau_{\Pi} + \left( \frac{Q_g + T_{\text{надл.}}}{m_p} + g^* \right) \cdot \left( \frac{\tau_{\Pi}^3}{12} \right) \right\} - g\tau_{\Pi}} = 1, \quad (44)$$

звідси маємо:

$$\tau_{\Pi} = \left\{ \frac{12 \cdot \left[ \frac{T_{\text{надл.}}}{m_p} \right]}{\Omega^2 \cdot \left( \frac{Q_g + T_{\text{надл.}}}{m_p} + g^* \right)} \right\}^{1/2}. \quad (45)$$

Знаючи зі співвідношення (45)  $\tau_{\Pi}$ , легко знайти  $V$  наступним чином (це значення повинне задовольняти нормам, стандартам, які прийняті для кранових конструкцій і, зрозуміло, не перевищувати їх для конкретних типів навантажень кранів та конкретних типів виконуваних ними робіт щодо обробки вантажів):

$$V = \left\{ C \cdot \left( \frac{1}{m_g} - \frac{1}{m_p} \right) \cdot \left[ \frac{Q_g}{C} \cdot \tau_{\Pi} + \left( \frac{Q_g + T_{\text{надл.}}}{m_p} + g^* \right) \cdot \left( \frac{\tau_{\Pi}^3}{12} \right) \right] + \left( \frac{Q_g + T_{\text{надл.}}}{m_p} - g \right) \cdot \tau_{\Pi} \right\} \cdot \frac{1}{2}. \quad (46)$$

Розглянемо числовий приклад.

**Приклад.** Визначити коефіцієнт динамічності вантажу вантажозахоплюючого пристрою, який підвішений на чотирьох гілках канату при підйомі вантажу масою  $m_g = \frac{Q_g}{g} = 10 \cdot 10^3 = 10^4$  кг (вагою

$Q_g = 9,81 \cdot 10^4$  Н=98,1 кН) «з ваги» зі швидкістю  $v_g = 30$  м/хв=0,5 м/с. Режим роботи крана – середній. При вазі  $q$  вантажозахоплюючого пристрою, яка дорівнює 5% від ваги вантажу ( $q=4905$ Н=4,905кН), натяг гілки канату, яка навивається на барабан, з урахуванням ККД поліспасти  $\eta_{\Pi}$  визначається наступним чином ( $\eta_{\Pi}=95\%$ ):

$$S_{\sigma} = 1,05 \cdot Q_{\sigma} / (4 \cdot \eta_{\Pi}) = 1,05 \cdot 98100 / (4 \cdot 0,95) \approx 27107 \text{ Н.}$$

При коефіцієнті запасу міцності  $n_k = 5,5$  можна застосувати канат за ДГСТ 2688-80\* діаметром  $d_k = 16,5 \text{ мм} = 16,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$  за межею міцності матеріалу дроту  $\sigma_B = 1700 \text{ МПа} = 1,7 \cdot 10^9 \text{ Па}$ . Діаметр барабану можна прийняти  $D_{\sigma} \approx 30d_k \approx 495 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ .

Необхідна швидкість канату при одинарному поліспасті та його кратності  $u_n = 4$  складає:

$$v_k = v_{\sigma} \cdot u_{\Pi} = 0,5 \text{ м/с} \cdot 4 = 2 \text{ м/с} = 120 \text{ м/хв.}$$

Необхідна частота обертання барабану складає:

$$n_{\sigma} = v_k / (\pi \cdot D_{\sigma}) = 2 / (3,14 \cdot 495 \cdot 10^{-3}) \approx 1,29 \text{ об/с} = 77,4 \text{ об/хв.}$$

Необхідна потужність двигуна при ККД механізму  $\eta_M = 0,9$  складе:

$$N = S_{\sigma} \cdot v_k / \eta_M = 27107 \cdot 2 / 0,9 \approx 60238 \text{ Вт} = 60,238 \text{ кВт.}$$

Можна застосувати двигун типу МТП-612-10 потужністю  $N = 60 \text{ кВт}$  при тривалості вмикання 25% й частоті обертання валу  $n_{\text{дв.}} = 572 \text{ об/хв} \approx 59,90 \text{ 1/с}$

$= 9,53 \text{ об/с}$ . Момент інерції ротора  $I_p = 5,25 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ . Необхідне передатне число механізму:

$$u_M = n_{\text{дв.}} / n_{\sigma} = 572 / 77,4 = 9,53 / 1,29 \approx 7,4.$$

Момент інерції ротора двигуна та інших частин механізму, які обертаються, що враховується коефіцієнтом 1,25, приведений до валу барабана:

$$I_M = 1,25 \cdot I_p \cdot u_M^2 = 1,25 \cdot 5,25 \cdot 7,4^2 \approx 359 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Маса, приведена до периферії барабану радіусом  $R_{\sigma} = 0,25 \text{ м}$ , складає:

$$m_p = I_M \cdot \omega^2 / v^2 = I_M / R_{\sigma}^2 = 359 / 0,25^2 = 5744 \text{ кг.}$$

Маса вантажу, віднесена до периферії барабану:

$$\tilde{m}_{\sigma} = m_{\sigma} / u_{\Pi}^2 = 10000 / 4^2 = 625 \text{ кг.}$$

Коефіцієнт

$$\tilde{m}_{\sigma} / (m_p + \tilde{m}_{\sigma}) = 625 / (625 + 5744) \approx 0,098.$$

Для двигуна МТП-612-10 кратність максимального моменту дорівнює 2,8, а  $\varphi = 2,8 - 1 = 1,8$ .

Максимальний коефіцієнт динамічності (за звичайного/неоптимального режиму руху канату) складася:

$$(K_{\delta})_{\max} = 1 + 2\varphi \cdot \left[ \tilde{m}_e / (\tilde{m}_e + m_p) \right] = 1 + 2 \cdot 1,8 \cdot 0,098 \approx 1,353.$$

При збільшенні швидкості підйому коефіцієнт динамічності різко зростає. Так, якщо для умов прикладу, що розглядається, прийняти швидкість підйому у 2 рази більшою, тобто не 30 м/хв = 0,5 м/с, а 60 м/хв = 1 м/с, тоді  $V'_k = 240$  м/хв = 4 м/с;  $n'_b = 77,4 \cdot 2$  об/хв = 154,8 об/хв;  $N' = 120$  кВт. Можна застосувати двигун типу МТП-712-12 потужністю  $N'_{\delta e} = 125$  кВт, при тривалості вмикання 25% та частоті обертання валу  $n'_{\delta e} = 587$  об/хв  $\approx 9,78$  об/с.

Момент інерції ротора  $I_p = 12,75$  кг·м<sup>2</sup>;  $\Phi = 1,8$ . Тоді:

$$u'_m = n'_{\delta e} / n'_b = 587 / 154,8 = 3,79; I'_m = 1,25 \cdot 12,75 \cdot 3,79^2 = 228,93 \text{ кг·м}^2.$$

$$m'_p = I'_m / R_b^2 = 228,93 / 0,25^2 = 3662,9 \text{ кг.}$$

$$\tilde{m}'_e = 625 \text{ кг; } \tilde{m}'_e / (\tilde{m}_e + m'_p) = 625 / (625 + 3662,9) \approx 0,146.$$

Коефіцієнт динамічності (максимальний):

$$(K'_{\delta})_{\max} = 1 + 2 \cdot 1,8 \cdot 0,146 \approx 1,526.$$

$$(K'_{\delta})_{\max} > (K_{\delta})_{\max}, \text{ оскільки } 1,526 > 1,353.$$

Отже, така динамічність підйому вантажу (зростаюча) може мати місце при приводі механізму від короткозамкненого двигуна за відсутності затухання у системі й при умові  $\cos \Omega t = -1$ . При системах розгону з поступовим зростанням швидкості, тобто з більшим часом/тривалістю перехідних процесів, коефіцієнт  $K_{\delta}$  буде меншим. При обранні системи приводу механізму підйому це слід враховувати.

Для випадку підйому вантажу «з основи»/«з підхватом» слід використовувати для розв'язку (7) наступні початкові умови:

$$\xi|_{t=0} = 0; \dot{\xi}|_{t=0} = v_0,$$

де:  $V_0$  – початкова швидкість усталеного руху системи у процесі підйому вантажу. Для визначення величини  $V_0$  можна використати наступні міркування.

Коли вантаж вагою  $Q_g = m_g \cdot g$  лежить на основі, то деформує останню і величина переміщення  $\tilde{x}_{\Pi}$  основи внаслідок дії на неї сили  $Q_g$  складе:  $\tilde{x}_{\Pi} = Q_g / C_{\text{основи}}$ , де  $C_{\text{основи}}$  – коефіцієнт жорсткості основи. При відриві вантажу у цьому способі його підйому краном уся потенціальна енергія, яку має вантаж внаслідок взаємодії з основою та її деформації переходить (у зв'язку з наявністю закону збереження енергії у механіці) у кінетичну енергію руху вантажу з початковою швидкістю  $v_0$ . Тому маємо наступне співвідношення:

$$\frac{C_{\text{основи}} \cdot \tilde{x}_{\Pi}^2}{2} = \frac{m_g \cdot v_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{m_g \cdot g^2}{C_{\text{основи}}}} = \sqrt{\frac{Q_g \cdot g}{C_{\text{основи}}}}. \quad (48)$$

Загальний розв'язок (7) шукаємо у вигляді (9), але, враховуючи тепер умови (47), матимемо:

$$A_1 = -\frac{1}{\Omega^2} \cdot \left[ \frac{Q_g + T_{\text{надл.}}}{m_p} + \frac{Q_g}{m_g} \right]; \quad A_2 = \frac{v_0}{\Omega}. \quad (49)$$

Тоді розв'язок  $\xi(t)$  (9) подаємо наступним чином:

$$\xi(t) = \frac{2}{\Omega^2} \cdot \left[ \frac{Q_g + T_{\text{надл.}}}{m_p} + \frac{Q_g}{m_g} \right] \cdot \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \frac{v_0}{\Omega} \cdot \sin \Omega t. \quad (50)$$

Зусилля у пружному елементі/каналі, яке тепер можна вважати впливом вантажу на вантажозахоплюючі пристрої, складе:

$$P_{B.3.} = C \cdot \xi = \frac{2C}{\Omega^2} \cdot \left[ \frac{Q_g + T_{\text{надл.}}}{m_p} + \frac{Q_g}{m_g} \right] \cdot \sin^2\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \frac{C \cdot v_0}{\Omega} \cdot \sin \Omega t. \quad (51)$$

Використовуючи співвідношення елементарної тригонометрії, можна (51) подати наступним чином:

$$P_{B.3.}(t) = \frac{2C}{\Omega^2} \cdot \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \cdot \left\{ \frac{\left[ \frac{Q_g + T_{\text{надл.}}}{m_p} + \frac{Q_g}{m_g} \right]}{\Omega} + v_0 \cdot \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) \right\}. \quad (52)$$

Аналіз співвідношень (50)-(52) показує, що у даному варіанті підйому вантажу («з підхватом») у моменти часу  $t^*$  (15) значення  $P_{B.3.\text{max}}$  ще більше, ніж у випадку підйому вантажу «з ваги», оскільки тепер:

$$P_{B.3.\text{max}}(t) \Big|_{t=t^*} = 2Q_g + \frac{2m_g}{(m_p + m_g)} \cdot T_{\text{надл.}}. \quad (53)$$

Враховуючи міркування, наведені вище для (17), (18), тепер маємо, що коефіцієнт динамічності набуває вигляду:

$$K_{\partial} \Big|_{t=t^*} = 2 + \frac{2m_{\epsilon}}{(m_p + m_{\epsilon})} \cdot \frac{T_{\text{надл.}}}{Q_{\epsilon}}. \quad (54)$$

Отже, при підйомі вантажу «з основи»/«з підхватом» величина  $K_{\partial}$  у певні моменти часу ( $t^*$ ) набуває ще більших значень, ніж за підйому «з ваги».

Визначимо тепер закон руху  $\xi(t)$ , який задовольняє критерію якості (29), але за способу підйому «з основи»/«з підхватом».

Повторюючи наведений вище алгоритм для способу підйому вантажу «з ваги» маємо наступні результати.

Знову  $\xi(t)$  розшукуємо у вигляді (32), оскільки  $\xi(t)$  повинне задовольняти (31). Але тепер змінюються початкові і кінцеві умови, тобто замість (33) маємо:

$$\xi \Big|_{t=0} = 0; \quad \dot{\xi} \Big|_{t=0} = v_0; \quad \ddot{\xi} \Big|_{t=0} = \left\{ \frac{Q_{\epsilon} + T_{\text{надл.}}}{m_p} + g \right\}; \quad \dot{\xi} \Big|_{t=\tau_{\text{н}}} = 0. \quad (55)$$

Тоді для коефіцієнтів сплайну по  $t$  функції  $\xi(t)$  (32) маємо:

$$a_1 = 0; \quad a_2 = v_0; \quad 2a_3 = \frac{Q_{\epsilon} + T_{\text{надл.}}}{m_p} + g; \quad a_4 = -\frac{2a_3}{3\tau_{\text{н}}}. \quad (56)$$

Отже, для того, щоб виконувався критерій якості руху (29), (30), необхідно, щоб  $\xi(t)$  задовольняла наступному закону зміни з полином часу  $t$ :

$$\xi(t) = v_0 t + \left\{ \frac{Q_{\epsilon} + T_{\text{надл.}}}{m_p} + g \right\} \cdot \left\{ \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3\tau_{\text{н}}} \right\}. \quad (57)$$

Тоді  $P_{B.3.}$  приймає вигляд:

$$P_{B.3.}(t) = C \cdot \xi(t) = C \cdot v_0 t + C \cdot \left\{ \frac{Q_{\epsilon} + T_{\text{надл.}}}{m_p} + g \right\} \cdot \left\{ \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3\tau_{\text{н}}} \right\}. \quad (58)$$

Для  $K_{\partial}(t)$  маємо:

$$K_{\partial}(t) = \frac{P_{B.3.}^{(\text{нове})}}{Q_{\epsilon}} = \frac{Q_{\epsilon} + P_{B.3.}(t)}{Q_{\epsilon}} = 1 + \frac{P_{B.3.}(t)}{Q_{\epsilon}}, \quad (59)$$

де  $P_{B.3.}^{(повне)}$  – повне силове навантаження вантажозахоплюючого пристрою:  $P_{B.3.}^{(повне)} = Q_г + P_{B.3.}(t)$ , або:

$$K_о(t) = 1 + \frac{Cv_0t}{Q_г} + \frac{C}{Q_г} \cdot \left\{ \frac{Q_г + T_{надл.}}{m_p} + g \right\} \cdot \left\{ \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3\tau_{п}} \right\}. \quad (60)$$

Максимального значення цей коефіцієнт набуває у момент  $t = \tau_{п}$ :

$$\left\{ K_о(t) \Big|_{t=\tau_{п}} \right\} = K_о(\tau_{п}) = K_{оmax} = 1 + \frac{Cv_0\tau_{п}}{Q_г} + \frac{C}{Q_г} \cdot \left\{ \frac{Q_г + T_{надл.}}{m_p} + g \right\} \cdot \frac{\tau_{п}^2}{6}. \quad (61)$$

З (60) чітко видно, що у цьому випадку  $K_о(t)$  менше, ніж за закону руху  $\xi(t)$  (50). Останній, до того ж, призводить до небажаних коливань вантажу на канаті. Для  $\xi(t)$  (57,1) подібні коливання відсутні.

Визначимо далі закони руху  $x_p(t)$ ,  $x_г(t)$ . Задля цього знову використовуємо закони та рівняння (25), (26) й початкові умови:

$$x_г|_{t=0} = 0; \quad \dot{x}_г|_{t=0} = 0; \quad \dot{x}_p|_{t=0} = v_0; \quad x_p|_{t=0} = 0. \quad (62)$$

Для  $\ddot{x}_p(t)$  маємо рівняння (25), яке треба розв'язати за умов (62) при  $\xi(t)$  (57). Маємо:

$$x_p(t) = \left( -\frac{C}{m_p} \right) \cdot \left\{ \frac{v_0 \cdot t^3}{6} + \left( \frac{Q_г + T_{надл.}}{m_p} + g \right) \cdot \left( \frac{t^4}{24} - \frac{t^5}{60\tau_{п}} \right) \right\} + \left( \frac{Q_г + T_{надл.}}{m_p} \right) \cdot \frac{t^2}{2} + v_0 t. \quad (63)$$

$$x_г(t) = -\frac{(-gt^2)}{2} \cdot \left( \frac{C}{m_г} \right) \cdot \left\{ \frac{v_0 \cdot t^3}{6} + \left( \frac{Q_г + T_{надл.}}{m_p} + g \right) \cdot \left( \frac{t^4}{24} - \frac{t^5}{60\tau_{п}} \right) \right\}. \quad (64)$$

Оскільки при  $t = \tau_{п}$   $\dot{x}_p = \dot{x}_г = V$ , де  $V$  – усталена швидкість підйому вантажу, можна цю обставину використати для визначення  $\tau_{п}$ . Зазвичай величина  $V$  задається нормами експлуатації кранових конструкцій певного типу та механізмів підйому вантажу, які при цьому використовуються. Отже, для знаходження  $\tau_{п}$  можна використати, наприклад, вираз  $x_г(t)$  (64), продиференціювати його по часу  $t$  і знайти значення цього останнього виразу при  $t = \tau_{п}$ . Тоді матимемо:

$$\dot{x}_g(t) \Big|_{t=\tau_{\Pi}} = V \Leftrightarrow (-g\tau_{\Pi}) + \left( \frac{C}{m_g} \right) \cdot \left\{ \frac{v_0 \cdot \tau_{\Pi}^2}{2} + \left( \frac{Q_g + T_{надл.}}{m_p} + g \right) \cdot \frac{\tau_{\Pi}^3}{12} \right\} = V. \quad (65)$$

Виникає кубічне рівняння (65) відносно  $\tau_{\Pi}$ , яке розв'язується за допомогою формул Кардано. Навпаки, якщо величина  $(\tau_{\Pi})$  задана, з (65) легко безпосередніми обчисленнями знайти величину  $V$  для конкретного варіанту підйому вантажу «з основи»/«з підхватом».

При розрахунку у випадку навантаження (динамічного) вантажного пристрою крана за підйому вантажу «з підхватом» («з основи») можна використати інші підходи [1]. Зокрема, можна знехтувати жорсткістю одного з елементів (канатів, оскільки пружність металоконструкції крана набагато вище, ніж власне канатів, причому коливання останніх до того ж ще й швидко затухають) і враховувати лише пружність другого елементу жорсткості – конструкції крана, тобто маси крану  $m_k$  й вантажу  $m_g$  розглядати як одну масу  $m$ .

За прийнятих припущень можна вважати, що підйом вантажу здійснюється наступним чином.

На першому етапі, після вмикання двигуна, відбувається вибирання слабину канату, на другому етапі – пружна деформація усіх елементів конструкції (рис.2). Другий етап продовжується до тих пір, поки зусилля  $P_0$  на вантажозахоплюючі пристрої, зростаючи від нуля, не стає рівним  $Q_g = m_g \cdot g$ . Лише після цього, на третьому етапі, починається підйом вантажу.

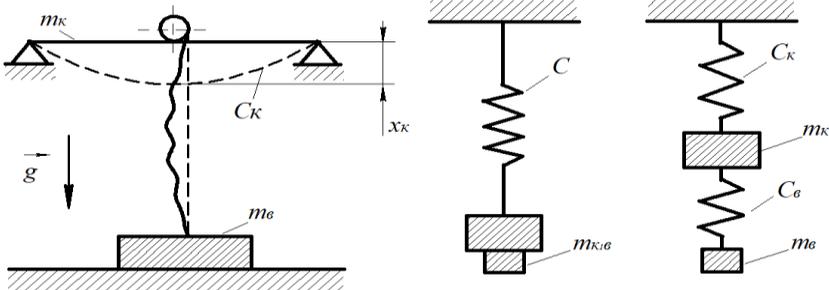


Рис.3. Схема динамічного навантаження вантажного пристрою при підйомі вантажу «з підхватом»:

- а) на кранах мостового типу; б,в) розрахункові схеми одно- та двомасової систем.

При переміщенні  $x_k$  маси крана  $m_k$  з жорсткістю  $C_k$  (точніше кранової балки як частини металоконструкції крану) кінетична енергія:

$$W = \tilde{m}_k \cdot \dot{x}_k^2 / 2, \quad \tilde{m}_k = m_g + m_k, \quad (66)$$

а потенціальна енергія:

$$U = C_k \cdot x_k^2 / 2. \quad (67)$$

Рушійною силою тут є сила  $P$ , різна для різних етапів підйому вантажу. Рівняння руху системи, яке виникає з рівняння Лагранжа другого роду, має вигляд:

$$(m_g + m_k) \cdot \ddot{x}_k + C_k \cdot x_k = P, \quad (68)$$

його розв'язок має наступний вигляд:

$$x_k = y_{ст} + A \sin pt + B \cos pt, \quad p = \sqrt{\frac{C_k}{(m_k + m_g)}}, \quad (69)$$

за умови, що на початку руху задовольняються наступні співвідношення для  $x_k(t)$  й  $\dot{x}_k(t)$ :

$$y_k = x_k|_{t=0} = y_{ст} = \frac{(m_g + m_k) \cdot g}{C_k}; \quad \dot{x}_k|_{t=0} = V_0, \quad (70)$$

де  $V_0$  – початкова швидкість підйому вантажу, початкове переміщення канату, коли повністю вибраний канат (його слабина ліквідована),  $y_{ст}$  – прогин конструкції від статичного навантаження. Після встановлення значень коефіцієнтів  $A$  та  $B$  маємо:

$$\begin{cases} x_k = y_{ст.} + y_{ст.} \cos pt + \frac{v_0}{p} \sin pt; \\ \dot{x}_k = -p \cdot y_k \sin pt + v_0 \cos pt; \\ \ddot{x}_k = -p^2 \cdot y_k \cos pt - v_0 \cdot p \sin pt. \end{cases} \quad (71)$$

$P_{дин.}$  – динамічне навантаження, діюче на вантажозахоплюючий пристрій, приймає вигляд:

$$P_{дин.} = m_g \cdot \ddot{x}_k = \left( \frac{Q_g}{g} \right) \cdot \left\{ -p^2 \cdot y_k \cos pt - v_0 p \sin pt \right\}. \quad (72)$$

Якщо виконується співвідношення:  $v_0 = p \cdot y_k$ , тоді з (71) маємо:

$$P_{\text{дин.}} = -\left(\frac{Q_g}{g}\right) \cdot v_0 \cdot p \sin pt. \quad (73)$$

Максимального значення  $P_{\text{дин.}}$  у цьому випадку набуває при умові:

$$\sin pt = -1. \quad (74)$$

Цей режим і умова реалізуються за високої початкової швидкості підйому вантажу ( $V_0$ ).

Якщо виконується співвідношення:  $v_0 = p \cdot y_k$ , тоді з (72) маємо:

$$P_{\text{дин.}} = -\left(\frac{Q_g}{g}\right) \cdot p^2 \cdot y_k \cos pt. \quad (75)$$

Максимального значення  $P_{\text{дин.}}$  у цьому випадку набуває при умові:

$$\cos pt = -1. \quad (76)$$

Цей режим і умова реалізуються за малої початкової швидкості підйому вантажу ( $V_0$ ).

У загальному випадку (для довільних значень  $V_0$ ) маємо:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\text{дин.}} = \left\{ -\frac{Q_g}{g} \right\} \cdot \left\{ \sqrt{v_0^2 \cdot p^2 + p^4 \cdot y_k^2} \sin(pt + \alpha) \right\} \\ \alpha = \arctg \left\{ \frac{p \cdot y_k}{v_0} \right\}. \end{array} \right. , \quad (77)$$

Максимального значення  $P_{\text{дин.}}$ , яке дорівнює

$$P_{\text{дин.}}^{(\max)} = \frac{Q_g}{g} \cdot \sqrt{v_0^2 \cdot p^2 + p^4 \cdot y_k^2} \quad (78)$$

набуває у моменти часу  $t^*$ , котрі визначаються зі співвідношення:

$$p \cdot t_n^* + \arctg \left\{ \frac{p \cdot y_{\text{ст}}}{v_0} \right\} = \frac{\pi}{2} (4n - 1), \quad n \in N. \quad (79)$$

Повне навантаження, діюче на вантажозахоплюючий пристрій, має вигляд:

$$\begin{cases} P_{B.3.} = Q_6 + P_{дин.}^{(max)} = Q_6 \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{g} \cdot \sqrt{v_0^2 \cdot p^2 + p^4 \cdot y_k^2} \right\}, \\ K_\delta = 1 + \frac{1}{g} \cdot \sqrt{v_0^2 \cdot p^2 + p^4 \cdot y_k^2}, \end{cases} \quad (80)$$

а при виконанні співвідношення, яке приводить до (73), (74), маємо:

$$P_{B.3.} = Q_6 \cdot \left\{ 1 + \frac{v_0}{g} \cdot p \right\} = Q_6 \cdot \left\{ 1 + \frac{v_0}{g} \cdot \sqrt{C_\kappa / (m_\kappa + m_6)} \right\}. \quad (81)$$

Оскільки  $C_\kappa = Q_6 / y_{ст} = \frac{m_6 \cdot g}{y_{ст}}$ , тоді з (81) можемо отримати:

$$K_{дин.} = 1 + \frac{v_0}{g} \cdot \sqrt{\frac{C_\kappa}{(m_\kappa + m_6)}} = 1 + v_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{(g \cdot y_{ст})} \cdot \left\{ \frac{m_6}{(m_\kappa + m_6)} \right\}}. \quad (82)$$

Визначимо далі закон руху  $x_\kappa(t)$ , за якого відсутні коливання у розглядуваній системі й виконуються початкові умови (70) та критерій якості руху типу:

$$\left\{ \frac{1}{\tau_\Pi} \cdot \int_0^{\tau_\Pi} \{x_\kappa(t)\}^2 dt \right\}^{1/2} \Rightarrow \min. \quad (83)$$

Вважаючи, що у (68)  $P = const$ , умова (83) виконується при (рівняння Ейлера-Пуассона):

$$x_\kappa^{(IV)} = 0. \quad (84)$$

Розв'язок (84) шукаємо при наступних термінальних (початкових та кінцевих) умовах підйому вантажу «з підхватом»:

$$\begin{aligned} x_\kappa|_{t=0} &= y_{ст}; \quad \dot{x}_\kappa|_{t=0} = v_0; \quad \ddot{x}_\kappa|_{t=0} = (m_6 + m_\kappa)^{-1} \cdot \{(m_\kappa + m_6) \cdot g - C_\kappa \cdot y_{ст}\} = \\ &= (m_\kappa \cdot g) \cdot (m_6 + m_\kappa)^{-1} = \frac{m_\kappa \cdot g}{(m_6 + m_\kappa)}; \quad \dot{x}_\kappa|_{t=\tau_\Pi} = V, \end{aligned} \quad (85)$$

де:  $V$  – усталена швидкість підйому вантажу після завершення перехідного процесу ( $t \geq \tau_\Pi$ ).

Розшукуємо  $x_\kappa(t)$ , яке задовольняє рівнянню (84) та умовам (85) у вигляді сплайну по  $t$ :

$$x_\kappa(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3. \quad (86)$$

Тоді з (85) маємо:

$$b_0 = y_{cr}; b_1 = v_0; 2b_2 = \frac{m_k g}{(m_\epsilon + m_k)}; b_3 = -\frac{2b_2}{3\tau_\Pi}, \quad (87)$$

або:

$$\begin{aligned} x_k(t) &= y_{cr} + v_0 \cdot t + \frac{m_k g}{(m_\epsilon + m_k)} \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{2}{3\tau_\Pi} \cdot \left( \frac{m_k g}{(m_\epsilon + m_k)} \cdot \frac{t^3}{2} \right) = \\ &= y_{cr} + v_0 \cdot t + \frac{m_k g}{2 \cdot (m_k + m_\epsilon)} \cdot t^2 - \frac{m_k g}{3\tau_\Pi (m_\epsilon + m_k)} \cdot t^3. \end{aligned} \quad (88)$$

Коефіцієнт динамічності  $K_\delta(t)$  не має коливного характеру при режимі руху (88):

$$K_\delta(t) = \frac{Q_\epsilon + m_\epsilon \cdot \ddot{x}_k}{Q_\epsilon} = 1 + \frac{\ddot{x}_k}{g} = 1 + \frac{m_k}{(m_k + m_\epsilon)} \cdot \left( 1 - \frac{2t}{\tau_\Pi} \right). \quad (89)$$

Зазначимо, що свого максимального значення  $K_\delta$  досягає у початковий момент часу  $t=0$ :

$$K_{\delta_{\max}}(t) \Big|_{t=0} = 1 + \frac{m_k}{(m_k + m_\epsilon)}. \quad (90)$$

Формули, отримані вище, (у наближенні одномасової моделі підйому вантажу «з підхватом») досить прості і можуть бути використані у практичних розрахунках, хоча й не враховують впливу другого елемента жорсткості, який існує у системі, що розглядається. При його врахуванні систему слід розглядати як двомасову з двома пружними зв'язками і, відповідно, як таку, що має дві степені вільності руху із відповідним накладанням коливань по кожній з частот та знаходженням максимуму протягом кількох періодів коливань.

Використання функцій Лагранжа для даної задачі дозволяє записати у цьому випадку наступну систему рівнянь для  $x_\epsilon$  та  $x_k$ :

$$\begin{cases} m_k \cdot \ddot{x}_k + C_k \cdot \dot{x}_k + C_\epsilon \cdot (x_k - x_\epsilon) = P_p - Q_\epsilon + Q_\epsilon = T_{\text{надл.}} + Q_\epsilon, \\ m_\epsilon \cdot \ddot{x}_\epsilon + C_\epsilon \cdot \dot{x}_\epsilon + C_\epsilon \cdot x_\epsilon = -Q_\epsilon, T_{\text{надл.}} = P_p - Q_\epsilon, Q_\epsilon = m_\epsilon \cdot g, \end{cases} \quad (91)$$

де:  $P_p$  – рушійна сила приводу механізму підйому.

Використовуючи друге рівняння системи (91) можна встановити, що:

$$x_k = \left( m_\epsilon \cdot \ddot{x}_\epsilon + C_\epsilon \cdot \dot{x}_\epsilon + Q_\epsilon \right) \cdot \frac{1}{C_\epsilon}. \quad (92)$$

Тоді, з (92) для  $\ddot{x}_k$  маємо:

$$\ddot{x}_k = \frac{1}{C_\epsilon} \cdot \left( m_\epsilon \cdot x_\epsilon^{(IV)} + C_\epsilon \cdot \ddot{x}_\epsilon \right). \quad (93)$$

Використовуючи співвідношення (92), (93), можна перше рівняння системи (91) звести до рівняння для  $x_\epsilon$  четвертого порядку, яке є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням:

$$x_\epsilon^{(IV)} + \ddot{x}_\epsilon \cdot \left\{ \frac{C_\epsilon}{m_\epsilon} + \frac{(C_\epsilon + C_\kappa)}{m_\kappa} \right\} + \frac{C_\kappa}{m_\kappa} \cdot \frac{C_\epsilon}{m_\epsilon} = \frac{C_\epsilon}{m_\epsilon \cdot m_\kappa} \cdot \left( T_{надл.} - \frac{C_\kappa}{C_\epsilon} \cdot Q_\epsilon \right), \quad (94)$$

або:

$$x_\epsilon^{(IV)} + \ddot{x}_\epsilon \cdot \left\{ \Omega_\epsilon^2 + \Omega_{пр}^2 \right\} + \Omega_\kappa^2 \cdot \Omega_\epsilon^2 \cdot x_\epsilon = \Omega_\epsilon^2 \cdot \frac{1}{m_\kappa} \cdot \left( T_{надл.} - \frac{C_\kappa}{C_\epsilon} \cdot Q_\epsilon \right), \quad (95)$$

$$\text{де: } \Omega_\epsilon^2 = \frac{C_\epsilon}{m_\epsilon}, \quad \Omega_{пр}^2 = \frac{C_\epsilon + C_\kappa}{m_\kappa}, \quad \Omega_\kappa^2 = \frac{C_\kappa}{m_\kappa}.$$

Тут введені наступні позначення:  $C_\epsilon$  – жорсткість підйомних канатів і приведена до них жорсткість елементів приводу, Н/м<sup>2</sup>;

$\Omega_{пр} = \sqrt{\frac{(C_\epsilon + C_\kappa)}{m_\kappa}}$  – приведена частота, 1/с;  $C_\kappa$  – жорсткість

металоконструкції крану, Н/м;  $m_\kappa$  – приведена маса металоконструкції крану, кг;  $m_\epsilon$  – маса вантажу.

Парціальні частоти даної системи (у с<sup>-1</sup>)  $p_{1,2} = \Omega_{1,2}$  можна знайти з наступних співвідношень:

$$\Omega_{1,2} = \left\{ \frac{\Omega_\epsilon^2 + \Omega_{пр}^2 \pm \sqrt{\frac{(\Omega_\epsilon^2 + \Omega_{пр}^2)^2}{4} - \Omega_\kappa^2 \cdot \Omega_\epsilon^2}}{2} \right\}^{1/2}. \quad (96)$$

Тривалість часу, яка відповідає моменту відриву вантажу від опори (при підніманні вантажу способом «з підхватом») знаходиться з наступного трансцендентного рівняння [1]:

$$\tau_0 + \left[ \frac{C_\epsilon}{C_\kappa \cdot \Omega_{пр}} \right] \cdot \sin(\Omega_{пр} \cdot \tau_0) = g \cdot \Omega_{пр}^2 / (v_0 \cdot \Omega_\kappa^2 \cdot \Omega_\epsilon^2), \quad (97)$$

де:  $V_0$  – швидкість підйому вантажу після його відриву від поверхні опори. Доволі часто  $V_0$  ототожнюють з  $V$  – усталеною швидкістю підйому вантажу [1,3], тобто ( $V_0 \approx V$ ). Хоча при точному аналізі процесу підйому вантажу способом «з підхватом»  $V_0$  знаходиться з наступних міркувань. Абсолютна деформація основи, на якій до початку підйому лежить вантаж, тобто  $X_0$ , визначається зі співвідношення:

$$X_0 = \frac{m_e \cdot g}{C_{осн.}}, \quad (98)$$

де:  $C_{осн.}$  – жорсткість основи, на якій знаходиться вантаж перед підйомом «з підхватом», Н/м. Вважаючи, що практично вся енергія деформації основи під дією вантажу маси  $m_e$  при відриві від неї вантажу переходить у його кінетичну енергію руху  $W^{(кін)} = \frac{m_e \cdot v_0^2}{2}$ , маємо (згідно з законом збереження енергії у механіці):

$$\frac{C_{осн.} \cdot X_0^2}{2} = \frac{m_e \cdot v_0^2}{2} \Leftrightarrow \frac{m_e \cdot g^2}{C_{осн.}} = v_0^2. \quad (99)$$

(При цьому ми нехтуємо втратами на теплові процеси, які відбуваються у деформованій основі при відриві від неї вантажу, тобто нехтуємо тепловими втратами, що, безумовно, існують у основі при відновленні її первинного, недеформованого стану). Остаточний вираз для  $V_0$  приймає вигляд:

$$v_0 = g \cdot \sqrt{\frac{m_e}{C_{осн.}}}. \quad (100)$$

При  $t > \tau_0$  починається підйом вантажу способом «з ваги», котрий описаний вище у вигляді системи рівнянь (4), де  $m_p \equiv m_k$ .

Розв'язок рівняння (95) можна подати наступним чином:

$$\begin{cases} x_e(t) = A_1 \sin \Omega_1 t + A_2 \cos \Omega_1 t + A_3 \sin \Omega_2 t + A_4 \cos \Omega_2 t + X^*, \\ X^* = \frac{1}{C_k} \cdot \left( T_{надл.} - \frac{C_k}{C_e} \cdot Q_e \right), \end{cases} \quad (101)$$

а константи  $A_i, i = \overline{(1,4)}$ , знаходимо з наступних термінальних (початкових і кінцевих) умов підйому вантажу способом «з підхватом»:

$$x_g|_{t=0} = 0; \dot{x}_g|_{t=0} = 0; \ddot{x}_g|_{t=\tau_0} = -g; \dot{x}_g|_{t=\tau_0} = v_0. \quad (102)$$

З (101) видно, що вантажу, який піднімають способом «з підхватом», притаманні коливання з парціальними частотами  $\Omega_1, \Omega_2$ , що викликає незручності й динамічні перевантаження канатної системи крану при здійсненні останнім низки навантажувально-розвантажувальних робіт [1]. Визначимо, за якого режиму руху  $x_g(t)$  можна позбутися вказаних вище незручностей. Для цього слід розглянути систему рівнянь (4), (6), котра зводиться до рівняння (7), але для  $t > \tau_0$  (коли відбувся відрив вантажу від опори з наступними початковими умовами руху (вони діють саме у моменти часу  $t > \tau_0$  й до моменту  $t = \tau_{II}$ , де  $\tau_{II}$  – момент часу, коли швидкість підйому вантажу досягне усталеного значення  $V$ , за якого здійснюється рівномірний підйом вантажу):

$$\xi|_{t=\tau_0} = \frac{Q_g}{C}; \dot{\xi}|_{t=\tau_0} = v_0; \ddot{\xi}|_{t=\tau_0} = \frac{T_{надл.}}{m_p}; \dot{\xi}|_{t=\tau_{II}} = V. \quad (103)$$

З рівняння (7) легко визначити  $\xi(t)$ :

$$\xi(t) = \frac{1}{\Omega^2} \cdot \left\{ \left( \frac{Q_g + T_{надл.}}{m_p} + \frac{Q_g}{m_g} \right) - \ddot{\xi} \right\}. \quad (104)$$

Будемо розшукувати такий режим руху, за якого виконується наступний критерій якості (цього руху):

$$\int_{\tau_0}^{\tau_{II}} (\xi(t))^2 dt \Rightarrow \min. \quad (105)$$

Якщо ввести нову змінну  $t^* = t - \tau_0$ , тоді критерій (105) та умови (103) приймуть наступний вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\tau_{II}-\tau_0} \{\xi(t^* + \tau_0)\}^2 d(t^*) \Rightarrow \min, \\ \xi|_{t^*=0} = \frac{Q_g}{C}; \dot{\xi}|_{t^*=0} = v_0; \ddot{\xi}|_{t^*=0} = \frac{T_{надл.}}{m_p}; \dot{\xi}|_{t^*=\tau_{II}-\tau_0} = V. \end{array} \right. \quad (106)$$

Використовуючи заміну  $\xi(t^* + \tau_0)$  (106) й підставляючи її у критерій якості руху (105), отримуємо необхідну умову реалізації цього критерію (рівняння Ейлера-Пуассона) вигляду:

$$\xi^{(IV)}(t^* + \tau_0) = 0. \quad (107)$$

Будемо розшукувати розв'язок цього рівняння у вигляді:

$$\xi(t^* + \tau_0) = \tilde{d}_0 + \tilde{d}_1 \cdot (t^* + \tau_0)^1 + \tilde{d}_2 \cdot (t^* + \tau_0)^2 + \tilde{d}_3 \cdot (t^* + \tau_0)^3. \quad (108)$$

Оскільки справедливе співвідношення:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi(t^* + \tau_0)}{d(t^* + \tau_0)} &= \frac{d\xi(t^* + \tau_0)/dt^*}{d(t^* + \tau_0)/dt^*} = d\xi(t^* + \tau_0)/dt^*; \\ \xi^{(IV)}(t^* + \tau_0) &= \xi_{t^*t^*t^*t^*}^{(IV)} = \xi_{4t^*}^{(IV)}(t^* + \tau_0), \quad \xi^{(IV)}(t^* + \tau_0) = \xi^{(IV)}(t), \end{aligned} \right. \quad (109)$$

а  $\tau_0 \leq t^* + \tau_0 \leq \tau_{II}$ , тоді  $0 \leq t^* \leq \tau_{II} - \tau_0$ .

Крім того, зрозуміло, що:

$$\lim_{t^* \rightarrow 0} \xi^{(IV)}(t^* + \tau_0) = \xi^{(IV)}(t^*) = \xi^{(IV)}(t). \quad (110)$$

Рівняння для  $\xi(t^*)$ , яке задовольняє умову Ейлера-Пуассона,  $\xi^{(IV)}(t^*) = 0$ , будемо розшукувати у вигляді сплайна по  $t^*$  третього порядку, а саме:

$$\xi(t^*) = d_0 + d_1 \cdot t^* + d_2 \cdot (t^*)^2 + d_3 \cdot (t^*)^3, \quad t^* \geq 0. \quad (111)$$

Для  $\xi(t)$  можна отримати:

$$\xi(t) = \tilde{d}_0 + \tilde{d}_1 \cdot t^1 + \tilde{d}_2 \cdot t^2 + \tilde{d}_3 \cdot t^3, \quad t \geq \tau_0. \quad (112)$$

По суті, запис (112) означає, що, починаючи з  $t \geq \tau_0$ , або  $t^* \geq 0$  функція  $\xi(t^*)$  веде себе щодо аргумента  $t^*$  так само, як і функція  $\xi(t)$ , – вона неперервна й монотонно зростаюча.

Враховуючи умови (106) для  $\xi(t^*)$  (111), маємо:

$$\xi(t^*) = \frac{Q_0}{C} + v_0 \cdot t^* + \frac{T_{наодл.}}{2m_p} \cdot (t^*)^2 + \left\{ \frac{(V - v_0) - \frac{T_{наодл.}}{m_p} \cdot (\tau_{п} - \tau_0)}{3(\tau_{п} - \tau_0)^2} \right\} \cdot (t^*)^3. \quad (113)$$

Динамічна складова зусилля, яке виникає у канатній системі при підйомі вантажу «з підхватом», має вигляд:

$$P_{Б.3.}(t^*) = C\xi(t^*) = Q_0 + Cv_0(t^*) + \frac{C \cdot T_{наодл.}}{2m_p} (t^*)^2 + C \left\{ \frac{(V - v_0) - \frac{T_{наодл.}}{m_p} \cdot (\tau_{п} - \tau_0)}{3(\tau_{п} - \tau_0)^2} \right\} (t^*)^3. \quad (114)$$

Коефіцієнт динамічності  $K_{дин}(t^*)$  має наступний вигляд:

$$K_{дин}(t^*) = \frac{P_{Б.3.}(t^*)}{m_e \cdot g} = 1 + \frac{C \cdot v_0 \cdot (t^*)}{m_e \cdot g} + \frac{C \cdot T_{наодл.}}{2m_p \cdot m_e \cdot g} \cdot (t^*)^2 + \frac{C \cdot \left[ (V - v_0) - \frac{T_{наодл.}}{m_p} \cdot (\tau_{п} - \tau_0) \right]}{m_e \cdot g \cdot 3(\tau_{п} - \tau_0)^2} \cdot (t^*)^3. \quad (115)$$

З (115) видно, що  $K_{дин}(t^*)$  не має коливного характеру.

Максимального значення ця величина набуває при  $t^* = \tau_{п} - \tau_0$ , а саме:

$$K_{дин}^{(max)}(t^*) = K_{дин}(t^*) \Big|_{t^* = \tau_{п} - \tau_0} = 1 + \frac{2 \cdot C \cdot v_0 \cdot (\tau_{п} - \tau_0)}{3m_e \cdot g} + \frac{C \cdot V \cdot (\tau_{п} - \tau_0)}{3m_e \cdot g} + \frac{C \cdot T_{наодл.} \cdot (\tau_{п} - \tau_0)^2}{6m_p \cdot m_e \cdot g}. \quad (116)$$

### Висновки

1. Обґрунтовані фізико-механічні моделі для аналізу процесу підйому вантажу мостовими кранами двома способами: «з ваги» та «з підхватом»/«з основи».

2. Визначені закони руху елементів вказаних моделей у межах одно- та двомасової розрахункових схем, які дозволяють уникати коливань вантажу та суттєво зменшують значення коефіцієнтів динамічності.

3. У подальшому слід вдосконалити, на думку авторів роботи, дослідження процесів підйому вантажу різними способами при врахуванні дискретно-континуальних властивостей систем та механізмів, призначених для цього.

### **Конфлікти інтересів**

Автори, заявляють, що у них немає конфлікту інтересів щодо поточного дослідження, включаючи фінансовий. Особистий, авторський чи будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, наведені в цьому документі.

### **Фінансування**

Дослідження проводилось без фінансової підтримки.

### **Доступність даних**

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті статті.

### **Використання штучного інтелекту**

Автори підтверджують, що при створенні поточної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

### **References**

1. Novak S.M., Lohvynets A.S. Zashchyta ot vybratsyy u shuma v stroytelstve: spravochnik . - K.: Budivelnyk, 1990. 184 s.
2. Loveikin V.S., Romasevych Yu.O., Chovniuk Yu.V., Kadykalo I.O. Dynamika u optymizatsiia pidiomno-transportnykh mashyn. Monohrafiia. – K.: TsP «KOMPRINT», 2019. 292 s.
3. Chovniuk Yu.V., Sivak I.M. Dynamika vantazhopidiomnykh ta budivelnykh mashyn. Monohrafiia. – K.: NUBiPU, 2014. 774 s.
4. Chovniuk Yu.V., Prymachenko O.V., Cherednichenko P.P., Ostapushchenko O.P., Kravchenko I.M. Analiz pruzhnykh khvyleutvoren u kanatakh vantazhopidiomnykh kraniv. Suchasne budivnytstvo i arkhitektura. Zb. nauk. prats. Odesa: ODABA, 2023. Vyp. 4. S. 23-32.
5. Chovniuk Yu.V., Sivak I.M., Kravchuk V.T. Dyskretno-kontynualne modeliuvannya ta dynamichna optymizatsiia rezhymiv roboty vantazhopidiomnykh ta transportuiuchykh mashyn. Monohrafiia. – K.: TOV «TROPEA», 2020. 180 s.
6. Chovniuk Yu.V., Cherednichenko P.P., Shudra N.S., Liutikov A. Optymizatsiia protsesiv peremishchennia i rozghonu vantazhnoho vizka mostovoho krana u rezhymi hasinnia nekerovanykh kolyvan vantazhu//Tekhnika budivnytstva. 2024. Vyp. 40. S. 71-78.
7. Loveikin VS, Romasevych YO (2017), Dynamic optimization of a mine winder acceleration mode, Issue 4, Naukovyi Visnyk Natsion alnoho Hirnychoho Universytetu, rr. 55-61.
8. Hryhorov O, Svirgun V (1986), Improving the productivity of utili ty cranes through optimum motion control, Vol. 6, Soviet machine science, pp. 25-29.

9. Loveikin VS, Pochka KI (2017), Synthesis of camshaft driving mechanism in roller molding installation with combined motion mode according to acceleration of third order, Vol. 16, Iss. 3, Science & Technique, pp. 206-214.
10. Okun A, Los Y (2016), The controllability function method, Vol. 78, Iss. 3, U.P.B. Scientific Bulletin. Series D: Mechanical Engineering, pp. 3–8.
11. Loveikin V.S. Dynamika ta optymalne keruvannya rukhom mostovyykh kraniv. Monohrafiia / V.S. Loveikin, Yu.O. Romasevych, V.A. Holdun, V.V. Krushelnytskyi. – K.: TsP „KOMPRINT”, 2019. – 460 s.
12. Romasevych Yu. O. Dynamichna optymizatsiia rezhymiv rukhu mekhanizmiv vantazhopidionnykh mashyn yak mekhatronnykh systemy: dys. dokt. tekhn. nauk. 05.05.05. Odeskyi natsionalnyi politekhnichnyi universytet, 2015. 519 s.
13. Slepuzhnikov Ye. D. Vyznachennia dynamichnykh navantazhen pry peresuvanni vantazhnoho vizka mostovoho krana. Mashynobuduvannia. 2015. Vyp. 16. S. 34–37.
14. Loveikin V., Romasevych Yu., Goldun V. Experimental research of the dynamics of lifting and lowering a load on a vehicle. Motrol. Vol 19. No 3. 2017. P. 129-135.
15. Romasevych Yu.O. Syntez optymalnoho keruvannya rukhom vantazhopidionnymy kranamy / Yu.O. Romasevych // Vseukrainskyi zbirnyk naukovykh prats „Hirnychi, budivelni, dorozhni ta melioratyvni mashyny”. – 2014. – № 83. – S. 26-33.
16. Slepuzhnikov Ye. D. Vykorystannia kraniv mostovoho typu v suchasniy promyslovosti. / Ye. D. Slepuzhnikov, N. M. Fidrovskaya // Tendenze attuali della moderna ricerca scientifica. 2020, Band 3. – S. 96-97.
17. Remarchuk, M.P. Vyznachennia stanu kranovykh mekhanizmiv dlia pidionu vantazhu na stadiiakh yikh proektuvannia ta ekspluatatsii [Tekst] / M.P. Remarchuk, O.V. Kebko, O.O. Halytskyi // Materialy XXII-oi Mizhnarodnoi naukovopraktychnoi konferentsii «Suchasni aspekty modernizatsii nauky: stan, problemy, tendentsii rozvytku». Tezy dopovidei (07 lyupnia 2022 roku). – Liubliana (Sloveniia), 2022 – S. 477–491.

### Література

1. Новак С.М., Логвинец А.С. Защита от вибрации и шума в строительстве: справочник. – К.: Будівельник, 1990. 184 с.
2. Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О., Човнюк Ю.В., Кадикало І.О. Динаміка й оптимізація підйомно-транспортних машин. Монографія. – К.: ЦП «КОМПРИНТ», 2019. 292 с.
3. Човнюк Ю.В., Сівак І.М. Динаміка вантажопідйомних та будівельних машин. Монографія. – К.: НУБіПУ, 2014. 774 с.
4. Човнюк Ю.В., Приймаченко О.В., Чередніченко П.П., Остапущенко О.П., Кравченко І.М. Аналіз пружних хвилеутворень у канатах вантажопідйомних кранів. Сучасне будівництво і архітектура. Зб. наук. праць. Одеса: ОДАБА, 2023. Вип. 4. С. 23-32.
5. Човнюк Ю.В., Сівак І.М., Кравчук В.Т. Дискретно-континуальне моделювання та динамічна оптимізація режимів роботи вантажопідйомних та транспортуючих машин. Монографія. – К.: ТОВ «ТРОПЕА», 2020. 180 с.
6. Човнюк Ю.В., Чередніченко П.П., Шудра Н.С., Лютіков А. Оптимізація процесів переміщення і розгону вантажного візка мостового крана у режимі гасіння некерованих коливань вантажу//Техніка будівництва. 2024. Вип. 40. С. 71-78.
7. Loveikin VS, Romasevych YO (2017), Dynamic optimization of a mine winder acceleration mode, Issue 4, Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu, pp. 55-61.

8. Hryhorov O, Svirgun V (1986), Improving the productivity of utility cranes through optimum motion control, Vol. 6, *Soviet machine science*, pp. 25-29.

9. Loveykin VS, Pochka KI (2017), Synthesis of camshaft driving mechanism in roller molding installation with combined motion mode according to acceleration of third order, Vol. 16, Iss. 3, *Science & Technique*, pp. 206-214.

10. Okun A, Los Y (2016), The controllability function method, Vol. 78, Iss. 3, *U.P.B. Scientific Bulletin. Series D: Mechanical Engineering*, pp. 3–8.

11. Ловейкін В.С. Динаміка та оптимальне керування рухом мостових кранів. Монографія / В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич, В.А. Голдун, В.В. Крушельницький. – К.: ЦП „КОМПРИНТ”, 2019. – 460 с.

12. Ромасевич Ю. О. Динамічна оптимізація режимів руху механізмів вантажопідйомних машин як мехатронних системи: дис. докт. техн. наук. 05.05.05. Одеський національний політехнічний університет, 2015. 519 с.

13. Слепужников Є. Д. Визначення динамічних навантажень при пересуванні вантажного візка мостового крана. Машинобудування. 2015. Вип. 16. С. 34–37.

14. Loveikin V., Romasevych Yu., Goldun V. Experimental research of the dynamics of lifting and lowering a load on a vehicle. *Motrol*. Vol 19. No 3. 2017. P. 129-135.

15. Ромасевич Ю.О. Синтез оптимального керування рухом вантажопідйомними кранами / Ю.О. Ромасевич // Всеукраїнський збірник наукових праць „Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини”. – 2014. – № 83. – С. 26-33.

16. Слепужников Є. Д. Використання кранів мостового типу в сучасній промисловості. / Є. Д. Слепужников, Н. М. Фідровська // *Tendenze attuali della moderna ricerca scientifica*. 2020, Band 3. – С. 96-97.

17. Ремарчук, М.П. Визначення стану кранових механізмів для підйому вантажу на стадіях їх проектування та експлуатації [Текст] / М.П. Ремарчук, О.В. Кебко, О.О. Галицький // Матеріали ХХІІ-ої Міжнародної науковопрактичної конференції «Сучасні аспекти модернізації науки: стан, проблеми, тенденції розвитку». Тези доповідей (07 липня 2022 року). – Любляна (Словенія), 2022 – С. 477–491.

Відомості про статтю:	Article information:
Отримано 14.10.2025	Received 14.10.2025
Отримано у доопрацьованому вигляді 15.11.2025	Received in revised form 15.11.2025
Прийнято 25.11.2025	Accepted 25.11.2025
Опубліковано 25.12.2025	Published 25.12.2025

## Yu. V. Chovnyuk

PhD in Engineering, Associate Professor, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0608-0203>

Department of Physical education and sport

Kyiv National University of Construction and Architecture, Air Force Avenue, 31, Kyiv, Ukraine, 03037

## P. P. Cherednichenko\*

Associate Professor, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7161-661X>

Department taun building

Kyiv National University of Construction and Architecture, Air Force Avenue, 31, Kyiv, Ukraine, 03037

## O. P. Ostapushchenko

PhD in Engineering, Associate Professor, <https://orcid.org/0000-0001-8114-349X>

Department Department of Electrical Engineering and Electrical Drive

Kyiv National University of Construction and Architecture, Air Force Avenue, 31, Kyiv, Ukraine, 03037

### **I. M. Kravchenko**

Assistant, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7077-1546>

Department of Electrical Engineering and Electrical Drive

Kyiv National University of Construction and Architecture, Air Force Avenue Air Force Avenue, 31, Kyiv, Ukraine, 03037

### **A. O. Zadorozhny**

PhD in Engineering, Associate Professor, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1031-0585>

Department of Armored weapons and military equipment of the faculty of armaments and military equipment

National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”, Kyrpychova, 2, Kharkiv, Ukrain

\*corresponding autor, email: [petro\\_che@ukr.net](mailto:petro_che@ukr.net)

## **Analysis of oscillations (vibration) of structural elements of lifting mechanisms and machines**

How to Cite:

Chovnyuk Yu.V., Cherednichenko P.P., Ostapushchenko O.P., Kravchenko I.M., Zadorozhny A.O., (2025). Analysis of oscillations (vibration) of structural elements of lifting mechanisms and machines. *Modern technologies and methods of calculations in construction*, 24, 621-650. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14\(24\)-53](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14(24)-53)

*Cargo movement by hoisting mechanisms and machines used in urban construction, such as overhead cranes (OC) with non-rigid rope suspensions of the load causes pendulum vibrations of the load, in which there is an uncontrollable component. The oscillations significantly increase the cycle time of such OCs, reduce productivity and safety. There is a growing danger of collision of the load with objects present in the movement zone, and damage/destruction of the load, other objects and the OC itself is probable. In this regard, it is advisable to completely suppress uncontrolled components of pendulum oscillations of the load both during its movement and when the load reaches the target point. This is especially important when moving dangerous cargoes: containers with liquid materials (such as resin), flammable liquids, etc.*

*During the operation of OC and other types of construction/cargo lifting cranes due to the swinging of the load on the rope there are significant dynamic loads. In this paper we analyze the regularities of the process of load oscillations on the basis of a two-mass model, taking into account the influence of initial conditions on the possible values of dynamic loads, as well as the possibility of optimizing (minimizing) these loads.*

*The review of available reference and normative materials determining the normative values of dynamic coefficients is given. The results obtained in the paper can be further used for dynamic calculations, their improvement and refinement, for design and engineering development of finite element models of cantilever booms with loads on the rope and without rope during acceleration/deceleration in the process of boom rotation to substantiate the dynamic coefficients of specific designs of OC and urban construction cranes of other types.*

*Keywords: analysis, oscillations, vibrations, loads, rope systems, pendulum oscillations of loads, city-building and overhead cranes.*