

УДК 539.3

А. О. Сяський

д.т.н., професор, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2943-2873>

Кафедра прикладної математики та механіки

Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, Україна, 43018

М.В. Делявський

к.т.н., доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6952-0870>

Кафедра прикладної математики та механіки

Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, Україна, 43018

С. Б. Мікуліч*

аспірант, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-3287-217X>

Кафедра прикладної математики та механіки

Луцький національний технічний університет, вул. Львівська, 75, Луцьк, Україна, 43018

*автор-кореспондент, e-mail: stas_lutsk@ukr.net

Вплив розмірів включення на напружений стан пластинчастих елементів за динамічного навантаження

Цитувати як:

Сяський, А. О., Делявський, М. В., Мікуліч С. Б. (2025). Вплив геометрії включення на напружений стан пластинчастих елементів за динамічного навантаження. *Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві*, 24, 516-524. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14\(24\)-44](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14(24)-44)

© 2025, Сяський А. О., Делявський М. В., Мікуліч С. Б.

У статті наведено результати дослідження щодо оцінки впливу жорстких включень на напружений стан пластинчастих елементів конструкції за дії одновісного динамічного навантаження. Для розв'язання задачі використано метод граничних інтегральних рівнянь та апарат теорії функцій комплексної змінної. Такий підхід дозволив звести розв'язання задачі до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Виділення нерегулярних особливостей підінтегральних функцій та використання формул Племеля-Сохоцького при граничному переході дозволило записати інтегральні рівняння у формі, що зручні для числового розв'язання. Використання методу конформних відображень дозволило застосовувати запропонований підхід для дослідження напруженого стану пластинчастих елементів з включеннями практично довільної гладкої форми. Для числової реалізації використовувалися методи механічних квадратур та колокації. Числовий аналіз напруженого стану здійснено на основі дослідження розподілу динамічних напружень у нескінченних пластинках з жорсткими включеннями прямокутної форми за дії осьового імпульсного навантаження. Порівняння числових результатів дозволило здійснити аналіз концентрації напружень для включень різної форми. Також проведено аналіз розподілу динамічних напружень на границі між включенням та матрицею на різних етапах прикладання навантаження. На основі числових розрахунків встановлено, що при збільшенні довжини включення відбувається зміна розподілу напружень. Також встановлено, що при високочастотних коливаннях значення напружень, як кільцевих, так і

нормальних, є практично однаковими та не залежать від розмірів включення. На основі відповідних результатів визначені точки на границі включення та пластинчастого елемента з максимальною концентрацією напружень. Такий підхід дозволяє забезпечити міцність та надійність відповідних елементів з'єднань.

Ключові слова: напружений стан, динамічне навантаження, включення, метод інтегральних рівнянь, одновісний розтяг.

Вступ

Аналіз літературних джерел та постановка проблеми. Отвори, включення чи підсилення спричиняють концентрацію напружень у всіх інженерних конструкціях. Тому оцінка величини концентрації напружень важлива для визначення надійності та термінів експлуатації відповідних елементів конструкцій. Особливо актуальною є така задача за дії динамічного чи вібраційного навантаження.

Концентрація напружень спостерігається також і у матеріалах зі структурними неоднорідностями, якими можуть бути порожнини, отвори, домішки та ін. Крім того, істотне зростання напружень у елементах конструкцій відбувається і за наявності геометричної неоднорідності. Динамічні навантаження створюють у таких зонах градієнт напружень, що є причиною прогресивного накопичення пошкоджень.

Критичним аспектом вивчення механічної поведінки конструкційних елементів є дослідження розподілу напружень в околі цих концентраторів. Важливо зазначити, що розподіл напружено-деформованого стану в значній мірі визначається формою, механічними, фізичними та геометричними характеристиками включення.

Грунтовний аналіз напружено-деформованого стану геометрично-однорідних тіл є основою для розробки методів зниження інтенсивності напружень шляхом цілеспрямованого підбору механічних і фізичних властивостей компонентів включення, їх геометрії та розташування.

Проблема концентрації напружень поблизу включень залишається високо-актуальною в сучасній механіці [1-7].

Історично, для задач про кругові включення в нескінченних пластинах за статичного або квазістатичного навантаження існують класичні аналітичні розв'язки, отримані у формі рядів у роботах О. М. Гузя, В. Д. Кубенка, Г. М. Савіна. Однак, для включень зі складною геометрією: еліптичної, прямокутної та ін. неканонічної форми, використовуються наближені методи, такі як метод багатократних відображень, або напівчислових підходів, зокрема, метод граничних елементів (МГЕ) [8-10]. Перевагою використання МГЕ можна вважати можливість записати сингулярні та регулярні інтегральні рівняння для різних типів граничних умов.

У сучасних дослідженнях активно застосовуються числові та аналітично-числові методи. Зокрема, це метод скінченних елементів (МСЕ), що використовується для аналізу напруженого стану пластин з

функціонально-градієнтованими кільцевими включеннями [1] та підкріпленими видовженими отворами [2]. Проте, недоліком використання МСЕ є його числова точність лише для випадку статичних навантажень.

Також з-поміж розвитку методів дослідження напруженого стану елементів з включеннями слід виокремити математичні моделі на основі сингулярних інтегральних рівнянь для пластин з лінійними [3] та криволінійними включеннями і тріщинами [4]. Такі підходи також використовуються для побудови моделей, що аналізують 2D-3D перехід [5] та модифіковані розв'язки Кірша для жорстких/м'яких включень [6].

У роботах [7, 11, 12] особливу увагу приділено модифікованому методу граничних елементів, який є ефективним для дослідження напружено-деформованого стану пластин з багатошаровими включеннями довільної форми, забезпечуючи точне визначення всіх компонент напружень на межі розділу включення-матриця.

Мета і завдання дослідження. Метою даної роботи було дослідити вплив жорстких включень на інтенсивність напружень у пластинчастих елементах конструкцій за дії одновісного динамічного навантаження. Для досягнення цієї мети у роботі були поставлені та виконані наступні завдання:

- використовуючи метод інтегральних рівнянь розроблено методику дослідження динамічного напружено-деформованого стану тіл з включеннями;
- розвинуто числову реалізацію запропонованої методики для випадку включень еліптичної та прямокутної форми;
- проведено числовий аналіз для випадку нерезких нескінченних пластинок з жорсткими нерухомими включеннями еліптичної та прямокутної форми за дії квазістатичного одновісного навантаження.

Матеріали та методи

У процесі моделювання розглядався пластинчастий елемент, у який жорстко вкріплене недеформівне включення (рис. 1). Приймалося, що включення додатково зафіксовано таким способом, щоб на границі пластинчастого елемента та включення були відсутні переміщення (рис. 1). Через L позначали границю контуру включення, через D – область, яку займає пластинка. Пластинчастий елемент відносили до декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$, яку розміщували у центрі ваги включення (рис. 1).

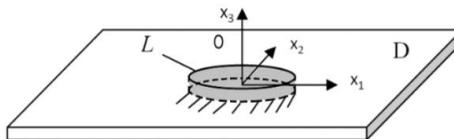


Рис. 1. Модель задачі

Граничні умови задачі записуються у вигляді [12]:

$$u_i|_L = 0, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

де u_1 та u_2 переміщення точок границі пластинки в напрямку Ox_1 та Ox_2 відповідно.

Розв'язання задачі здійснювалося за використання методу граничних елементів [8], відповідно до якого представлення для переміщень подавалося у вигляді [12]:

$$u_i(x_1, x_2) = - \int_L u_j(x_1^0; x_2^0) \cdot P_{ji}^*(x_1; x_2; x_1^0; x_2^0) ds. \quad (2)$$

Тут P_{kj}^* — фундаментальні функції, що відповідають напруженню у k -му напрямку від дії одиничних сил у j -му напрямку [12]. Для розглядуваного випадку приймалося: $k, j = 1, 2$.

Відповідно до методики [12] розв'язання задачі зведено до системи інтегральних рівнянь, які отримувалися при задоволенні граничних умов (1) з використанням інтегральних представлень (2):

$$C \cdot U + \int_L F \cdot U ds = P, \quad (3)$$

тут $C = \{c_{jk}\}$ - матриця коефіцієнтів, які визначаються при граничному переході за використання формул Племеля-Сохоцького [12], $U = \{u_j\}$ - матриця невідомих переміщень, $P = \{P_j\}$ - матриця впливу заданого навантаження шляхом (відомі величини), $F = \{f_{jk}\}$ - матриця відомих підінтегральних функцій ($j, k = 1, 2$):

$$f_{jk} = P_{jk}^*|_{(x_1, x_2) \in L, (x_1^0, x_2^0) \in L}$$

Для розв'язання системи інтегральних рівнянь використовувалися числові методи: метод механічних квадратур, метод колокації, метод конформних відображень. На основі параметричних представлень границі контуру включення L [2]:

$$x_1 = \varphi(\theta); \quad x_2 = \psi(\theta), \quad t = g(\theta) = \varphi(\theta) + i\psi(\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi,$$

для числових розрахунків вибиралися наступні задання [8]:

- для прямокутної границі з відношенням сторін 5:

$$g(\theta) = a(e^{-i\theta} + 0.64e^{i\theta} - 0.098e^{3i\theta} - 0.0038e^{5i\theta} + \dots)$$
- для прямокутної границі з відношенням сторін 3,2:

$$g(\theta) = a(e^{-i\theta} + 0.5e^{i\theta} - 0.125e^{3i\theta} - 0.00375e^{5i\theta} + \dots)$$

Враховуючи особливості підінтегральні функції f_{jk} при малих значеннях аргументу для числових розрахунків використано уточнені квадратурні формули [10]:

$$\int_{\Omega} f(t, z_v) \ln r dt = h \sum_{n=1}^K f_{vn} \left(\ln \frac{r_n}{\xi_n} - \sum_{m=1}^M \frac{\xi_n^m}{m} \cos(\theta - \theta_n) \right) g'_n,$$

$$\int_{\Omega} qf(t, z_v) dt = h \sum_{n=1}^K q_n f_{vn} g'_n$$

де

$$g'_n = g'(\theta_n), \quad \theta_n = hn, \quad z_v = z(\tilde{\theta}_v), \quad \tilde{\theta}_v = \theta_v + \frac{h}{2}, \quad v = \frac{1}{1, K}, \quad h = \frac{2\pi}{K}, \quad M = \frac{K}{2}.$$

Після числового визначення невідомих для розрахунку напружень використовувалися наступні формули:

$$\sigma_{ij} = \int_L N_{ik} u_k ds, \quad j=1 \dots 2,$$

тут функції N_{ij} визначаються числово у відповідних точках.

Результати та обговорення

Дослідження напруженого стану пластинчастих елементів з включеннями проводилися для випадку дії «падаючої» хвилі стиску, що за динамічних навантажень моделює випадок одновісного розтягу. Потенціали падаючої хвилі задавалися у вигляді [12]:

$$\Phi = \Phi_0 e^{i\omega(\tau - \omega_1 x_1)}, \quad \Psi = 0, \quad (8)$$

де ω - частота, $\omega_1 = \frac{\omega}{c_1}$, $\Phi_0 = \frac{\rho}{\omega^2}$, c_1 - швидкість хвиль розширення [8].

Приймалося, що хвиля поширюється у напрямку осі Ox_1 . 2D модель навантаження представлена на рис. 2.

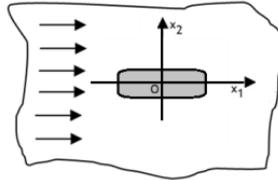


Рис. 2. 2D модель навантаження.

На рис. 3 наведено результати числових розрахунків нормальних напружень вздовж границі включення, що розраховані для декількох значень частотної характеристики ω_2 : 0,25 (крива 1), 0,5 (крива 2), 1 (крива 3), 1,5 (рис. 3, а) для двох випадків включень: з відношенням сторін 5 (зверху) та 3,2 (знизу). При розрахунках вибиралися наступні значення механічних характеристики матеріалів: $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, $\rho = 7800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

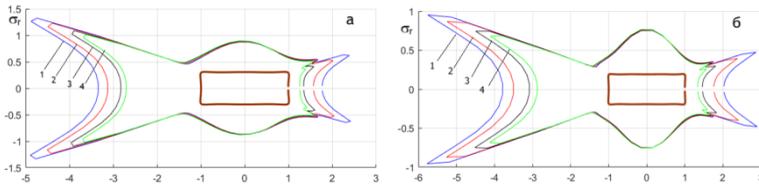


Рис. 3. Напружений стан вздовж границі включень.

Також для аналізу напруженого стану було досліджено зміну розподілу напружень на границі включення та пластини для розглянутих випадків зі зміною частоти у декількох точках границі: $\theta = 0^\circ$ (крива 1), $\theta = 45^\circ$ (крива 2), $\theta = 90^\circ$ (крива 3), $\theta = 135^\circ$ (крива 4) та $\theta = 180^\circ$ (крива 5). На рис. 4 представлено розподіли кільцевих σ_θ (рис. 4, а) та нормальних σ_n (рис. 4, б) та динамічних напружень для відповідних точок границі. Тут випадку прямокутного включення з відношення сторін 5 відповідають суцільні криві, а для випадку відношення 3,2 – пунктирні.

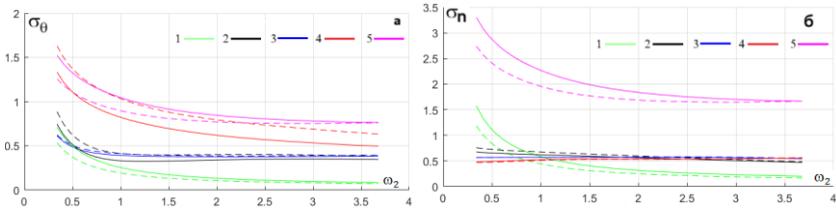


Рис. 4. Напружений стан на гранці пластинка-включення

Висновки

Аналіз напруженого стану вздовж границі включення (рис. 3) показує зростання напружень вздовж великої сторони прямокутного включення при збільшенні відношення сторін, тобто збільшення довжини включення призводить до зміни розподілу напружень.

Результати, наведені на рис. 4, а показують, що вплив зміни довжини включення на розподіл кільцевих напружень є зовсім не значний: у 1,1 рази при збільшенні розмірів у 1,56 рази. Проте, рис. 4, б демонструє зростання нормальних напружень пропорційно до збільшення розмірів: у 1,5 рази при низькочастотних коливаннях. При високочастотних коливаннях значення напружень, як кільцевих, так і нормальних, є практично однаковими та не залежать від розмірів включення. Числові розрахунки підтверджують істотну концентрацію напружень у кутових точках включення, що є властивим також і для інших видів концентраторів.

Конфлікти інтересів

Автори заявляють, що у них немає конфлікту інтересів щодо поточного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський чи будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, наведені в цьому документі.

Фінансування

Дослідження проводилося без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті статті.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні поточної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

References

1. Hart, E. L., Terokhin, B. I. (2021) *Computer Simulation of the Stress-Strain State of the Plate with Circular Hole and Functionally Graded Inclusion*. Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA), 29, 1, PP. 42–53, <https://doi.org/10.15421/142103>
2. Hart, E.L., Hudramovich, V.S. (2022) *Computer Simulation of the Stress-Strain State of Plates with Reinforced Elongate Rectangular Holes of Various Orientations*. Strength of Materials and Theory of Structures, 108, PP. 77-86. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.77-86>
3. Nazarenko, O., Usov, A., Volkova, M., Kozin, O. (2023) *Mathematical Modeling of the Stress-Strain State of a Plate with Rigid Linear Inclusion and Mixed Boundary Conditions*. Bulletin of Mykhailo Ostrohradskyi KrNU, 1(138), PP. 22-28. <https://doi.org/10.32782/1995-0519.2023.1.2>
4. Zelenyak, V., Kolyasa, L., Klapchuk, M., Oryshchyn, O., Vozna, S. (2021) *Determining Patterns in Thermoelastic Interaction between a Crack and a Curvilinear Inclusion Located in a Circular Plate*, Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 6/7 (114), PP. 52-58. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.24399>
5. Oshri, O., Biswas, S., Balazs, A.C. (2019) *Modeling the behavior of inclusions in circular plates undergoing shape changes from two to three dimensions*. Phys. Rev. E, 100, 043001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.043001>
6. Lavrenyuk, V. I., Lavrenyuk, N. V. (2007) *The Stress–Strain State of a Plate with a Multilayer Inclusion*. International Applied Mechanics, 43, 3, PP.329-334.
7. Rana, A.K., Paulb, S.K., Deya, P.P. (2019) *Stress field in an isotropic elastic solid containing a circular hard or soft inclusion under uniaxial tensile stress*. Materials Today: Proceedings, 11, PP. 657–666. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.03.024>
8. Katsikadelis, J.T. (2016). *The Boundary Element Method for Engineers and Scientists: Theory and Applications* (Second Edition), Academic Press, 446 p.
9. Gwinner, J., Stephan, E.P. (2018) *Advanced Boundary Element Methods: Treatment of Boundary Value, Transmission and Contact Problems*, Springer, 652 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-92001-6>
10. Banjai, L., Sayas, F.-J. (2022) *Integral Equation Methods for Evolutionary PDE: A Convolution Quadrature Approach*, Springer, 268 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-13220-9>
11. Shvabyuk V., Sulym H., Mikulich O. (2015) *Stress State of Plate with Incisions under the Action of Oscillating Concentrated Forces*, Acta Mechanica et Automatica, 9(3), 140-144. <https://doi.org/10.1515/ama-2015-0023>
12. Shvabyuk V.I., Furs T.V., Komenda N.V., Mikulich S.B. (2023) *Integral equations of the problem of wave diffraction in elastic media with inclusions under the action of unsteady loads*. Naukovi notatky, 75, Lutsk, pp. 95-99. <https://doi.org/10.36910/775.24153966.2023>

Література

1. Hart, E. L., Terokhin, B. I. (2021) *Computer Simulation of the Stress-Strain State of the Plate with Circular Hole and Functionally Graded Inclusion*. Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA), 29, 1, PP. 42–53, <https://doi.org/10.15421/142103>
2. Hart, E.L., Hudramovich, V.S. (2022) *Computer Simulation of the Stress-Strain State of Plates with Reinforced Elongate Rectangular Holes of Various Orientations*. Strength of Materials and Theory of Structures, 108, PP. 77-86. <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.77-86>
3. Nazarenko, O., Usov, A., Volkova, M., Kozin, O. (2023) *Mathematical Modeling of the Stress-Strain State of a Plate with Rigid Linear Inclusion and Mixed Boundary Conditions*. Вісник КрНУ імені Михайла Остроградського, 1(138), PP. 22-28. <https://doi.org/10.32782/1995-0519.2023.1.2>
4. Zelenyak, V., Kolyasa, L., Klapchuk, M., Oryshchyn, O., Vozna, S. (2021) *Determining Patterns in Thermoelastic Interaction between a Crack and a Curvilinear Inclusion Located in a Circular Plate*, Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 6/7 (114), PP. 52-58. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.24399>
5. Oshri, O., Biswas, S., Balazs, A.C. (2019) *Modeling the behavior of inclusions in circular plates undergoing shape changes from two to three dimensions*. Phys. Rev. E, 100, 043001. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.043001>
6. Lavrenyuk, V. I., Lavrenyuk, N. V. (2007) *The Stress–Strain State of a Plate with a Multilayer Inclusion*. International Applied Mechanics, 43, 3, PP.329-334.
7. Rana, A.K., Paulb, S.K., Deya, P.P. (2019) *Stress field in an isotropic elastic solid containing a circular hard or soft inclusion under uniaxial tensile stress*. Materials Today: Proceedings, 11, PP. 657 – 666. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2019.03.024>
8. Katsikadelis, J.T. (2016). *The Boundary Element Method for Engineers and Scientists: Theory and Applications* (Second Edition), Academic Press, 446 p.
9. Gwinner, J., Stephan, E.P. (2018) *Advanced Boundary Element Methods: Treatment of Boundary Value, Transmission and Contact Problems*, Springer, 652 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-92001-6>
10. Banjai, L., Sayas, F.-J. (2022) *Integral Equation Methods for Evolutionary PDE: A Convolution Quadrature Approach*, Springer, 268 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-13220-9>
11. Shvabyuk V., Sulym H., Mikulich O. (2015) *Stress State of Plate with Incisions under the Action of Oscillating Concentrated Forces*, Acta Mechanica et Automatica, 9(3), 140-144. <https://doi.org/10.1515/ama-2015-0023>
12. Шваб'юк В.І., Фурс Т.В., Коменда Н.В., Мікуліч С.Б. (2023) *Інтегральні рівняння задачі дифракції хвиль у пружних середовищах з включеннями за дії нестационарних навантажень*. Наукові нотатки, 75, Луцьк, С. 95-99. <https://doi.org/10.36910/775.24153966.2023>

| Відомості про статтю: | Article information: |
|---|--------------------------------------|
| Отримано 10.11.2025 | Received 10.11.2025 |
| Отримано у доопрацьованому вигляді 12.11.2025 | Received in revised form 12.11..2025 |
| Прийнято 25.11.2025 | Accepted 25.11.2025 |
| Опубліковано 25.12.2025 | Published 25.12.2025 |

A. O. Saysky

D.Sc. in Engineering, Professor, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2943-2873>
Applied Mathematics and Mechanics Department
Lutsk National Technical University, Lvivska St., 75, Lutsk, Ukraine, 43018

M.V. Delyavsky

D.Sc. in Engineering, Professor: <https://orcid.org/0000-0001-6952-0870>
Applied Mathematics and Mechanics Department
Lutsk National Technical University, Lvivska St., 75, Lutsk, Ukraine, 43018

S. B. Mikulich*

PhD-student, ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-3287-217X>
Applied Mathematics and Mechanics Department
Lutsk National Technical University, Lvivska St., 75, Lutsk, Ukraine, 43018

* corresponding author, e-mail: stas_lutsk@ukr.net

Influence of inclusion sizes on the stress state of plate elements under dynamic loading

How to Cite:

Syasky, A. O., Delyavsky, M. V., Mikulich S. B. (2025). The influence of the geometry of the inclusion on the stress state of plate elements under dynamic loading. *Modern technologies and calculation methods in construction*, 24, 516-524. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14\(24\)-44](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14(24)-44)

Abstract. The article presents the results of a study on the assessment of the influence of rigid inclusions on the stress state of plate elements of structures under the action of uniaxial dynamic loading. To solve the problem, the method of boundary integral equations and the apparatus of the theory of functions of a complex variable were used. This approach allowed reducing the solution of the problem to a system of singular integral equations. The selection of irregular features of the integrand functions and the use of the Plemel-Sohotsky formulas at the limit transition allowed us to write the integral equations in a form convenient for numerical solution.

The use of the conformal mapping method allowed us to apply the proposed approach to study the stress state of plate elements with inclusions of practically arbitrary smooth shape. For numerical implementation, the methods of mechanical quadrature and collocation were used. The numerical analysis of the stress state was carried out on the basis of the study of the distribution of dynamic stresses in infinite plates with rigid inclusions of rectangular forms under the action of axial impulse loading. Comparison of numerical results allowed us to analyze the concentration of stresses for inclusions of various shapes. An analysis of the distribution of dynamic stresses at the boundary between the inclusion and the matrix at different stages of load application was also carried out. Based on numerical calculations, it was established that with increasing inclusion length, the stress distribution changes. It was also established that during high-frequency oscillations, the values of both hoop and normal stresses are practically the same and do not depend on the inclusion size. Based on the corresponding results, points on the boundary of the inclusion and the plate element with the maximum concentration of stresses were determined. This approach allows us to ensure the strength and reliability of the corresponding connection elements.

Keywords: stress state, dynamic loading, inclusion, integral equation method, uniaxial tension