

УДК 69.04

К. В. Соколенко*

PhD, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3334-7855>

Кафедра будівництва, урбаністики та просторового планування

Східноукраїнський національний університет імені Володимира Даля, вул. Іоанна Павла II, 17,
м. Київ, Україна, 01042

*автор-кореспондент, e-mail: sokolenko@smu.edu.ua

Оптимізація поперечного перерізу сталеві зварної двотаврової балки за критерієм мінімальної потенціальної енергії деформації

Цитувати як:

Соколенко, К. В. (2025). Оптимізація поперечного перерізу сталеві зварної двотаврової балки за критерієм мінімальної потенціальної енергії деформації. *Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві*, 24, 477-492. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14\(24\)-41](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14(24)-41)

© 2025, Соколенко К. В.

У статті розглядається задача зниження матеріаломісткості сталевих зварних двотаврових балок шляхом оптимізації їх поперечного перерізу на основі критерію мінімуму потенційної енергії пружної деформації ($dU/dh = 0$), що накопичується в балці при згині. Аналітичне диференціювання цього критерію дозволило вивести безрозмірний конструктивний параметр k_A , що характеризує оптимальне співвідношення між площею стінки і площею поясу двотавра.

Оскільки прокатні двотаврові профілі розроблялися з метою забезпечення міцності та стійкості при дотриманні критеріїв економічності та технологічної ефективності, доцільно використати ці принципи для пошуку оптимального перерізу двотаврової балки. З цією метою у роботі введено коефіцієнт форми k_F , який характеризує геометричні пропорції перерізу – відношення висоти двотавра до ширини його поясу. На основі аналізу сортаментів прокатних профілів встановлено майже лінійну тенденцію зростання коефіцієнту зі збільшенням висоти балки.

Взаємозв'язок між коефіцієнтами k_A та k_F дозволяє застосовуючи їх для попереднього наближеного підбору двотаврового перерізу, що буде наближений до оптимального.

Для практичної реалізації розроблено чисельний ітераційний алгоритм оптимізації, який реалізує багатofакторний пошук раціональних розмірів поперечного перерізу (висоти, товщини стінки, товщини і ширини поясів) за умов мінімальної маси балки та виконання вимог міцності.

Аналіз результатів, отриманих алгоритмом, показав, що збільшення навантаження призводить до зменшення k_A та зростання маси балки, що дозволило отримати апроксимуючу залежність $k_A(q)$ у вигляді полінома n 'ятого ступеня і дозволяє використовувати отриману залежність в практичних розрахунках.

Алгоритм може бути використаний для створення програмних засобів автоматизованого проектування, побудови таблиць оптимальних параметрів і

розробки рекомендацій для стандартизації зварних профілів. Відзначається необхідність подальшого вдосконалення алгоритму для врахування стандартизованих розмірів листового прокату і забезпечення умов місцевої стійкості.

Ключові слова: оптимізація, двотаврова балка, потенційна енергія деформації, мінімальна маса, чисельне моделювання.

Вступ

Аналіз літературних джерел та постановка проблеми.

Визначення оптимальних розмірів двотаврових балок впливає на економічність конструкції і залежить від безлічі факторів, задоволення яких повинно забезпечити необхідну міцність, стійкість і жорсткість.

Очевидним є те, що більш високі навантаження вимагають більш розвинених поперечних перерізів балок, збільшуючи масу конструкції. У той же час, форма і габарити споруди можуть накладати обмеження на розміри перерізів.

На розміри поперечних перерізів балок можуть впливати, крім поперечного згину в основній силовій площині, інші силові фактори, що може вимагати їх врахування, і відповідно може вплинути на габарити поперечного перерізу конструкції.

Певний вплив можуть чинити і залишкові напруження, оскільки технологічні процеси виробництва двотаврових балок неминуче пов'язані зі зміною їх напруженого стану до прикладання зовнішніх навантажень [1].

На характеристики міцності балки впливає і матеріал балки – різні класи сталей мають різні характеристики, які впливають на оптимальні розміри балок [2].

Характеристики зварних з'єднань, а також технологічні особливості виконання зварних з'єднань потребують врахування, особливо при їх виконанні в монтажних умовах, оскільки вони можуть виявитися найслабшим елементом конструкції.

На розмір поперечних перерізів балок впливають і умови їх експлуатації. Так, для підвищення корозійної стійкості може знадобитися збільшення розмірів поперечного перерізу сталевих елементів.

Таким чином, перелік факторів, що визначають розміри поперечного перерізу двотаврової балки, є істотним. Чинні норми проектування сталевих конструкцій встановлюють мінімальні вимоги до розмірів елементів сталевих зварних балок виходячи із забезпечення їх міцності, стійкості та деформативності.

Для оптимізації зварних балок найбільш ефективним буде використання сучасних методів чисельного моделювання конструкцій, коли за допомогою оптимізаційних алгоритмів або ітераційних методів підбираються оптимальні розміри поперечних перерізів балки, які забезпечують необхідні характеристики при мінімальній вазі.

Питання, пов'язані з вивченням оптимального проектування сталевих конструкцій, і зокрема сталевих балок, розглядалися в роботах багатьох дослідників – Гордєєв В.М. [1], Пермяков В.О., Перельмутер А.В., Юрченко В.В. [3], Білик С.І. [4], Білик А.С. [5], Нілов О.О., Пермяков В.О., Шимановський О.В., [6], Голоднов О.І. [7], Перетятко Ю.Г., Ляшенко І.Ю [8], Янін О.Є., Новікова С.М. [9].

Проте, незважаючи на проведені дослідження, пошук нових рішень у визначенні оптимальних розмірів сталевих балок з метою зниження ваги сталевих конструкцій залишається актуальним напрямком дослідження.

Мета і завдання дослідження. Мета статті полягає в розробці та верифікації методу оптимізації поперечного перерізу сталеві зварної двотаврової балки, заснованого на критерії мінімуму потенційної енергії пружної деформації ($dU/dh = 0$). Дослідження спрямовано на визначення раціональних геометричних параметрів (висоти, товщини стінки і поясів), що забезпечують максимальне використання несучої здатності при мінімальній масі конструкції.

Матеріали та методи

Дослідження виконано на основі аналітичного, чисельного та порівняльного методів.

У дослідженні використано аналітичні залежності для диференціювання за критерієм мінімуму потенційної енергії пружної деформації балки при згині ($dU/dh = 0$).

З метою використання принципів які були закладені при розробці прокатних профілів було проаналізовано геометричні розміри наведені в сортаментах прокатних двотаврових балок.

Оптимізацію виконано із застосуванням чисельного ітераційного алгоритму реалізованого мовою програмування *python*: для заданих значень погонного навантаження, гнучкості стінки та коефіцієнту k_A формувались комбінації параметрів перерізу (h, b_f, t_f, t_w), для яких обчислювались геометричні характеристики (момент інерції, момент опору) та маса балки. Цільовою функцією було мінімум маси при максимально можливому використанні несучої здатності.

Для апроксимації отриманих даних застосовано метод найменших квадратів із використанням функцій *polyfit* і *polyval* бібліотеки *NumPy* для мови програмування *python*.

Для верифікації алгоритму результат його роботи порівнювався з різними прикладами розрахунку головних балок наведених в навчальній та довідковій літературі.

Результати та обговорення

Поняття оптимальної висоти складеного двотаврового перерізу балки, що залежить від співвідношення параметрів стінки h_w/t_w , було

запропоновано В.М. Вахуркіним у вигляді мінімуму функції площі розрахункового перерізу у вигляді похідної $dA/dh = 0$ при фіксованій міцності сталі [10].

Пропонується встановити оптимальні розміри балки постійного перетину, виходячи з критерію мінімуму потенційної енергії пружної деформації $dU/dh = 0$, що накопичується в балці при згині, в результаті дії зовнішніх сил:

$$U = U_M + U_Q = \frac{1}{2EI} \int_0^l M^2 dx + \frac{\eta}{2GF} \int_0^l Q^2 dx \quad (1)$$

У даному випадку, складову впливу потенційної енергії зсуву U_Q не враховуємо, оскільки додатковий прогин, викликаний поперечними силами, як відомо, залежить від співвідношення (l/h) , і має істотне значення для порівняно коротких балок.

Підставивши відомі вирази для визначення згинального моменту в довільному перерізі шарнірно-опертої балки двотаврового перерізу, завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням в рівняння (1), взявши першу похідну потенційної енергії по висоті стінки балки ($h \approx h_w$) і прирівнявши її до нуля, можна визначити оптимальну висоту перерізу балки:

$$\frac{dU}{dh_w} = - \frac{q^2 L^5 \left(3t_w h_w^2 + 12b_f t_f h_w + 12b_f t_f^2 \right)}{20E \left(t_w h_w^3 + 6b_f t_f h_w^2 + 12b_f t_f^2 h_w + 8b_f t_f^3 \right)^2} = 0 \quad (2)$$

Звідки визначаємо єдиний дійсний корінь приведенного рівняння:

$$h_w = - \frac{2t_f \left(b_f + \sqrt{b_f^2 - b_f t_w} \right)}{t_w} \quad (3)$$

Спростимо отриманий вираз (приймаючи $x = t_w / b_f$):

$$h_w = - \frac{2t_f \left(b_f + \sqrt{b_f^2 - b_f t_w} \right)}{t_w} = - \frac{2t_f}{t_w} b_f \left(1 + \sqrt{1-x} \right); \quad (4)$$

Розкладемо підкореневий вираз в степеневий ряд при $|x| < 1$:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + O(x^3); \quad x \rightarrow 0 \quad (5)$$

Повертаємо значення для x та підставляємо (5) у вираз в дужках:

$$b_f \left(1 + \sqrt{1-x}\right) = \dots = 2b_f - \frac{t_w}{2} - \frac{t_w^2}{8b_f} + O\left(\frac{t_w^3}{b_f^2}\right) \quad (6)$$

Підставляємо в початковий вираз (4):

$$h_w = -\frac{4b_f t_f}{t_w} + t_f + \frac{t_f t_w}{4b_f} + O\left(\frac{t_f t_w^2}{b_f^2}\right) \quad (7)$$

Оскільки $b_f \gg t_f$, можемо залишити лише перший, головний член наближення, а інші члени вищих порядків малості (першого і вище), та константи (члени нульового порядку) з незначною похибкою (при $t_w/b_f = 0.05$, $\Delta \approx 1.28\%$), відкинути:

$$h_w = -\frac{4b_f t_f}{t_w} \quad (8)$$

З урахуванням того, що $A_w = h_w t_w$, $A_f = b_f t_f$, взявши по модулю отриманий вираз, можемо ввести безрозмірний конструктивний параметр двотавра, який характеризує оптимальне співвідношення між площею стінки та площею полочки двотавра:

$$k_A = \frac{h_w t_w}{b_f t_f} = \frac{A_w}{A_f} \quad (9)$$

Розробляючи конструктивне рішення двотаврової зварної балки, необхідно підібрати загальні раціональні розміри балки – її висоту та ширину, а також товщини поясів та стінки балки.

За цих умов, при проектуванні поперечних перерізів зварних балок доцільно використати принципи які були закладені при розробці сортаментів прокатних профілів, оскільки вони розроблялися з метою забезпечення міцності та стійкості при дотриманні критеріїв економічної та технологічної ефективності [11].

Для аналізу сортаментів прокатних двотаврових профілів введемо додатковий коефіцієнт, що враховує форму поперечного перерізу двотаврової балки як відношення висоти профілю до його ширини:

$$k_F = \frac{h}{b} \quad (10)$$

Взаємозв'язок між коефіцієнтами k_A та k_F можна визначити якщо прийняти $h \approx h_w$, $b = b_f$:

$$k_A = k_F \frac{t_w}{t_f} \quad (11)$$

Таким чином застосовуючи коефіцієнти k_A , k_F можливо виконати попередній наближений підбір двотаврового перерізу, що буде наближений до оптимального.

На рисунку 1 наведено результати розрахунків коефіцієнта k_F та його зміна із зростанням висоти профілю для двотаврових прокатних профілів за ДСТУ 8768:2018, типу IPN, IPE за DIN 1025 Euronorm 19-57 та за ГОСТ 26020-83.

Для апроксимації отриманих даних використовувалася лінійна регресія методом найменших квадратів, отримані залежності $k_F(h)$ зображені на відповідних графіках рисунку 1.

З аналізу наведених даних можливо зробити висновок, що коефіцієнт форми k_F зростає лінійно з висотою балки (для великих значень h).

Проаналізувавши отримані залежності можна визначити, що найменша ширина поясу балки відповідає залежності визначеній за даними сортаменту ДСТУ 8768:2018, найбільша – ГОСТ 26020-83. Для подальших обчислень обираємо залежність – $k_F(h) = 0.00141h + 1.739$, як основну.

Одним з найбільш раціональних оптимізаційних алгоритмів є метод послідовної апроксимації, який передбачає поетапне наближення на кожному кроці до оптимального рішення шляхом уточнення геометрії і параметрів балки. Прикладом може служити метод найменших квадратів, який використовує чисельні методи для визначення оптимальних параметрів, що мінімізують суму квадратів відхилень між дослідними значеннями і апроксимуючою лінією.

У рамках дослідження було розроблено чисельний алгоритм, що дозволяє знайти для заданого діапазону рівномірно розподіленого навантаження раціональні геометричні параметри перерізу зварної двотаврової балки, які задовольняють умову міцності та мінімізують масу балки.

Шляхом ітераційного розрахунку визначимо оптимальні параметри двотаврового перерізу перебираючи значення коефіцієнта k_A та гнучкості λ_w при різному навантаженні q .

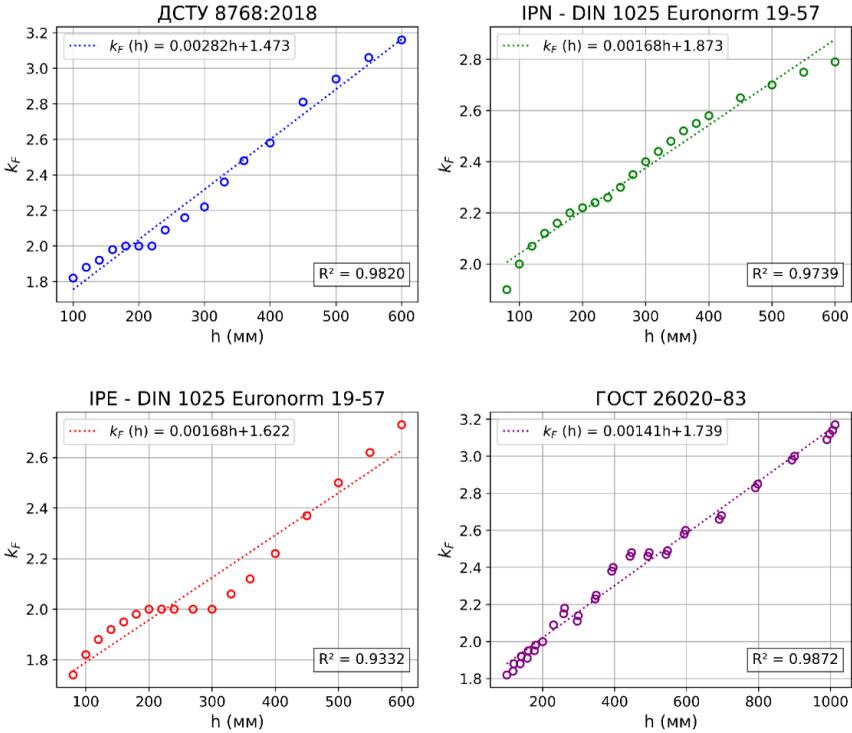


Рис. 1. Апроксимація отриманих даних лінійною залежністю

Для роботи ітераційного алгоритму значення товщини стінки будемо визначати за відомою емпіричною залежністю:

$$t_w = 3 + 7 \cdot h, \quad (12)$$

де h – висота балки в метрах.

Оптимальну висоту балки визначатимемо за формулою В.М. Вахуркіна [10]:

$$h_{opt} = \sqrt[3]{\frac{3}{2} \lambda_{w,opt} W_{req}}, \quad (13)$$

де $\lambda_{w,opt}$ – гнучкість стінки балки; W_{req} – необхідний момент опору перерізу.

Товщина полочки визначатиметься з формули:

$$t_f = t_w \frac{k_F}{k_A} \quad (14)$$

У якості вихідних даних для роботи алгоритму слугують параметри: довжина балки L , розрахунковий опір матеріалу R_y , діапазон рівномірно-розподіленого навантаження q , на основі якої визначається згинальний момент M_x та необхідний момент опору $W_{x,req}$.

Далі реалізується подвійний цикл перебору можливих параметрів гнучкості $\lambda_{w,opt}$ та коефіцієнта k_A для кожної комбінації яких обчислюються геометричні розміри перерізу: оптимальна висота балки h_{opt} , товщина стінки t_w , товщина полицок t_f , ширина полиці b_f та ефективна висота стінки h_w . Таким чином формується теоретичний оптимальний двотавровий переріз.

Після цього визначається момент інерції I_x та коефіцієнт використання перерізу Δ – який характеризує відношення фактичної несучої здатності до розрахункової. Якщо $\Delta > 1$, ітерація алгоритму відкидається як така, що не відповідає вимогам міцності.

Якщо умова міцності ($\Delta \leq 1$) виконується, розраховується площа перерізу A_b та маса балки g_b . Критерієм оптимальності є мінімальне відхилення Δ від граничного значення ($\Delta \rightarrow 1$) при одночасному прагненні до зменшення маси ($g_b \rightarrow min$).

Результат роботи алгоритму зберігається у вигляді масиву даних, що включає параметри оптимальної конфігурації для кожного навантаження. Приклад роботи алгоритму для наступних даних – $L = 16$ м, $R_y = 230$ МПа, $q \in [10, 200]$ (q із кроком 10), $\lambda_{w,opt} \in [120, 150]$, $k_A \in [1, 10]$ (k_A із кроком 0.01), наведено в таблиці 1, для більш дискретних значень q , результат роботи алгоритму наведений на рисунках 2 та 3.

Таблиця 1. Результат роботи ітераційного алгоритму

q , кН/м	$\lambda_{w,opt}$	k_F	k_A	t_w , мм	h_w , мм	t_f , мм	b_f , мм	A_b , см ²	W_x , см ³	g_b , т
10	139	2,67	5,09	9,0	652,5	4,7	247,7	82,0	1391	1,03
20	138	2,91	3,7	9,5	817,1	7,5	285,7	120,3	2783	1,51
30	145	3,10	3,36	9,9	950,0	9,2	311,9	151,2	4174	1,90
40	146	3,25	3,05	10,2	1046,5	10,9	329,2	178,3	5565	2,24
50	145	3,36	2,8	10,4	1123,0	12,5	341,9	202,9	6957	2,55
60	148	3,47	2,7	10,7	1200,8	13,7	353,9	225,5	8349	2,83
70	148	3,56	2,57	10,9	1262,9	15,1	363,0	246,9	9739	3,10
80	142	3,62	2,35	11,0	1299,5	16,9	368,4	267,8	11130	3,36
90	136	3,67	2,16	11,1	1329,3	18,8	372,8	288,1	12521	3,62

Продовження табл. 1

q , кН/м	$\lambda_{w,opt}$	k_F	k_A	t_w , мм	h_w , мм	t_f , мм	b_f , мм	A_b , см ²	W_x , см ³	g_b , т
100	150	3,80	2,34	11,4	1425,9	18,5	384,8	304,8	13915	3,83
110	124	3,74	1,84	11,3	1371,5	22,9	379,2	327,7	15304	4,12
120	123	3,79	1,78	11,4	1406,6	24,2	383,9	345,7	16695	4,34
130	150	3,99	2,17	11,8	1553,2	21,7	400,1	356,6	18087	4,48
140	137	3,98	1,92	11,8	1539,0	24,4	399,2	375,6	19477	4,72
150	149	4,10	2,07	12,0	1623,3	23,8	408,0	388,9	20869	4,89
160	126	4,02	1,69	11,8	1558,1	28,1	402,1	410,8	22259	5,16
170	123	4,04	1,62	11,9	1574,7	29,7	404,2	427,6	23656	5,37
180	124	4,09	1,61	12,0	1609,0	30,5	408,0	442,4	25047	5,56
190	137	4,22	1,77	12,3	1699,4	29,2	416,8	452,4	26435	5,68
200	145	4,31	1,86	12,5	1764,6	28,9	423,0	464,3	27827	5,83

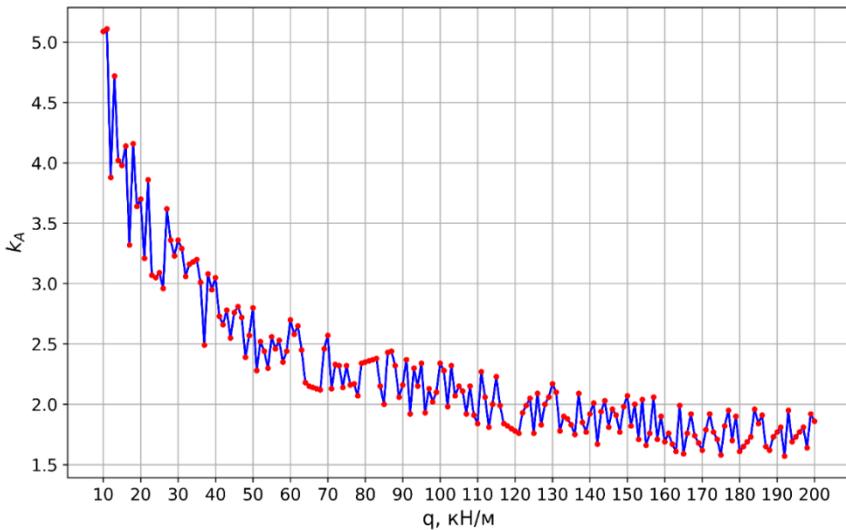


Рис. 2. Залежність коефіцієнту k_A зі зростанням навантаження q

Таким чином, алгоритм дозволяє здійснити багатофакторний пошук, що забезпечує системний підхід до вибору оптимальних параметрів балки з точки зору як міцності, так і матеріаломісткості.

Як можна бачити з даних таблиці 1 та рисунку 2 із збільшенням навантаження, значення коефіцієнту k_A зменшується. Для заданого набору

даних можливо виконати апроксимацію (регресію) графіка функції $k_A(q)$ поліномом n ступеня методом найменших квадратів.

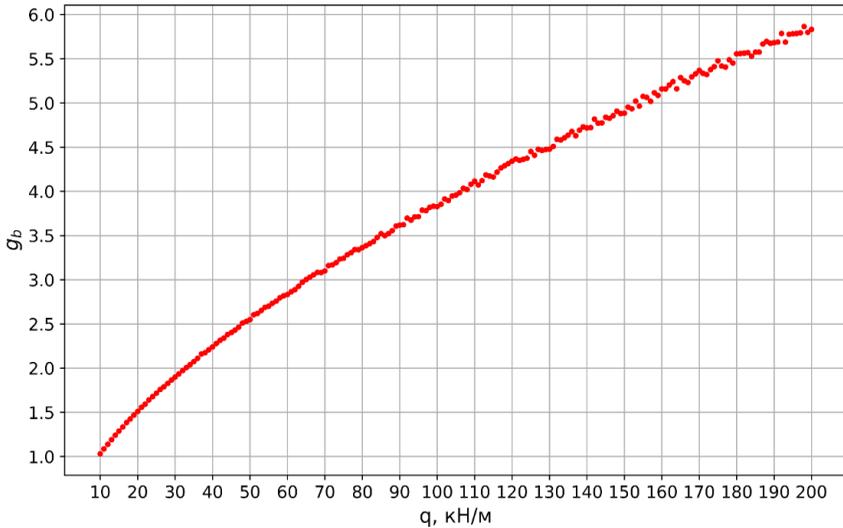


Рис. 3. Залежність ваги балки g_b зі зростанням навантаження q

Наведену функцію доцільно апроксимувати алгебраїчним поліномом п'ятого ступеня, у вигляді:

$$k_A(q) = a_5q^5 + a_4q^4 + a_3q^3 + a_2q^2 + a_1q + a_0, \quad (15)$$

де a_i – коефіцієнти полінома, що підлягають визначенню, таким чином, щоб сума квадратів відхилень полінома $k_A(q)$ від значень k_A апроксимуючої функції в заданих точках була мінімальною.

Підбір коефіцієнтів здійснюємо за допомогою функції *numpy.polyfit*, яка визначає коефіцієнти полінома. Тоді поліноміальне рівняння функції $k_A(q)$ для балки довжиною 16 метрів, може бути записане у наступному вигляді:

$$k_A(q) = -1.468 \cdot 10^{-10} \cdot q^5 + 9.279 \cdot 10^{-8} \cdot q^4 + -2.238 \cdot 10^{-5} \cdot q^3 + \quad (16) \\ + 2.588 \cdot 10^{-3} \cdot q^2 + 1.506 \cdot 10^{-1} \cdot q + 5.874$$

Визначений поліном дозволяє сформувати згладжену апроксимуючу криву $k_A(q)$ (рисунок 4). Аналогічно можуть бути побудовані апроксимуючі функції для різних вхідних даних.

Для оцінки точності моделі було розраховано коефіцієнт детермінації R^2 , який відображає, наскільки побудована модель відображає варіацію вихідних даних; середньоквадратична похибка (RMSE) – відображає середню відстань між апроксимованими та фактичними значеннями. Високе значення R^2 у поєднанні з відносно низьким значенням RMSE в цьому випадку свідчить про те, що обрана модель добре узгоджується з експериментальними даними.

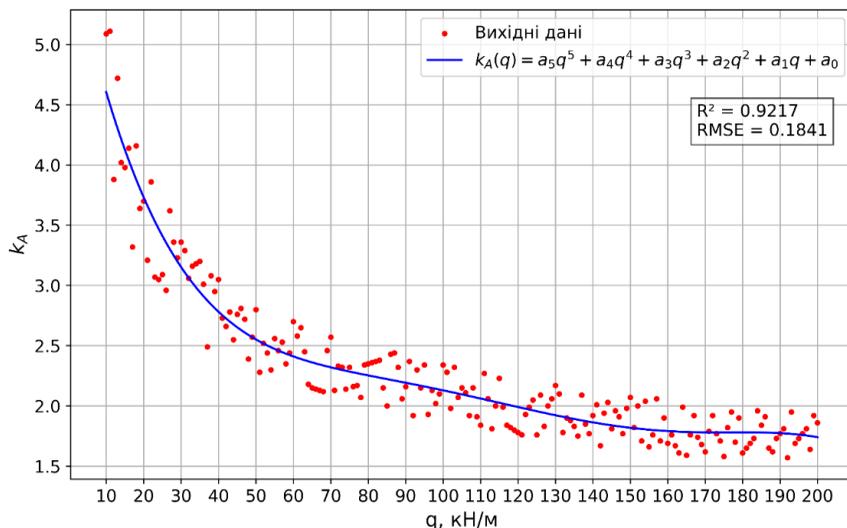


Рис. 4. Апроксимована функція $k_A(q)$

Для верифікації алгоритму порівняємо результат його роботи з різними прикладами (I-IV) розрахунку головних балок наведених в навчальній та довідковій літературі [12, с. 77; 6, с. 217; 13, с. 95; 14, с. 100].

В таблиці 2 наведено порівняння результатів роботи алгоритму (графа б) з результатами отриманими за традиційною методикою (графа а).

Порівнюючи дані наведені в таблиці, можна зробити висновок, що результат роботи алгоритму дозволяє швидко та точно підібрати орієнтовні розміри елементів двотаврового перерізу, близьких до оптимальних, що відповідають умові міцності, та мінімальній вазі балки. Звісно, отримані результати потребують узгодження із сортаментом розмірів сталевих листів, врахування умов забезпечення місцевої стійкості, що ставить задачу удосконалення роботи алгоритму та необхідність проведення подальших досліджень.

Таблиця 2. Порівняння результатів роботи ітераційного алгоритму

Параметри	I		II		III		IV	
	a	b	a	b	a	b	a	b
L , м	18		12		9		12	
q , кН/м	176.3		189		137		203	
R_y , МПа	230		240		230		215	
γ_c	1.1		1.1		1		1.1	
λ_w	128	129	139	125	86	140	103	128
d	3.292	4.222	3.16	3.631	3	3.266	3.225	3.765
k_A	2.05	1.63	1.93	1.95	1.433	2.82	1.488	1.9
t_w , мм	14	12.3	10	11	10	10.2	12	11.3
h_w , мм	1800	1697.4	1390	1300.8	860	1058.2	1240	1392
t_f , мм	22	31.8	16	20.5	20	11.9	25	22.4
b_f , мм	560	417.1	450	369.6	300	331.4	400	381.6
A_b , см ²	498.4	473.886	283	295.165	206	187.042	348.8	328.516
W_x , см ³	29559	28218.9	13157	12886.9	6350	6030.8	15360	15449.6
g_b , т	7.042	6.696	2.666	2.78	1.455	1.321	3.286	3.095
Δg , %	100	95.08	100	104.27	100	90.79	100	94.19
$\Delta \sigma$, %	95.5	100	98.1	100	95.22	100	100.42	100

Висновки

Оптимізація параметрів сталевих конструкцій є важливою задачею сучасного будівельного проектування, адже вона безпосередньо впливає на економічну ефективність будівництва. Зменшення маси елементів дозволяє суттєво скоротити витрати на закупівлю матеріалів, виготовлення, транспортування та монтаж конструкцій.

В роботі розглянуто задача оптимізації розмірів зварних двотаврових балок виходячи з критерію мінімуму потенційної енергії пружної деформації, в результаті диференціювання якого було отримано аналітичний вираз для коефіцієнта форми двотаврового перерізу, що характеризує оптимальне співвідношення між площею стінки та поясу балки.

В процесі дослідження було розроблено алгоритм, що дозволяє знайти для заданого діапазону навантаження, раціональні параметри перерізу зварної двотаврової балки за умови забезпечення її міцності та мінімальної маси. Результат роботи алгоритму дозволяє використовувати його безпосередньо для вирішення практичних задач підбору оптимального перерізу, так і формування табличних даних, апроксимаційних функцій для

швидкого й точного визначення оптимальних розмірів двотаврового перерізу.

Конфлікти інтересів

Автори заявляють, що у них немає конфлікту інтересів щодо поточного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський чи будь-який інший, який міг би вплинути на дослідження, а також на результати, наведені в цьому документі.

Фінансування

Дослідження проводилося без фінансової підтримки.

Доступність даних

Усі дані доступні в цифровій або графічній формі в основному тексті статті.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що при створенні поточної роботи вони не використовували технології штучного інтелекту.

References

1. Gordeev V. N. Jelementarnye zadachi optimizacii dvutavra. *Zbirnyk naukovykh prats Ukrainkoho naukovo-doslidnoho ta proektnoho instytutu stalevykh konstruktzii imeni V.M. Shymanovskoho*. 2009. No. 3. P. 27–48. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ZNPISK_2009_3_6 (date of access: 09.10.2025).

2. Golodnov A. I., Fomina I. P. K opredeleniju optimal'nyh parametrov stal'nyh dvutavrovnyh balok. *Zbirnyk naukovykh prats Ukrainkoho instytutu stalevykh konstruktzii imeni V. M. Shymanovskoho*. 2014. No. 14. P. 95–104. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ZNPISK_2014_14_11 (дата звернення: 09.10.2025).

3. Perel'muter A. V., Permjakov V. A., Jurchenko V. V. Optimal'noe projektirovanie stal'nyh sterzhnevnyh konstrukcij. Kiev : TOV «Izdatel'stvo «Stal'», 2008. 538 s.

4. Bilyk S. I. Metodyka vyznachennia optymalnoi vysoty ctalevoi dvotavrovoyi balky zi zminnym pererizom stinky pry rozvytku obmezhenykh plastychnykh deformatsii. *Zbirnyk naukovykh prats Ukrainkoho instytutu stalevykh konstruktzii imeni V. M. Shymanovskoho*. 2012. No. 9. P. 28–33. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ZNPISK_2012_9_5 (date of access: 09.10.2025).

5. Optimal height of steel I-beams with changing the width of the flanges / A. Bilyk et al. *Building constructions. Theory and Practice*. 2022. No. 12. P. 42–52. URL: <https://doi.org/10.32347/2522-4182.12.2023.42-52> (date of access: 09.10.2025).

6. Nilov O.O., Permiakov V.O., Shymanovskyi O.V. ta in. *Metalevi konstruktzii*. 2-he vyd. Kyiv : Stal, 2010. 869 s.

7. Lapenko A. I., Golodnov A. I., Fomina I. P. Podbor optimal'nyh po rashodu stali sechenij svarnykh dvutavrovnyh balok. *Zbirnyk naukovykh prats Ukrainkoi derzhavnoi*

- akademii zaliznychnoho transportu*. 2015. Vol. 151, No. 2. P. 135–139. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Znpudazt_2015_151\(2\)_22](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Znpudazt_2015_151(2)_22) (date of access: 09.10.2025).
8. Arrangement of effective section of I-beam / Peretyatko Yu.G., Lyashenko I.Yu. *Scientific Bulletin of Construction*. 2021. Vol. 103. No. 1. P. 155–162. URL: <https://svc.kname.edu.ua/index.php/svc/uk/article/view/44/44> (date of access: 09.10.2025).
9. Yanin O. Ye., Novikova S. M. Optymizatsiia vysoty stalevoi zvarnoi dvotavrovoy balky na diliankakh bilia opor. *Suchasni budivelni konstruksii z metalu ta derevyny*. 2020. No. 24. P. 149–158. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/sskmd_2020_24_19 (date of access: 09.10.2025).
10. Vahurkin V. M. Naivygodnejshaja forma dvotavrovyyh balok. *Bjulleten' stroitel'noj tehniki*. 1949. No. 21. P. 3–8.
11. Bilyk A. S., Vdovkin O. O. Metodolohiia pobudovy sortamentu dlia DSTU «Dvotavry stalevi zvarni. Tekhnichni vymohy ta sortament». *Zbirnyk naukovykh prats Ukrainського інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського*. 2021. No. 27-28. P. 73–94. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ZNPISK_2021_27-28_6 (date of access: 09.10.2025).
12. *Metalevi konstruksii* / red. F. Ye. Klymenko. 2-he vyd. Lviv : Svit, 2002. 312 s.
13. Mandrikov A. P. Raschet stal'nyh konstrukcij. 2-e izd., pererab. i dop. Moskva : Stroijzdat, 1991. 431 s.
14. Lihtarnikov Ja. M., Ladyzhenskij D. V., Klykov V. M. Raschet stal'nyh konstrukcij. 2-e izd., pererab. i dop. Kiev : Budivel'nik, 1984. 368 s.

Література

1. Гордеев В. Н. Элементарные задачи оптимизации двутавра. *Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського*. 2009. № 3. С. 27–48. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ZNPISK_2009_3_6 (дата звернення: 09.10.2025).
2. Голоднов А. И., Фомина И. П. К определению оптимальных параметров стальных двутавровых балок. *Збірник наукових праць Українського інституту сталевих конструкцій імені В. М. Шимановського*. 2014. № 14. С. 95–104. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ZNPISK_2014_14_11 (дата звернення: 09.10.2025).
3. Перельмутер А. В., Пермяков В. А., Юрченко В. В. Оптимальное проектирование стальных стержневых конструкций. Киев : ТОВ «Издательство «Сталь», 2008. 538 с.
4. Білик С. І. Методика визначення оптимальної висоти сталеві двотаврової балки зі змінним перерізом стінки при розвитку обмежених пластичних деформацій. *Збірник наукових праць Українського інституту сталевих конструкцій імені В. М. Шимановського*. 2012. № 9. С. 28–33. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ZNPISK_2012_9_5 (дата звернення: 09.10.2025).

5. Білик А.С., Білик С.І., Глітін О.Б., Джанов Л.В. Оптимальна висота сталевих двотаврових балок зі змінною шириною полиць. *Будівельні конструкції. Теорія і практика*. 2022. №12. С. 42–52. URL: <https://doi.org/10.32347/2522-4182.12.2023.42-52> (дата звернення: 09.10.2025).
6. Нілов О.О., Пермяков В.О., Шимановський О.В. та ін. *Металеві конструкції*. 2-ге вид. Київ : Сталь, 2010. 869 с.
7. Лапенко А. И., Голоднов А. И., Фомина И. П. Подбор оптимальных по расходу стали сечений сварных двутавровых балок. *Збірник наукових праць Української державної академії залізничного транспорту*. 2015. Т. 151, № 2. С. 135–139. URL: [http://nbuv.gov.ua/UJRN/Znpudazt_2015_151\(2\)_22](http://nbuv.gov.ua/UJRN/Znpudazt_2015_151(2)_22) (дата звернення: 09.10.2025).
8. Перетятко Ю. Г., Ляшенко І. Ю. Компонування ефективного перерізу двотаврової балки. *Науковий вісник будівництва*. 2021. Т. 103, № 1. С. 155–162. URL: <https://svc.kname.edu.ua/index.php/svc/uk/article/view/44/44> (дата звернення: 09.10.2025).
9. Янін О. С., Новікова С. М. Оптимізація висоти сталеві зварної двотаврової балки на ділянках біля опор. *Сучасні будівельні конструкції з металу та деревини*. 2020. № 24. С. 149–158. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/sskmd_2020_24_19 (дата звернення: 09.10.2025).
10. Вахуркин В. М. Наивыгоднейшая форма двутавровых балок. *Бюллетень строительной техники*. 1949. № 21. С. 3–8.
11. Білик А. С., Вдовкін О. О. Методологія побудови сортаменту для ДСТУ «Двотаври сталеві зварні. Технічні вимоги та сортамент». *Збірник наукових праць Українського інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського*. 2021. № 27-28. С. 73–94. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/ZNPISK_2021_27-28_6 (дата звернення: 09.10.2025).
12. *Металеві конструкції* / ред. Ф. Є. Клименко. 2-ге вид. Львів : Світ, 2002. 312 с.
13. Мандриков А. П. Расчет стальных конструкций. 2-е изд., перераб. и доп. Москва : Стройиздат, 1991. 431 с.
14. Лихтарников Я. М., Ладьженский Д. В., Клыков В. М. Расчет стальных конструкций. 2-е изд., перераб. и доп. Киев : Будівельник, 1984. 368 с.

Відомості про статтю:	Article information:
Отримано 12.11.2025	Received 12.11.2025
Отримано у доопрацьованому вигляді 14.11.2025	Received in revised form 14.11.2025
Прийнято 25.11.2025	Accepted 25.11.2025
Опубліковано 25.12.2025	Published 25.12.2025

K. V. Sokolenko*

PhD, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3334-7855>

Department of civil engineering, urbanism and spatial planning

Volodymyr Dahl East Ukrainian National University, 17 Ioanna Pavla Druhoho St., Kyiv, Ukraine, 01042

*corresponding author, e-mail: sokolenko@snu.edu.ua

Optimization of the cross-section of a steel welded I-beam according to the criterion of minimum potential strain energy

How to Cite:

Sokolenko, K. V. (2025). Optimization of the cross-section of a steel welded I-beam according to the criterion of minimum potential strain energy. *Modern technologies and methods of calculations in construction*, 24, 477-492. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14\(24\)-41](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2025-14(24)-41)

Abstract. The article considers the problem of reducing the material consumption of steel welded I-beams by optimizing their cross-section based on the criterion of minimum potential energy of elastic deformation ($dU/dh = 0$) accumulated in the beam during bending. Analytical differentiation of this criterion made it possible to derive a dimensionless design parameter k_A , which characterizes the optimal ratio between the wall area and the flange area of the I-beam.

Since rolled I-beam profiles were developed to ensure strength and stability while meeting criteria of economic and technological efficiency, it is advisable to use these principles to find the optimal cross-section of an I-beam. For this purpose, the shape coefficient k_F is introduced in the work, which characterizes the geometric proportions of the cross-section – the ratio of the height of the I-beam to the width of its flange. Based on the analysis of rolled profile assortments, an almost linear trend of the coefficient increase with the increase in beam height has been established.

The relationship between the coefficients k_A and k_F allows them to be used for preliminary approximate selection of an I-beam cross-section that will be close to the optimal one.

For practical implementation, a numerical iterative optimization algorithm has been developed that implements a multifactorial search for rational cross-sectional dimensions (height, wall thickness, thickness and width of flanges) under conditions of minimum beam weight and compliance with strength requirements.

Analysis of the results obtained by the algorithm showed that an increase in load leads to a decrease in k_A and an increase in beam weight, which made it possible to obtain an approximate dependence $k_A(q)$ in the form of a fifth-degree polynomial and allows the obtained dependence to be used in practical calculations.

The algorithm can be used to create software tools for automated design, build tables of optimal parameters, and develop recommendations for the standardization of welded profiles. There is a need for further improvement of the algorithm to take into account the standardized dimensions of rolled sheet metal and ensure local stability conditions.

Keywords: optimization, I-beam, potential deformation energy, minimum weight, numerical modeling.