

УДК 711.4:519.6

**Л.М. Піліпака\***

к.т.н., доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8067-4480>

Кафедра міського будівництва та господарства

Національний університет водного господарства та природокористування, вулиця Соборна, 11, Рівне, Україна, 33000

\*автор-кореспондент, e-mail: [l.m.pilipaka@nuwm.edu.ua](mailto:l.m.pilipaka@nuwm.edu.ua)

## **Метод скінченних міських модулів як інструмент моделювання та розрахунку містобудівних систем**

Цитувати як:

Піліпака, Л.М. (2026) Метод скінченних міських модулів як інструмент моделювання та розрахунку містобудівних систем. Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві, 25, 367-376. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2026-15\(25\)-27](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2026-15(25)-27)

© 2026, Автор. Публікується згідно рекомендацій ліцензії [CC BY 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

*Анотація. У статті запропоновано метод скінченних міських модулів (МСкММ) – принципово новий гібридний підхід до математичного моделювання та розрахунку містобудівних систем, заснований на строгій адаптації апарату методу скінченних елементів (МСЕ) до задач просторового планування. Актуальність розробки зумовлена відсутністю уніфікованого математичного інструментарію, здатного одночасно описувати площинні міські зони, лінійні інфраструктурні мережі та точкові центри тяжіння в єдиній системі рівнянь із чітким трактуванням нормативних обмежень. Показано, що містобудівна система може бути подана через гібридний дискретний простір, де площинні міські модулі (квартали, райони, функціональні зони) описуються як 2D-елементи, транспортні та інженерні мережі – як 1D-елементи, а точкові об'єкти й агенти (центри тяжіння, зупинки, джерела попиту) – як 0D-елементи. Для кожного типу елемента виведено локальні оператори: матрицю жорсткості, матрицю накопичення та вектор навантаження із конкретною урбаністичною інтерпретацією коефіцієнтів (просторова провідність, пропускна здатність, цільність, попит). Запроваджено поняття матриці функціональної сумісності модулів, яка алгебраїзує містобудівний регламент та забезпечує математично коректне зв'язування суміжних міських зон – повна сумісність задає сильний інтерфейсний зв'язок, несумісність – бар'єрний елемент або нульовий зв'язок. Детально розглянуто блокову структуру глобальної системи рівнянь, типи граничних умов (Діріхле, Неймана, Робіна та сідові умови для задач з нормативними обмеженнями), а також методи розв'язання лінійних і нелінійних систем – ітераційні Крилов-методи, багаторівневі AMG-методи, прямі розвіджені розв'язувачі. Описано підходи до динамічного моделювання (IMEX-схеми для жорстких задач) та стохастичного аналізу (нейтрузивні та інтрузивні методи polynomial chaos). Проведено порівняльний аналіз МСкММ із клітинними*

автоматами, агентно-орієнтованими та транспортними моделями, що підтвердив системні переваги запропонованого підходу: строга варіаційна постановка, адаптивна дискретизація, масштабовані розв'язувачі та природний зв'язок з чинними нормами. Продемонстровано відповідність МСкММ вимогам ДБН Б.2.2-12:2019 та практичну придатність методу для сценарного аналізу, оптимізаційних задач і автоматизованого картографування містобудівних індикаторів.

*Ключові слова:* метод скінченних елементів, містобудівне моделювання, просторове планування, доступність, гібридна дискретизація, сценарний аналіз.

## Вступ

Сучасні містобудівні системи характеризуються значною складністю: вони включають взаємодіючі підсистеми транспорту, інженерної інфраструктури, землекористування, соціального середовища та екологічних факторів. Для обґрунтованого прийняття містобудівних рішень потрібен інструментарій, здатний одночасно описувати площинні міські зони, лінійні мережі та точкові центри тяжіння в єдиній математичній моделі [1].

Традиційні підходи, такі як клітинні автомати, агентно-орієнтовані моделі, транспортні чотирикрокові моделі, вирішують окремі аспекти задачі, проте кожен з них має обмеження: клітинні автомати добре відтворюють просторову дифузію, але не мають строгого математичного апарату для мережевих потоків; агентні моделі забезпечують поведінкову деталізацію, але погано масштабуються для великих систем; транспортні моделі враховують мережеву зв'язність, але ігнорують просторовий розподіл щільності та доступності [2, 3].

МСЕ, розроблений для задач механіки суцільних середовищ, пропонує потенційно уніфікований математичний апарат: строгу варіаційну постановку, локальне складання елементів у глобальну систему, чітке трактування граничних умов та наявність зрілих розв'язувачів [4]. Проте пряме перенесення класичного МСЕ на містобудівні задачі є некоректним через суттєво різну природу «жорсткості» та «переміщень» в урбаністичному контексті.

**Аналіз літературних джерел та постановка проблеми.** Аналіз наукових публікацій свідчить про значний інтерес дослідників до формалізації містобудівного моделювання. Wilson A.G. [5] заклав основи просторово-взаємодіючих моделей; Batty M. [6] розвинув підходи на базі клітинних автоматів та фракталів; Wegener M. [7] систематизував інтегровані моделі транспорту та землекористування. Однак більшість існуючих підходів або не мають строгого варіаційного формулювання, або

не дозволяють природно поєднувати елементи різної розмірності в єдиній системі рівнянь [8].

Проблема полягає у відсутності уніфікованого математичного апарату, який забезпечував би: (1) одночасний опис площинних, лінійних і точкових містобудівних об'єктів; (2) строгу алгебраїзацію містобудівного регламенту як граничних умов; (3) масштабовані методи розв'язання для великих міських систем; (4) природний зв'язок з чинною нормативною базою просторового планування [9].

**Мета і завдання дослідження.** Метою роботи є розроблення та обґрунтування методу скінченних міських модулів (МСкММ) як математично строгого інструменту моделювання та розрахунку містобудівних систем.

Для досягнення мети вирішувалися такі завдання: формалізація гібридного дискретного простору містобудівної системи; виведення локальних операторів для елементів різної розмірності; побудова глобальної блокової системи рівнянь; визначення типів граничних умов відповідно до нормативних вимог; порівняльний аналіз МСкММ з існуючими методами моделювання.

### Матеріали та методи

Методологічну основу МСкММ становить апарат методу кінцевих елементів, адаптований до специфіки містобудівних задач. Містобудівна система подається гібридним доменом:

$$\Omega = \Omega_c \cup \Gamma_n \cup \Xi_a \quad (1)$$

де  $\Omega_c \subset \mathbb{R}^2$  – площинна частина міста (ареальні модулі);  $\Gamma_n$  – вбудована 1D-мережа (транспортні, енергетичні та водні зв'язки);  $\Xi_a$  – множина точкових об'єктів, агентів та центрів тяжіння [10].

Вектор стану системи має блокову структуру  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m, \lambda\}$ , де блоки  $u_i$  відповідають підсистемам (мобільність, інфраструктура, житло, екологія, соціальні індикатори), а  $\lambda$  – двоїстим змінним сумісності. Узагальнена напівдискретна постановка задачі:

$$M(U) \cdot \dot{U} + R(U, t, \omega) = F(t, \omega) \quad (2)$$

де  $M$  – матриця накопичення (інерції),  $R$  – нелінійний оператор просторового зв'язку, перерозподілу та обмежень,  $F$  – вектор екзогенних впливів,  $\omega$  – стохастичний параметр сценарію. Для квазістатичних задач отримуємо  $R(U) = F$ .

Для клітинного 2D-елемента локальний оператор жорсткості та вектор навантаження визначаються як:

$$K_{e\ cell} = \int \Omega_e B_e^T D_e B_e d\Omega + \int \Omega_e N_e^T \Sigma_e N_e d\Omega \quad (3)$$

де  $D_e$  – тензор просторової провідності або взаємопроникності між сусідніми модулями;  $\Sigma_e$  – матриця локальних втрат та насичення;  $N_e$  – матриця базисних функцій;  $B_e = \nabla N_e$  – матриця градієнтів [4].

Для мережевого 1D-елемента на ребрі довжини  $\ell_e$  симетрична частина матриці жорсткості:

$$K_{e,symnet} = (k_e / \ell_e) \cdot [[1, -1], [-1, 1]] \quad (4)$$

де  $k_e$  – коефіцієнт пропускної здатності (аналог провідності для дороги, трубопроводу чи лінії зв'язку). Напрявлений член  $\beta_e$  робить матрицю несиметричною для мереж з орієнтованими потоками [4].

Матриця функціональної сумісності модулів  $C_{ijmod}$  алгебраїзує містобудівний регламент через інтерфейсний оператор:

$$a_{ijint}(u_i, u_j; v) = \int \Gamma_{ij} \gamma_{ij}(u_i - u_j) \cdot v \, d\Gamma, \quad \gamma_{ij} = \gamma_0 \cdot \chi(C_{ijmod}) \quad (5)$$

де  $\gamma_0$  – базова інтенсивність зв'язку;  $\chi(C_{ijmod})$  – функція, що відображає ступінь функціональної сумісності: повна сумісність означає сильний дозволений зв'язок, умовна – послаблений, несумісність – нульовий зв'язок або бар'єрний елемент [9].

| <b>МІСТОБУДІВНА СИСТЕМА</b>   |   |  |
|---|---|--|
| <b>2D-елементи</b><br>Клітинні модулі<br><i>Квартали, райони, зони</i>  | <b>1D-елементи</b><br>Мережеві елементи<br><i>Вулиці, мережі, комунікації</i> | <b>0D-елементи</b><br>Агентні вузли<br><i>Центри тяжіння, агенти</i> |
| <b>ГЛОБАЛЬНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ: <math>A \cdot U = F</math></b><br>Матриця жорсткості · Вектор стану = Вектор навантаження |   |  |
| <b>ВИХОДИ:</b><br>Карти доступності<br>Індикатори сервісу   | <b>ОБМЕЖЕННЯ:</b><br>ДБН, зонування<br>Бюджет, екологія                       | <b>СЦЕНАРНИЙ АНАЛІЗ:</b><br>Детерміновані<br>Стохастичні             |

Рис. 1. Концептуальна схема методу скінченних міських модулів (МСкММ)

### Результати та обговорення

Розроблений МСкММ забезпечує єдиний математичний опис містобудівної системи через гібридний дискретний простір  $V_h = V_{hcell} \times V_{hnet} \times V_{hagent} \times \Lambda_h$ . Така архітектура дозволяє природно включати в модель містобудівні норми (ДБН Б.2.2-12:2019) як граничні умови: умови типу Діріхле, які задають фіксовані цільові стани або допустимі рівні сервісу; умови Неймана, які задають потоки та імпорту/експорту між зонами; умови Робіна, які задають напівпроникні межі та тарифно-часові опори; сідлові зв'язки для регламентів сумісності [5, 9].

Таблиця 1. Типи елементів методу скінченних міських модулів

| Тип елемента         | Геометрія та масштаб   | Ступені свободи  | Оцінка ефективності  |
|----------------------|--|--|--|
| Клітинний (2D)       | Площинні полігони: квартали, райони; вузли: вершини та межові інтерфейси | Щільність, потенціал доступності, екологічне навантаження, площинні потоки | Висока для розподілених полів; добра масштабованість             |
| Мережевий (1D)       | Ребра: канали, вулиці; вузли: перехрестя, станції, хаби                  | Вузлові потенціали, лінійні потоки, пропускна здатність, імпеданс          | Дуже висока для коридорів і мереж; низькі ресурси                |
| Агентний (0D)        | Точкові об'єкти, прикріплені до клітин або вузлів мережі                 | Попит, вибір маршруту, графік активності, поведінкові стани                | Висока для гетерогенності; середня масштабованість               |
| Гібридний (2D+1D+0D) | Комбінація всіх типів з єдиною картою DOF                                | Блокові комбінації всіх вищезазначених DOF                                 | Найвища для реалістичного міста; потребує блокового розв'язувача |

Розроблений МСкММ забезпечує єдиний математичний опис містобудівної системи через гібридний дискретний простір  $V_h = V_{hcell} \times V_{hnet} \times V_{hagent} \times \Lambda_h$ . Така архітектура дозволяє природно включати в модель містобудівні норми (ДБН Б.2.2-12:2019) як граничні умови: умови типу Діріхле задають фіксовані цільові стани або допустимі рівні сервісу; умови Неймана – задані потоки та імпорту/експорту між зонами; умови Робіна – напівпроникні межі та тарифно-часові опори; сідлові зв'язки – регламенти сумісності [5, 9].

Принципова перевага МСкММ полягає у можливості одночасного моделювання полів розвитку (щільність, доступність, екологічне навантаження) через клітинні елементи та потоків (транспортні, інженерні) через мережеві елементи в рамках однієї блокової матриці. Позадіагональні блоки глобальної матриці відображають фізичні зв'язки

між підсистемами: транспорт ↔ щільність, інфраструктура ↔ якість середовища, доступність ↔ соціальні індикатори [6, 7].

Важливою характеристикою МСкММ є адаптивність масштабу дискретизації. Згідно з принципами методу, елементи доцільно подрібнювати у зонах підвищеної функціональної складності: вузлах пересадки, лікарнях, берегових захисних зонах, «вузьких місцях» мережі, – і укрупнювати в однорідних житлових та промислових кварталах. Цей підхід аналогічний адаптивному рефайнменту сітки у класичному МКЕ і забезпечує раціональне використання обчислювальних ресурсів [8, 10].

Стохастичний аналіз у МСкММ реалізується двома способами. Неінтрузивний підхід передбачає багаторазові детерміновані розрахунки для ансамблю сценаріїв ( $E[\Phi(U)] \approx (1/N_s) \sum \Phi(U_s)$ ). Інтрузивний підхід – стохастичний Гальоркін / polynomial chaos – збільшує алгебраїчний розмір системи до  $N_{dof} \times N_s$ , але забезпечує формальну оцінку невизначеності. Для задач просторового планування неінтрузивний підхід є доцільнішим через простоту інтеграції з існуючими нормативними сценаріями [3].

Постпроцесний аналіз у МСкММ передбачає обчислення містобудівних індикаторів  $I_k = \Psi_k(U_h)$ : карти доступності сервісів, hotspot-и щільності, agrow-карти потоків, часово-залежні карти зеленого доступу, shadow prices  $\lambda$  як міри інфраструктурного дефіциту та мапи локальної нев'язки для виявлення проблемних ділянок [1, 6].

Таблиця 2. Порівняння МСкММ з існуючими методами моделювання містобудівних систем

| Метод                     | Основна парадигма | Масштабованість | Основна область застосування   |
|---------------------------|-------------------|-----------------|--------------------------------|
| МСкММ (запропонований)    | Клітинно-мережева | Висока          | Потоки, доступність, щільність |
| Клітинний автомат (CA)    | Клітинна          | Середня         | Змінення землекористування     |
| Агентне моделювання (ABM) | Агентна           | Середня, низька | Поведінкові патерни            |
| Транспортна чотирикорова  | Мережева          | Висока          | Транспортні потоки             |

Порівняльний аналіз (таблиця 2) показує, що МСкММ поєднує переваги клітинно-автоматного підходу (просторова роздільна здатність),

мережевих моделей (опис потоків) та агентних моделей (поведінкова гетерогенність), водночас забезпечуючи математично строгу постановку, що відсутня в кожному з цих підходів окремо. Клітинні автомати та АВМ доцільно використовувати як верхній шар правил, що оновлює коефіцієнти та джерела між кроками МСкММ, а не як заміну варіаційного ядра [2, 3, 7].

Відповідність МСкММ чинній нормативній базі України забезпечується через природне відображення вимог ДБН у граничні умови моделі: нормативи щільності задаються як обмеження-нерівності; санітарні буферні зони як бар'єрні елементи з нульовим зв'язком; вимоги до пішоїдної доступності сервісів як умови Діріхле на вузлах доступності. Це дозволяє автоматично перевіряти нормативну відповідність проектних рішень у процесі розрахунку [9].

### Висновки

Розроблений метод скінченних міських модулів (МСкММ) є математично строгим гібридним підходом до моделювання містобудівних систем, що поєднує апарат методу кінцевих елементів з особливостями урбаністичних задач. Основні результати:

1. Запропоновано гібридний дискретний простір  $V_h = V_{hcell} \times V_{hnet} \times V_{hagent} \times \Lambda_h$ , що забезпечує одночасний опис площинних міських зон (2D), транспортних та інженерних мереж (1D) і точкових агентів (0D) в єдиній матричній системі.

2. Виведено локальні оператори (матриці жорсткості, накопичення та вектори навантаження) для кожного типу елементів, а також інтерфейсний оператор матриці функціональної сумісності модулів, що алгебраїзує містобудівний регламент.

3. Показано, що містобудівні норми (зонування, щільність, буферні зони, доступність, бюджет) природно входять у модель як граничні умови типу Діріхле, Неймана, Робіна та сідлові зв'язки, забезпечуючи відповідність вимогам ДБН Б.2.2-12:2019.

4. Порівняльний аналіз підтвердив переваги МСкММ над існуючими підходами: строга варіаційна постановка, масштабовані розв'язувачі (Крилов-методи, AMG), природний зв'язок з нормативною базою та можливість сценарного і стохастичного аналізу.

5. Подальші дослідження доцільно спрямувати на апробацію МСкММ на реальних містобудівних системах, розробку програмного інструментарію та інтеграцію з ГІС-даними та стандартом GTFS для часово-залежного транспортного моделювання.

### **Конфлікти інтересів**

Автор заявляє, що у нього немає конфлікту інтересів щодо поточного дослідження, включаючи фінансовий, особистий, авторський чи будь-який інший.

### **Фінансування**

Дослідження проводилося без спеціального фінансування.

### **Доступність даних**

Усі дані представлені в основному тексті статті у цифровій і графічній формах.

### **Використання штучного інтелекту**

Автор підтверджує, що при створенні поточної роботи технології штучного інтелекту не використовувалися.

### **References**

1. Pourmohammadi M. R. System Thinking and System Analysis in Urban Planning. Biomedical Journal of Scientific & Technical Research. 2022. Vol. 45, No. 3. DOI: <https://doi.org/10.26717/BJSTR.2022.45.007216>
2. Batty M. The New Science of Cities. Cambridge : MIT Press, 2013. 520 p. DOI: <https://doi.org/10.1257/jel.52.3.805>
3. Land use–transport interaction models / R. Cordera, A. Ibeas, L. dell'Olio, B. Alonso. Boca Raton : CRC Press, 2017. 238 p.
4. Bathe K. J. Finite element procedures. 2nd ed. United States : K. J. Bathe, 2014. 765 p.
5. Wilson A. G. Entropy in Urban and Regional Modelling. London : Pion, 1970. 166 p.
6. Batty M., Xie Y. From cells to cities. Environment and Planning B: Planning and Design. 1994. Vol. 21. P. 31–48. DOI: <https://doi.org/10.1068/b21s031>
7. Geurs K. T., van Wee B. Accessibility evaluation of land-use and transport strategies: review and research directions. Journal of Transport Geography. 2004. Vol. 12, No. 2. P. 127–140. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jtrangeo.2003.10.005>
8. Louf R., Barthelemy M. A typology of street patterns. Journal of the Royal Society Interface. 2014. Vol. 11, No. 101. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsif.2014.0924>
9. DBN B.2.2-12:2019. Planuvannia ta zabudova terytorii. Kyiv : Minrehion Ukrainy, 2019. 187 s.
10. Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method / A. Logg, K.-A. Mardal, G. Wells (eds). Berlin: Springer, 2012. 728 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-23099-8>

### **Література**

3. Pourmohammadi M. R. System Thinking and System Analysis in Urban Planning. Biomedical Journal of Scientific & Technical Research. 2022. Vol. 45, No. 3. DOI: <https://doi.org/10.26717/BJSTR.2022.45.007216>
4. Batty M. The New Science of Cities. Cambridge : MIT Press, 2013. 520 p. DOI: <https://doi.org/10.1257/jel.52.3.805>

3. Land use–transport interaction models / R. Cordera, A. Ibeas, L. dell’Olio, B. Alonso. Boca Raton : CRC Press, 2017. 238 p.
4. Bathe K. J. Finite element procedures. 2nd ed. United States : K. J. Bathe, 2014. 765 p.
5. Wilson A. G. Entropy in Urban and Regional Modelling. London : Pion, 1970. 166 p.
6. Batty M., Xie Y. From cells to cities. Environment and Planning B: Planning and Design. 1994. Vol. 21. P. 31–48. DOI: <https://doi.org/10.1068/b21s031>
7. Geurs K. T., van Wee B. Accessibility evaluation of land-use and transport strategies: review and research directions. Journal of Transport Geography. 2004. Vol. 12, No. 2. P. 127–140. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jtrangeo.2003.10.005>
8. Louf R., Barthelemy M. A typology of street patterns. Journal of the Royal Society Interface. 2014. Vol. 11, No. 101. DOI: <https://doi.org/10.1098/rsif.2014.0924>
9. ДБН Б.2.2-12:2019. Планування та забудова територій. Київ : Мінеріон Україна, 2019. 187 с.
10. Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method / A. Logg, K.-A. Mardal, G. Wells (eds). Berlin: Springer, 2012. 728 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-23099-8>

| Відомості про статтю:                         | Article information:                |
|---|-------------------------------------|
| Отримано 15.05.2026                           | Received 15.05.2026                 |
| Отримано у доопрацьованому вигляді 23.05.2026 | Received in revised form 23.05.2026 |
| Прийнято 27.05.2026                           | Accepted 27.05.2026                 |
| Опубліковано 29.05.2026                       | Published 29.05.2026                |

### **L.M.Pilipaka\***

Ph.D. in Engineering, Associate Professor, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8067-4480>

Department of Urban Planning and Development

National University of Water and Environmental Engineering, 11 Soborna St., Rivne, Ukraine, 33000

\*corresponding author, e-mail: [l.m.pilipaka@nuwm.edu.ua](mailto:l.m.pilipaka@nuwm.edu.ua)

## **Finite Urban Module Method as a Tool for Modelling and Calculation of Urban Planning Systems**

How to Cite: Pilipaka L.M.. (2026) Finite Urban Module Method as a Tool for Modelling and Calculation of Urban Planning Systems. Modern technologies and methods of calculations in construction, 25, 367-376. [https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2026-15\(25\)-27](https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2026-15(25)-27)

*Abstract. The paper presents the Finite Urban Module Method (FUMM) – a fundamentally new hybrid approach to mathematical modelling and calculation of urban planning systems based on the rigorous adaptation of the finite element method (FEM) to spatial planning problems. The relevance of this work is driven by the absence of a unified mathematical framework capable of simultaneously describing planar urban*

zones, linear infrastructure networks and point-based centres of gravity within a single system of equations with explicit handling of regulatory constraints. The urban system is represented through a hybrid discrete space in which planar urban modules (blocks, districts, functional zones) are described as 2D-elements, transport and engineering networks as 1D-elements, and point objects and agents (gravity centres, transit stops, demand sources) as 0D-elements. Local operators are derived for each element type: the stiffness matrix, the accumulation matrix and the load vector, with explicit urban interpretation of the coefficients (spatial conductivity, network capacity, density, demand). The concept of a functional module compatibility matrix is introduced to algebraize urban planning regulations and ensure mathematically rigorous coupling between adjacent urban zones: full compatibility implies a strong interface connection, incompatibility implies a barrier element or zero coupling. The block structure of the global system of equations is examined in detail, covering Dirichlet, Neumann, Robin and saddle-point boundary conditions for problems with regulatory constraints, as well as solution methods for linear and nonlinear systems including Krylov iterative methods, multilevel AMG solvers and direct sparse factorisation. Dynamic modelling via IMEX schemes for stiff problems and stochastic analysis via non-intrusive and intrusive polynomial chaos approaches are described. A comparative analysis of FUMM against cellular automata, agent-based and conventional transport models confirms the systematic advantages of the proposed approach: rigorous variational formulation, adaptive discretisation, scalable solvers and natural alignment with current regulatory standards. Compliance of FUMM with DBN B.2.2-12:2019 is demonstrated, and practical applicability for scenario analysis, optimisation tasks and automated urban indicator mapping is established.

*Keywords:* finite element method, urban modeling, spatial planning, accessibility, hybrid discretization, scenario analysis.