УДК 539.3 **https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2022-8(18)-19**

ЦИЛІНДРИЧНИЙ ЗГИН ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОЇ ПЛИТИ, ЧАСТКОВО ОБПЕРТОЇ НА ЖОРСТКИЙ ФУНДАМЕНТ

CYLINDRICAL BENDING OF A TRANSVERSALLY-ISOTROPIC SLAB PARTIALLY RESTING ON A RIGID FOUNDATION

Шваб'юк В.І., д.т.н., проф., Ротко С.В., к.т.н., доц., Шваб'юк В.В., к.т.н., доц., Бондарський О.Г., Ужегова О.А. (Луцький національний технічний університет, м. Луцьк)

Shvabyuk V.I., Dr. Tech. Sc., Professor, Rotko S.V., Ph.D., associate professor, Shvabyuk V.V., Ph.D., associate professor, Bondarskyi O.G. Ph.D. in Engineering, associate professor, Uzhehova O.A., PhD in Engineering, Associate Professor (Lutsk National Technical University, Lutsk)

У постановці уточненої моделі згину трансверсально-ізотропних плит середньої товщини розв'язана контактна задача циліндричного згину плити, центральна область якої частково контактує із жорстким фундаментом, а по краях піднята на певну висоту розподіленим уздовж її краю зусиллям.

In setting up a refined model of bending of transversely isotropic plates of medium thickness, the contact problem of cylindrical bending of the plate, the central area of which is partially in contact with the rigid foundation, and the edges are raised to a certain height by forces distributed along its edge, is solved. The solution of the fourth-order differential equation was obtained, as well as the formulas for the distribution of contact pressure on the lower surface of the interface between the slab and the foundation. The obtained formulas ensure both the exact (in the integral sense) satisfaction of the boundary conditions at the edges of the slab, and the logical (in the physical sense) distribution of the contact pressure along the lower surface of the slab, where it is partially in contact with the rigid foundation. The expression for the contact pressure is obtained due to the exact satisfaction of the boundary condition of equality of zero vertical displacement of the lower surface of the slab in the area of its contact with the rigid foundation. The mentioned vertical displacement is written in the form of a polynomial of the fourth order in the transverse coordinate.

A comparison with the corresponding results according to the "sliding" theories of B.F. Vlasov and S.A. Ambartsumyan, obtained a partial case of the developed mathematical model of plates of medium thickness when it is assumed *that the correction from the deformation of transverse compression is equal to zero. It is shown that this type of solution, where the contact pressure at the boundary of a smooth contact takes certain finite (according to "shear" theories) or infinite (according to the classical Kirchhoff theory) values, does not correspond to the physical content of the problem, as well as to the corresponding solutions of spatial problems of the theory of elasticity and it is not desirable to use them. When determining the size of the contact area, as evidenced by the author's previous research in similar problems for short beams, as well as the corresponding results of other authors, they differ only quantitatively.*

Ключові слова: уточнена модель плити, поперечний зсув, деформація поперечного обтиснення, поверхня контакту, згин.

Keywords: refined plate model, transverse shear, deformation of transverse compression, contact surface, bending.

Задачі про згин композитних плит на пружних і жорстких основах під дією розподілених та зосереджених навантажень розглядалися багатьма авторами у працях [1-4]. Зокрема, у цих працях проводилися дослідження, які пов'язані з розрахунками ізотропних пластин, побудованих на базі гіпотез Кірхгофа. Пізніше, авторами [5-8]: К. Пистером і Р. Вестманом, С. Лукасевичем, Б.Л. Пелехом та Р.Д. Сысаком, В.В. Безелянским та іншими [9,10], було враховано вплив поправок від деформацій поперечного зсуву, поперечної анізотропії на визначення величин максимальних напружень і переміщень у плитах. В останніх працях подібні задачі розглядалися уже за допомогою більш точних (вищих порядків) розрахункових рівнянь, із урахуванням деформації поперечного обтиснення.

У статті досліджується згин трансверсально-ізотропної плити, частково обпертої на жорсткий фундамент, у постановці уточненої моделі транстропних плит середньої товщини [9,10], розрахункові рівняння якої враховують деформації поперечного зсуву та обтиснення.

Розглядається циліндричний згин трансверсально-ізотропної плити, шириною $2l$, що лежить на жорсткій основі і по краях $x = \pm l$ піднята на певну висоту δ розподіленим уздовж її краю зусиллям P_1. Плита також знаходиться під дією власної ваги q і невідомого контактного тиску $p(x)$, що виникає між нижньою поверхнею плити та жорстким фундаментом в області її контакту. Приймається, що поверхня розділу плити та жорсткої основи є ідеально гладкою, тому дотичні напруження

τ_{xz}, τ_{yz} на цій поверхні вважатимуться відсутніми. Граничні умови на зовнішніх поверхнях плити для нормальних напружень σ_z записуються наступним чином [9]:

$$\sigma_z = q^+(x) = -p(x) \text{ для } (z = h; |x| \le a); \quad (1)$$

$$\sigma_z = 0 \text{ для } (z = h;\ x > a);\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \text{ для } z = \pm h,$$

де $p(x)$ – невідомий контактний тиск; $2h$ – товщина плити.

Розрахункове рівняння уточненої моделі згину плит можна записати у наступному вигляді [10]:

$$D\frac{d^4 w}{dx^4} = (1 - \varepsilon_1 \frac{d^2}{dx^2} - \varepsilon_1 \frac{d^4}{dx^4})q_2, \quad (2)$$

де $D = \dfrac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$; $q_2 = \left(q^+ + q^-\right)$ $\varepsilon_1 = \dfrac{h^2}{10(1-\nu)}\left(8\dfrac{G}{G'} - 3\nu''\right)$,

$\varepsilon_2 = \dfrac{0{,}1h^4}{2(1-\nu^2)}(1 - \nu'' G' / 2G) \cdot \dfrac{E}{E'}$, $q^- = q$ – власна вага плити.

Вираз для вертикального переміщення плити записується у вигляді:

$$W(x,z) = w(x) + \alpha_z z \cdot \frac{q_1}{E'} + A' \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \cdot \frac{z^2}{2} + \frac{\alpha_z q_2 h}{16E'} \cdot B(z). \quad (3)$$

Тут $B(z) = 6A_2 \dfrac{z^2}{h^2} - A_3 \dfrac{z^4}{h^4}$; $A' = \dfrac{\nu''}{1-\nu}$; $\alpha_z = 1 - 2\nu' A'$,

$A_2 = 1 + \dfrac{A'E'}{\alpha_z G'}$; $A_3 = A_2 - \dfrac{\nu'' A'E'}{2\alpha_z G}$, $q_1 = \dfrac{1}{2}\left(q^+ - q^-\right)$.

Вертикальне переміщення плити в області її контакту з жорсткою основою $(x \le a)$ має дорівнювати нулю: $W(x,h) = 0$. Задовольняючи цій умові, а також умові (1), одержимо вираз для контактного тиску на нижню поверхню плити:

$$A_0^+ p(x) = w(x) + 0.5A'h^2 w'' - A_0^- q, \tag{4}$$

де $A_0^{\pm} = \left(8 \pm B(h)\right)\dfrac{\alpha_z h}{16E'}$.

Поза областю контакту $(x > a)$ нижньої поверхні плити та поверхні розділу вертикальне переміщення плити записується у вигляді:

$$W(x,h) = w(x) + 0.5A' \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} h^2 - \frac{\alpha_z hq}{2E'} + \frac{\alpha_z qh}{16E'}(6A_2 - A_3), \tag{5}$$

де $B(h) = 6A_2 - A_3$.

Для визначення переміщень серединної поверхні плити, а також контактного тиску жорсткої основи на пластину (4), скористаємося диференціальним рівнянням (2), яке зводиться до вигляду:

$$w^{IV} - 2g^2 w^{II} + \lambda^4 w = \left(A_0^+ + A_0^-\right) q / D_0, \tag{6}$$

де

$$D_0 = DA_0^+ - \left(\varepsilon_2 + 0,5A'\varepsilon_1 h^2\right) = \lambda^{-4},\ g^2 = \frac{0,4}{1-\nu}\left(G / G' - \nu''\right) h^2 \lambda^4.$$

Із урахуванням симетричності задачі, розв’язком диференціального рівняння (6), за умови, що $g^2 < \lambda^2$, буде наступна формула для переміщення серединної поверхні плити:

$$w(x) = A_1 ch\alpha x \cdot \cos\beta x + A_2 sh\alpha x \cdot \sin\beta x + w^*, \tag{7}$$

де $\alpha = \sqrt{(\lambda^2 + g^2)/2}$; $\beta = \sqrt{(\lambda^2 - g^2)/2}$; $w^* = \left(A_0^+ + A_0^-\right) q$ – частковий розв’язок рівняння (6), із урахуванням абсолютної жорсткості фундаменту.

Два коефіцієнти $\left(A_1, A_2\right)$ та величина області контакту $2a$ знаходяться з умов, що невідомий контактний тиск $p(x)$ на межі області контакту $x = \pm a$ дорівнює нулю, а всередині області має задовольнити умову рівності нулю суми проекцій всіх сил на вісь Oz та умову рівності нулю суми моментів проекцій всіх сил відносно початку системи координат $\left(x = 0\right)$:

$$p\left(\pm a\right) = 0\,; \;\; \int_{-a}^{a} p\left(x\right) dx = 2ql - 2P_1\,;$$

$$\int_{0}^{a} xp\left(x\right) dx = \frac{1}{2} ql^2 - P_1 l. \tag{8}$$

За отриманими (на основі умов (8)) формулами можна знайти зміну величини області контакту та максимального контактного тиску в зоні області контакту із фундаментом як для плити з ізотропного, так і з трансверсально – ізотропного матеріалів. Останнє дозволить більш точно дослідити впливи поперечної анізотропії на згадані характеристики за рахунок уточнень від ефектів деформацій поперечного обтиснення.

Якщо ж у розрахункових рівняннях (2) - (7) покласти параметри, що враховують вплив деформації поперечного обтиснення, рівними нулю ($\nu'' = 0,\; E / E' = 0$), то отримаємо відповідні рівняння «зсувних» теорій Б.Ф. Власова [11] – С.А. Амбарцумяна [12]. Зокрема, скористаємося виразом для згинального моменту –

$$M\left(x\right) = -D\frac{d^2 w}{dx^2} - \varepsilon_\tau q_2\,, \quad \text{де величина } q_2\left(x\right) = -\frac{d^2 M}{dx^2}\,.$$

Використавши ці залежності, можна отримати наступне рівняння:

$$D\frac{d^2 w}{dx^2} = -M\left(x\right) + \varepsilon_\tau \frac{d^2 M}{dx^2}\,, \quad \varepsilon_\tau = \frac{0{,}8 h^2 G}{(1-\nu) G'}. \tag{9}$$

Рівняння (9), враховуючи, що у зсувних теоріях переміщення w є сталим по усій товщині плити, описує залежність кривини деформованої поверхні плити та може бути записане у наступному вигляді:

$$\frac{d^2M}{dx^2}-\rho^2M=0, \quad \rho^2=1/\varepsilon_\tau. \qquad (10)$$

Подібне рівняння виведене В.І. Феодосьєвим [13] в аналогічній задачі для балки (плоский напружений стан), де замість параметра ρ^2 використовується параметр $\rho_ф^2=\rho^2/\left(1-\nu^2\right)$. Ним також допускалося, що для ділянки балки, яка лежить на абсолютно жорсткій основі, кривина її поверхні рівна нулю, тому права частина рівняння (9) може стати розрахунковим рівнянням для визначення як згинального моменту $M\left(x\right)$, так і контактного тиску $p\left(x\right)=M''\left(x\right)$ на нижню поверхню плити.

Розв'язком рівняння (10) буде вираз: $M\left(x\right)=C_1 sh\rho x+C_2 ch\rho x$, де при $x=0-$ $M\left(0\right)=0, C_2=0,$ а при $x=a$ -

$$C_1=M\left(a\right)/sh\rho a\,, M\left(a\right)=P_1 l\left(1-\theta\right)-0{,}5ql^2\left(1-\theta\right)^2, \theta=a/l.$$

У результаті отримаємо :

$$M\left(x\right)=\left(P_1 l\left(1-\theta\right)-0{,}5ql^2\left(1-\theta\right)^2\right)sh\rho x/sh\rho a\,. \qquad (11)$$

Для визначення величини області контакту $2a$, на відміну від умов (8), можна отримати трансцендентне рівняння із умови, що узагальнені кути повороту γ_x зліва і справа уздовж лінії $x=a$ мають бути однаковими. Прирівнявши їх, отримаємо трансцендентне рівняння для визначення величину області контакту в плиті без урахування в рівняннях деформації поперечного обтиснення:

$$\gamma_x^{л.}\left(a\right)=\gamma_x^{пр.}\left(a\right). \qquad (12)$$

Шуканий кут повороту знаходиться за формулою

$$\gamma_x=\frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h}U\cdot zdz=-\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{4}{5}\frac{Q_x}{K'},\ \ K'=\frac{4}{3}G'h\,. \qquad (13)$$

Тут $Q(x)-$ поперечна сила у напрямку осі *x*.

Складові кута повороту γ_x зліва (ділянка плити, що контактує із фундаментом) визначаються наступним чином: похідна від переміщення w у цьому випадку $\dfrac{\partial w}{\partial x}\equiv 0$ за означенням, а величина

$$Q_x^{лів.}=\frac{dM}{dx}=\rho\left[P_1 l\left(1-\theta\right)-\frac{ql^2}{2}\left(1-\theta\right)^2\right]\frac{ch\rho x}{sh\rho a}. \qquad (14)$$

Складові кута повороту γ_x справа:

$M^{пр.}\left(x\right)=P_1\left(l-x\right)-q\left(l-x\right)^2/2,$ а $Q_x^{пр.}\left(x\right)=-P_1+q\left(l-x\right).$

Тоді, проінтегрувавши рівняння (9), отримаємо:

$$D\frac{dw}{dx}=-\int_l^x(M\left(x\right)+\varepsilon_\tau q)dx=P_1\left(l-x\right)^2/2-q\left(l-x\right)^3/6+\varepsilon_\tau q\left(l-x\right).$$

Підставивши одержані співвідношення в умову (12), отримаємо трансцендентне рівняння для визначення величини області контакту в плиті без поправки в розрахункових рівняннях деформації поперечного обтиснення:

$$\begin{gathered}\rho l\left[P_1\left(1-\theta\right)-\frac{ql}{2}\left(1-\theta\right)^2\right]\frac{ch\rho l\theta}{sh\rho l\theta}=\left[-P_1+ql\left(1-\theta\right)\right]-\\-\rho^2l^2\left[P_1\left(1-\theta\right)^2/2-ql\left(1-\theta\right)^3/6+\frac{\varepsilon_\tau}{l^2}ql\left(1-\theta\right)\right].\end{gathered} \qquad (15)$$

Одночасно, використавши формулу, що $p\left(x\right)=M''\left(x\right)$ знайдемо величину контактного тиску в плиті:

$$p\left(x\right)=\rho^2\left(P_1 l\left(1-\theta\right)-0,5ql^2\left(1-\theta\right)^2\right)sh\rho x/sh\rho a. \qquad (16)$$

Звідси, при $x=0,$ отримаємо, згідно зсувних теорій, що тиск $p\left(0\right)=0,$ а далі зростає за законом гіперболічного синуса і на межі контакту, при $x=a,$ приймає відмінне від нуля значення :

$$p(a)=\rho^2\left(P_1 l(1-\theta)-0,5ql^2(1-\theta)^2\right). \qquad (17)$$

Із останньої формули видно, що контактний тиск на межі області контакту приймає певне скінченне значення, що суперечить фізичному змісту задачі, бо згідно умов на межі області контакту $x=\pm a$ він має дорівнювати нулю. Таке ж (нульове) значення можна отримати і згідно формули (4), де враховується поперечне обтиснення.

Висновки

За допомогою формул уточненої моделі згину трансверсально - ізотропних плит середньої товщини, що ураховує у рівняннях поперечний зсув та обтиснення, розв'язана контактна задача циліндричного згину плити, центральна область якої частково контактує із жорстким фундаментом. Розглянуто також випадок розв'язку цієї задачі, коли у розрахункових рівняннях не враховується деформація поперечного обтиснення. Отриманий у цьому випадку вираз для контактного тиску між жорстким фундаментом та частиною поверхні плити повторює вираз для контактного тиску в ізотропній балці, одержаний В.І. Феодосьєвим. Показано, що такого типу розв'язки не відповідають фізичному змісту задачі і користуватись ними небажано.

References

1. Korenev B.H., Chernyhovskaia E.Y. Raschёt plyt na upruhom osnovanyy. M.: Hosstroiyzdat, 1962. 355 s.

2. Ufliand Ya.S. Yntehralnыe preobrazovanyia v zadachakh teoryy upruhosty. M.-L.: Yzd.-vo AN SSSR, 1963. 402 s.

3. Tymoshenko S.P., Voinovskyi-Kryher S. Plastynky y obolochky. M.: Fyzmathyz, 1963. 635s.

4. Vlasov V.Z., Leontev N.N. Balky, plastynы y obolochky na upruhom osnovanyy. M.: Hosfyzmatlyt, 1960. 491 s.

5. Pyster K., Vestman R. Yzghyb plastynok na upruhom osnovanyy // Trudy Amer. Ob-va ynzh. mekh. Ser.E. Prykl. mekhanyka. 1962. №2. S.165-171.

6. Lukasevych S. Lokalnye nahruzky v plastynakh y obolochkakh. M.: Myr, 1982. 544s.

7. Pelekh B.L., Sysak R.D. O davlenyy davlenyy tverdoho tela transversalno-yzotropnuiu plastynku, sviazannuiu s upruhym osnovanyem // Yzvestyia AN Armianskoi SSR. 1970. T. 23. №3. S. 36-42.

8. Bezelianskyi V.V. Raschet beskonechnoi plyty na upruhom osnovanyy po skheme osesymetrycheskoi zadachy bez hypotezy priamykh normalei // Proektyrovanye y эkspluatatsyia aэroportov. Trudy HosNYY hrazhdanskoi avyatsyy. 1980, № 196. S. 3-7.

9. Piskunov V.H., Shvabiuk V.I. Kontaktna zadacha dlia transversalno-izotropnoi plyty na pruzhnomu pivprostori // Visnyk Ukrainskoho transportnoho universytetu. Kyiv: RVV UTU. 1999. Vyp. 3. S. 218–223.

10. Shvabiuk V.I., Rotko S.V., Shvabiuk V.V. Matematychni modeli deformuvannia kompozytnykh plyt i balok: kontaktna vzaiemodiia iz shtampamy ta osnovamy. Vplyv trishchyn: Monohrafiia. Lutsk: Vezha-Druk, 2022. 804 s.

11. Vlasov B.F. Ob uravnenyiakh teoryy yzghyba plastynok // Yzv.AN SSSR, OTN, 1957, № 12. S.57-60.

12. Ambartsumian S.A.Teoryia anyzotropnykh plastyn. M.: Nauka, 1987. 360 s.

13. Feodosev V.Y. Yzbrannye zadachy y voprosy po soprotyvlenyiu materyalov. M.: Nauka, 1973. 400 s.

Список використаної літератури

1. Коренев Б.Г., Черниговская Е.И. Расчёт плит на упругом основании. М.: Госстройиздат, 1962. 355 с.

2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.-Л.: Изд.-во АН СССР, 1963. 402 с.

3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635с.

4. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, пластины и оболочки на упругом основании. М.: Госфизматлит, 1960. 491 с.

5. Пистер К., Вестман Р. Изгиб пластинок на упругом основании // Труды Амер. Об-ва инж. мех. Сер.Е. Прикл. механика. 1962. №2. С.165-171.

6. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках. М.: Мир, 1982. 544с.

7. Пелех Б.Л., Сысак Р.Д. О давлении давлении твердого тела трансверсально-изотропную пластинку, связанную с упругим основанием // Известия АН Армянской ССР. 1970. Т. 23. №3. С. 36-42.

8. Безелянский В.В. Расчет бесконечной плиты на упругом основании по схеме осесиметрической задачи без гипотезы прямых нормалей // Проектирование и эксплуатация аэропортов. Труды ГосНИИ гражданской авиации. 1980, № 196. С. 3-7.

9. Піскунов В.Г., Шваб'юк В.І. Контактна задача для трансверсально-ізотропної плити на пружному півпросторі // Вісник Українського транспортного університету. Київ: РВВ УТУ. 1999. Вип. 3. С. 218–223.

10. Шваб'юк В.І., Ротко С.В., Шваб'юк В.В. Математичні моделі деформування композитних плит і балок: контактна взаємодія із штампами та основами. Вплив тріщин: Монографія. Луцьк: Вежа-Друк, 2022. 804 с.

11. Власов Б.Ф. Об уравнениях теории изгиба пластинок // Изв.АН СССР, ОТН, 1957, № 12. С.57-60.

12. Амбарцумян С.А.Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.

13. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1973. 400 с.