УДК 539.3 https://doi.org/10.36910/6775-2410-6208-2022-7(17)-17

УТОЧНЕНИЙ РОЗРАХУНОК НА ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ КРУГЛОЇ ТРАНВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОЇ ПЛИТИ

SPECIFIED CALCULATION OF FORCED OSCILLATIONS OF A ROUND TRANSVERSALLY ISOTROPIC PLATE

Ротко С.В., к.т.н., доц., Шваб'юк В.В., к.т.н., доц., Ужегова О.А., к.т.н., доц. (Луцький національний технічний університет, м. Луцьк)

Rotko S.V., Ph.D. in Engineering, Associate Professor, Shvabyuk V.V., Ph.D. in Engineering, Associate Professor, Uzhehova O.A., Ph.D. in Engineering (Lutsk National Technical University, Lutsk)

Проведено розрахунок на вимушені коливання круглої трансверсально ізотропної плити, що лежить на пружній основі Вінклера та шарнірно обперта по краю. Розрахункові рівняння пластини включають поправки для врахування деформацій поперечного зсуву та обтиснення.

The calculation of the forced oscillations of a round transversely isotropic plate, which lies on the elastic Winkler basis and is hinged along the edge, is calculated. The dependences for stresses due to forces and moments in the form of a cubic parabola on the transverse coordinate are used in the article. A system of equilibrium equations in cylindrical coordinates is also used, which includes terms that describe the dynamics of forced oscillations of the transtropic plate. The initial and boundary conditions are added to the equations, which are more natural in comparison with those that take into account only the transverse displacement and do not take into account the transverse compression. In particular, the boundary condition for vertical movement provides real support of the plate along its lower edge.

The obtained calculated equations of bending of the plate include amendments to take into account the deformations of the transverse shear and compression, as well as the transverse normal stress and inertia. These amendments will potentially allow a more accurate study of their impact on the nature and magnitude of higher fluctuation frequencies. The Hankel integral transformation is applied to the differential bending equation, the core of which is its own function, through which the integral transformations of deflection and dynamic loading are written. Such representations allow us to obtain a transcendental equation for determining the frequencies of natural oscillations, which is expressed as dependences on Bessel functions. As a result, we obtain the characteristic equation and its solutions, which include the frequencies of forced and free oscillations. As partial cases, one can obtain dependences for "shear" theories, as well as the classical theory of Kirchhoff's thin plate bending.

The formulas for the frequencies include both the physical characteristics of the plate material and the characteristics of the elastic Winkler basis.

Ключові слова: вимушені коливання, пружна основа Вінклера, деформації поперечного зсуву та обтиснення

Key words: forced oscillations, elastic Winkler basis, transverse shear and compression deformations

Вступ. Подібні задачі частково розглядалися у працях С.О. Амбарцумяна [1], Є.М. Гершунова Е.М. [2], В.З. Власова і М.М. Леонтьєва [3], О.О. Рассказова, І.І. Соколовської та М.О. Шульги [4], Ю.М. Тарнопольського та А.В. Розе [5] та ін. [6]). Разом з тим, у більшості названих робіт (за виключенням [6]) впливом поперечних деформацій у цих моделях автори нехтували. Впливу поперечного обтиснення на вищі частоти коливань пластин і оболонок присвячено значно менше робіт. У більшості випадків такі дослідження проводились у постановках просторової задачі теорії пружності [7].

Постанова задачі. Розглядається напружено-деформований стан круглої плити з трансверсально-ізотропного матеріалу радіусом R, завтовшки *2h*, віднесеної до циліндричної системи координат *r*, θ, z. Вирази для напружень у поперечних перерізах плити можна записати у вигляді залежностей від зусиль і моментів для трансверсально-ізотропного матеріалу [6]:

$$\sigma_r = \frac{N_r}{2h} + \frac{3M_r}{2h^3}\cdot z + \tilde{E}\left(\frac{\partial\bar{Q}_r}{\partial r} + \frac{\nu}{r}\left(\frac{\partial\bar{Q}_\theta}{\partial\theta} + \bar{Q}_r\right)\right)\cdot f(z) + A'\tilde{\sigma}_z + \sigma_r^*;$$

$$\sigma_\theta = \frac{N_\theta}{2h} + \frac{3M_\theta}{2h^3}\cdot z + \tilde{E}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{Q}_\theta}{\partial\theta} + \frac{\bar{Q}_r}{r} + \nu\frac{\partial\bar{Q}_r}{\partial r}\right)\cdot f(z) + A'\tilde{\sigma}_z + \sigma_\theta^*;$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{N_{r\theta}}{2h} + \frac{3M_{r\theta}}{2h^3} z + G(1-\alpha)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\bar{Q}_r}{\partial\theta} + \frac{\partial\bar{Q}_\theta}{\partial r} - \frac{\bar{Q}_\theta}{r}\right) f(z); \quad (1)$$

$$\tau_{rz} = \frac{3Q_r}{4h}\left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right), (r \to \theta) \quad .$$

Тут $\quad \bar{Q}_r = (1-\alpha)Q_r / K', \quad \bar{Q}_\theta = (1-\alpha)Q_\theta / K';$

$$\sigma_r^* = \tilde{E}h^2(1-\alpha)\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + \nu(\frac{1}{r}\frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2})\right) f\left(z\right) + zA'\gamma_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\sigma_\theta^* = \tilde{E}h^2(1-\alpha)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} + \nu\frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2}\right) f\left(z\right) + zA'\gamma_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\tau_{r\theta}^* = 2Gh^2(1-\alpha)\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial r \partial \theta}\right) f(z);\ f\left(z\right) = \frac{z}{5}\left(1 - \frac{5z^2}{3h^2}\right),$$

$$\int_{-h}^{h} f(z)dz = \int_{-h}^{h} zf(z)dz = 0;\ w_2 = \frac{3}{8}\frac{\alpha_z \tilde{q}_2}{E'h} + \frac{A'}{2}\Delta w_b, \quad m = 2\gamma_p h -$$

маса одиниці поверхні плити; γ_p – густина матеріалу плити;

$$\sigma_0 = q_1 + \frac{3z}{5h}\tilde{q}_2;\ \tilde{q}_2 = q^+ + q^- + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2};\ q_1 = \frac{1}{2}\left(q^+ - q^-\right);$$

$$\tilde{\sigma}_z = \sigma_z - \sigma_0 = \frac{3}{4}\frac{\tilde{q}_2}{h} f\left(z\right);\ w_b = \tilde{w} - 0{,}8w_\tau + 0{,}8h^2 w_2;$$

$$h^2 w_2(x,y) = \frac{1}{1-\alpha}(\frac{3}{8}\frac{q_2 h}{E'} - \alpha w_\tau).$$

Величина w_τ є розв’язком диференційного рівняння

$$K'\Delta\tilde{w}_\tau = -\tilde{q}_2 + m\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2},$$

де $\tilde{w}_\tau = w_\tau - h^2 w_2;\ \tilde{w} = w + \dfrac{\varepsilon_2 \tilde{q}_2 h^4}{D}$.

Внутрішні зусилля і моменти, через які виражаються напруження (1), задовольняють систему рівнянь рівноваги циліндричній системі координат для круглої транстропної плити у вигляді:

$$\frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{N_r - N_\theta}{r} = 2h\gamma_p \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial N_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{2N_{r\theta}}{r} = 2h\gamma_p \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial M_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta}+\frac{M_r-M_\theta}{r}=Q_r+I\gamma_p\frac{\partial^2\gamma_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{\theta r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta}+\frac{2}{r}M_{r\theta}=Q_\theta+I\gamma_p\frac{\partial^2\gamma_\theta}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial Q_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta}+\frac{Q_r}{r}=-q_2+2h\gamma_p\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial t^2},$$

де поздовжні і поперечні сили , а також згинальні і крутні моменти виражаються через відомі інтегральні залежності від відповідних напружень

$$\{N_r,\ N_\theta,\ N_{r\theta},\ Q_r,\ Q_\theta\}=\int_{-h}^{h}\{\sigma_r,\ \sigma_\theta,\ \tau_{r\theta},\ \tau_{rz},\ \tau_{\theta z}\}dz,$$

$$\{M_r,\ M_\theta,\ \mathrm{M}_{r\theta}\}=\int_{-h}^{h}\{\sigma_r,\ \sigma_\theta,\ \tau_{r\theta}\}zdz\ .$$

До цих рівнянь мають бути приєднані ще й початкові та граничні умови при $t=0$:

$$w=w_0(r,\theta),\quad \frac{\partial w}{\partial t}=w_1(r,\theta),\ u=u_0(r,\theta),\quad \frac{\partial u}{\partial t}=u_1(r,\theta),$$

$$v=v_0(r,\theta),\quad \frac{\partial v}{\partial t}=v_1(r,\theta), \tag{3}$$

де $w_0, v_0, u_0, u_1, v_1, w_1-$ задані компоненти початкового переміщення і початкової швидкості від точки (r,θ).

У випадку шарнірного опертя по контуру $r=R$ граничні умови записуються

наступним чином:

$$W_{z=h}(R,\theta,t)=0\,,\ M_r=0\,,\ Q_\theta=0\,. \tag{4}$$

Вважається, що плита ($0\le r\le R$) лежить на пружній основі Вінклера і навантажена динамічним навантаженням $q(r,t)$. Розрахункове рівняння вимушених осесиметричних коливань плити можна записати у вигляді [6]:

$$\frac{D}{R^4}\Delta^2\tilde{w}(\rho,t)+m\left(1-\frac{\varepsilon_1\Delta}{R^2}\right)\frac{\partial^2\tilde{w}(r,t)}{\partial t^2}+k\tilde{w}(\rho,t)=\left(1-\frac{\varepsilon_1\Delta}{R^2}\right)q, \tag{5}$$

де $\Delta = \frac{\partial}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}; \quad 0 \le \rho \equiv r / R \le 1; \quad t > -\infty;$ k – коефіцієнт постелі пружної основи; $\tilde{w} = w + \frac{A' h^2}{6R^2}\Delta w$;

$$\varepsilon_1 = \frac{h^2}{10(1-\nu)}\left(8\frac{G}{G'} - 3\nu''\right);$$

$A' = \nu'' / \left(1-\nu\right)$; $m = 2\gamma_p h -$ маса одиниці поверхні плити.

Будемо вважати, що для головних коливань розв'язок задачі можна записати так:

$$w(\rho,t) = w(\rho)\sin pt, , \qquad (6)$$

де p – частота вимушених коливань.

Розглянемо окремий випадок, коли зовнішнє навантаження можна також записати у подібному вигляді

$$q(\rho,t) = q(\rho)\sin pt, \quad (p \ne \omega_i), \qquad (7)$$

де $\omega_i -$ – частоти власних коливань.

Із урахуванням залежностей (6), (7), рівняння (5) набуде вигляду:

$$\frac{D}{R^4}\Delta\Delta w(\rho) - m\left(1 - \frac{\varepsilon_1 \Delta}{R^2}\right)p^2 w(\rho) + kw(\rho) = \left(1 - \frac{\varepsilon_1 \Delta}{R^2}\right)q. \qquad (8)$$

Застосувавши до диференційного рівняння (8) інтегральне перетворення Ганкеля [6], ядром якого є власна функція $G(\rho\mu_i)$, інтегральні трансформанти прогину та динамічного навантаження будуть

$$W(\mu_i) = \int_0^1 \rho w(\rho) G(\rho\mu_i) d\rho, \quad Q(\mu_i) = \int_0^1 \rho q(\rho) G(\rho\mu_i) d\rho, \qquad (9)$$

де для випадку шарнірного опирання власна функція

$$G(\rho\mu_i) = J_0(\alpha_i \rho)\cdot I_0(\beta_i) - I_0(\beta_i \rho)\cdot J_0(\alpha_i)$$

та корені характеристичного рівняння

$$\frac{D}{R^4}\mu_i^4 \pm \frac{m\varepsilon_1 p^2}{R^2}\mu_i^2 - m(p^2 - \frac{k}{m}) = 0 \qquad (10)$$

мають вигляд:

$$\mu_{i1} = \alpha_i = R\left(\sqrt{p^2 \frac{m}{D^\circ} + \left(\frac{\varepsilon_1 p^2 m}{2D}\right)^2} + \varepsilon_1 p^2 \frac{m}{2D}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (11)$$

$$\mu_{i2} = \beta_i = R\left(\sqrt{p^2 \frac{m}{D^\circ} + \left(\frac{\varepsilon_1 p^2 m}{2D}\right)^2} - \varepsilon_1 p^2 \frac{m}{2D}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тут $D^\circ = D\left(1 + \frac{kR^4}{D\mu_i^4}\right)$; μ_i – корені характеристичного рівняння.

Частоти власних коливань пластини у цьому випадку можна знайти за формулою

$$\omega_i = \frac{\mu^2{}_i}{R^2}\sqrt{\frac{D}{m}}\sqrt{1 + \frac{kR^4}{D\mu_i^4}}\left(1 \pm \frac{\varepsilon_1 \mu_i^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \qquad (12)$$

Зауважимо при цьому, що для отримання числових результатів за формулами (11), (12), крім усіх інших величин, необхідно задаватися ще і значенням товщини плити $2h$. Останнє необхідно для визначення параметрів m і $k_1 = kh$.

Висновки. Отримані рівняння та залежності враховують додатково до деформації поперечного зсуву ще й деформацію поперечного обтиснення, вплив нормального напруження σ_z, а також інерцію обертання поперечних перерізів плити. Якщо покласти нулю величини $\frac{E}{G'} = 0$, $\nu'' = 0$, то отримаємо відповідні залежності класичної теорії тонких пластин. Покладення нулю коефіцієнта Пуассона ($\nu'' = 0$) приводить до результатів теорії плит, що враховує тільки деформацію поперечного зсуву.

References

1. Ambartsumian S.A. Teoryia anyzotropnыkh plastyn. M.: Nauka, 1987. 360 s.

2. Hershunov E.M. Raschet kruhlыkh y koltsevykh plastynok na deistvye proyzvolnoi dynamycheskoi zahruzky // Otdelenye matematyky, mekhanyky. Yzvestyia AN SSSR. Mekhanyka y mashynostroenye, 1964. №6. S. 89–95.

3.Vlasov V.Z., Leontev N.N. Balky, plastyny y obolochky na upruhom osnovanyy. M.: Hosfyzmatlyt, 1960. 491 s.

4. Rasskazov A.O., Sokolovskaia Y.Y., Shulha N.A. Sravnytelnyi analyz nekotorykh varyantov sdvyhovykh modelei v zadachakh ravnovesyia y kolebanyi mnohosloinykh plastyn // Prykl. mekhanyka, 1983. T. 19, №7. S. 90-96.

5. Tarnopolskyi Yu.M., Roze A.V. Osobennosty rascheta detalei yz armyrovannykh plastykov. Ryha: Zynatne, 1969. 276 s.

6. Shvabiuk V.I., Rotko S.V., Huda O.V. Kolyvannia transtropnoi plastyny na pruzhnii osnovi pid tyskom ridyny // Suchasni problemy mekhaniky ta matematyky: V 3-kh t. / Pid zah. red. R.M. Kushnira i B.I. Ptashnyka. Lviv: IPPM im. Ya.S. Pidstryhacha NANU, 2013. T.2. S. 182-184.

7. Hrynchenko V.T. Ravnovesye y ustanovyvshyesia kolebanyia upruhykh tel konechnykh razmerov. K.: Naukova dumka, 1978. 264 s.

Список використаної літератури

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.

2. Гершунов Е.М. Расчет круглых и кольцевых пластинок на действие произвольной динамической загрузки // Отделение математики, механики. Известия АН СССР. Механика и машиностроение, 1964. №6. С. 89–95.

3. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, пластины и оболочки на упругом основании. М.: Госфизматлит, 1960. 491 с.

4. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Сравнительный анализ некоторых вариантов сдвиговых моделей в задачах равновесия и колебаний многослойных пластин // Прикл. механика, 1983. Т. 19, №7. С. 90-96.

5. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В. Особенности расчета деталей из армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1969. 276 с.

6. Шваб'юк В.І., Ротко С.В., Гуда О.В. Коливання транстропної пластини на пружній основі під тиском рідини // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра і Б.Й. Пташника. Львів: ІППМ ім. Я.С. Підстригача НАНУ, 2013. Т.2. С. 182-184.

7. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. К.: Наукова думка, 1978. 264 с.